华章数学译丛

25

Differential Geometry and Its Applications

(Second Edition)

微分几何及其应用

（原书第2版）

（美） John Oprea 著
克利夫兰州立大学

陈智奇 李君 译

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛

25

Differential Geometry and Its Applications

(Second Edition)

微分几何及其应用

（原书第2版）

（美）John Oprea 克利夫兰州立大学 著

陈智奇 李君 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书是优秀的微分几何教材，在研究微分几何理论的基础上，给出了微分几何在力学、工程等学科上的大量应用。另外，本书引入了计算机代数系统——Maple，利用它不仅简化了计算，而且还绘制了大量图形，从而可以更加直观地理解微分几何的理论。此外，本书还包含大量习题，并给出了相应的提示和解答。

本书内容广泛，实例丰富，讲解深入浅出，可作为高等院校数学及相关专业的微分几何教材，同时也可作为专业人员的参考书。

Simplified Chinese edition copyright © 2006 by Pearson Education Asia Limited and China Machine Press.

Original English language title: *Differential Geometry and Its Applications, Second Edition* (ISBN 0-13-065246-6) by John Oprea, Copyright © 2004, 1997.

All rights reserved.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall.

本书封面贴有 Pearson Education(培生教育出版集团)激光防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。

本书法律顾问　北京市展达律师事务所

本书版权登记号：图字：01-2005-0524

图书在版编目(CIP)数据

微分几何及其应用(原书第2版)/(美)奥普里(Oprea, J.)著；陈智奇等译. —北京：机械工业出版社，2006.9

(华章数学译丛)

书名原文：Differential Geometry and Its Applications, Second Edition

ISBN 7-111-19269-9

Ⅰ.微…　Ⅱ.①奥… ②陈…　Ⅲ.微分几何　Ⅳ.O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第059532号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037)

责任编辑：迟振春　王敏娟

北京中兴印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2006年9月第1版第1次印刷

186mm×240mm · 22.75印张

定价：49.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

微分几何学的产生和发展是与数学分析密切相连的，在这方面做出贡献的有瑞士数学家欧拉，法国数学家蒙日，德国数学家、天文学家和物理学家高斯，德国数学家克莱因等等．经过近 300 年的发展，微分几何逐渐成为数学中独具特色、应用广泛的独立学科．

微分几何以曲线和曲面作为研究对象，在力学和一些工程技术问题方面有着广泛的应用．本书是一本优秀的微分几何教材，在研究微分几何理论的基础上，给出了微分几何在力学、工程等学科上的大量应用；反过来，这些应用也加深了读者对微分几何的理解．另外，本书引入了计算机代数系统——Maple，利用它不仅简化了计算，而且还绘制了大量图形，从而可以更加直观地理解微分几何的理论．此外，本书还包含了大量习题，给出了相应的提示和解答．并提供了一系列的例子、定义以及注释．

微分几何课程是数学与应用数学专业的专业基础课，是由初等几何通往现代几何过程中的必修课程．本书内容广泛，条理清晰，浅显易懂，图文并茂，可作为高等院校数学、物理、工程学、化学、生物和哲学等专业学生的微分几何教材，同时也可作为专业人员的参考书．

微分几何在各方面的应用是本书的一大特色，但同时也给翻译带来了一些麻烦．因为我们本身水平有限，所以翻译当中难免有不甚妥当之处．非常欢迎读者批评指正．

译 者
于南开大学

第1版前言

我们应该怎样教育今天的大学生，我们应该教他们什么知识，才能使他们今后在从事数学相关领域的职业时做好准备？我们怎样帮助他们实现从微积分和线性代数这样的基础数学到纯粹数学和应用数学中更抽象方法的飞跃？有一门学科能够使学习数学的学生步入到更高的一个发展层次，这门学科是立竿见影的、直观的、可计算的、有用的和跨学科的，最重要之处在于它很有趣．当然，我们这里所涉及的是一门有着悠久和奇妙历史的学科——微分几何，它同时又是一门在许多领域不断发现有新应用的学科，从机械设计到四维流形的分类，到自然基本力理论的创造，再到DNA的研究．

微分几何是一门向更抽象的数学及其应用过渡的转型学科．这门学科让学生看到数学的本质——数学并非大学标准课程表中罗列的分门别类的课程，而是一个涵盖了几何、微积分、线性代数、微分方程、复变函数、变分法和各种科学概念的综合性的学科整体．微分几何不只是对数学专业的学生有用，而且包含理工科专业学生所需要的技巧和方法．并且，学科本身并不是完全量化的．换句话说，我们可以得到一系列的结果，其中有些仅仅依赖于计算，而有些则需要相当抽象地证明．这样，学生就逐步从计算向思考过渡．

利用像Maple和Mathematica这样的计算机代数系统，我们有机会观察把这些思想融合在一起的各种概念和结构．事实上，通常的做法是，结果的图形化表示应该与其中包含的数学理解齐头并进．例如，在第5章，我使用Maple来表示曲面上的测地线，这就要求理解微分方程组的数值解并显示其解．而且，对于这个例子来说，表示并不是一个单纯的计算机技巧的体现，而是准确地阐述不同的现象，例如我们可以用克莱罗关系来描述测地线上的有界性问题．用计算机代数系统理解概念和解决问题还有很多好处．例如，绘制测地线的程序修改以后可以用来显示在曲面上运动的质点的运动方程．第7章就是这样做的，同时描述了与变分法和最优控制有关的程序．在第1、2、3、5、7章的后面几节，我们解释了如何应用Maple来刻画微分几何的结构．这些章节可以作为一个非正式的Maple指南，而不仅仅是程序的排列．对于读者来说，这样做既有优点又有缺点．优点在于书中有使用中某些陷阱的小小提示以及避免这些陷阱的方法，缺点在于其中难免带有我个人的喜好色彩，而且我并非一位Maple专家．本书中介绍的Maple的特性，任何人可以使用．在这里，我之所以用Maple而不是用Mathematica来编程，是因为我个人认为对于学生来说，学习Maple更容易．如果你倾向于使用Mathematica，你可以毫不费劲地将书中的Maple程序转换为Mathematica程序，或者你可以在[Gra93]中找到大量用Mathematica编写的几何程序和例子．

尽管这里用到了计算机代数系统，但是从19世纪的观点来看，本书依然是传统的．所不同的是，我在这本书的写作过程中有意地加进了一些我认为是理科专业和数学专业的学生应该知道的资料．例如，虽然克莱罗关系或雅可比定理等力学现象的描述以及傅科摆这样的力学现象的几何描述等知识可以在一些高级教科书(例如[Arn78]和[Mar92])中找到，但是出现在本

科生的教科书中，我相信这还是第一次．即使在单独处理数学问题的时候，我也会主动地加上一些应用(不管是不是属于数学方面)．事实上，这对于区分物理(例如肥皂膜)和数学(例如极小曲面)是很有帮助的．

这本书最初是为半学期的微分几何课程设计的．事实上，我为数学、物理、工程学、化学、生物和哲学等专业的学生开设过这门课程．当时，我讲授第1～7章．当然，并不是讲授这七章的所有内容，而是着重讲授其中的部分章节，然后要求学生完成包含其他部分的作业．例如，学生做过关于渐伸线、设计齿轮、利用曲率和挠率构造曲线、Enneper曲面和此曲面面积的极小值、极小曲面上的测地线，以及相对论中的欧拉-拉格朗日方程等方面的研究．很多时候，学生掌握的知识已经超出这本书涵盖的内容，我也因此扩展了自己的知识．在此，向他们表示感谢．这本书不仅可以作为半学期或一学期微分几何课程的教科书，而且也可以作为一学年的教科书．作为一学年的教科书，就可以讲授所有的章节；作为半学期或一学期的教科书，我推荐讲授上面提到的章节，当然也可以根据需要进行选择．

关于这本书的题材布局，有两点需要说明．第一，习题穿插在正文当中．因此，习题就成为正文的重要组成部分，同时也就不容易被发现．读者在学习这本书的时候，至少要了解这些习题．第二，我对正文的定理、引理、例子、定义和评论的顺序的处理同LaTeX是一样的．

我要特别感谢以下几位学生．Rob Clark最先引起我对极小曲面的兴趣，他同Jack Chen一起向我展示了如何用计算机(例如Ken Brakke的Evolver程序)来区分曲面“极小的”和“调和的”性质．Laszlo Ilyes提供了许多用于最优控制的Maple程序．而Carrie Kyser把我最初写的可笑的“测地线程序”修改成奇妙的和雅致的程序，结果同我想要做的完全一样．Sue Halamek对习题解答的初稿作了出色的工作，如果还遗留下任何错误，自然是我在定稿时的疏忽所致．感谢上面提到的学生，感谢所有期待着这本书出版的学生！

感谢我的朋友Allen Broughton，是他首先用我的手稿讲授这门课程，并使之完善．他还最先探索使用Maple来刻画微分几何，并且负责编写计算曲率等第一批程序．如果没有Joyce Pluth在TEX方面的技能，那么上面所提及的手稿还是原来的样子．她把这些手稿输入电脑并且不厌其烦地给我讲解TEX中的一些复杂问题，直到我可以自己使用TEX．感谢Elaine Hoff和Dena Jones，他们热心地帮助我复印、校对和剪贴．感谢克利夫兰几何/拓扑研讨班的所有成员，他们参与了有关本书各部分的大量讲座．

最后，感谢妻子Jan和女儿Kathy，没有她们的帮助、支持和理解，就不可能出版这本书．谢天谢地，我的电脑终于放假了！

John Oprea
oprea@math. csuohio. edu

第 2 版前言

第 1 版出版以后，我收到很多人提出的评论、建议和修正. 很抱歉，我不能把所有这些都补充到第 2 版. 其中一个原因就是这本书是面向本科生的，我认为有一些主题超出了本科生所能理解的范围. 我从发给我的评论当中学到了很多知识，这也算是写这本书所得到的奖赏吧！因此，我要感谢以下各位，他们除了应尽的职责之外，还提出通常属于更广范围内的评论：David Arnold，David Bao，Neil Bomherger，Gary Crum，Dan Drucker，Lisbeth Fajstrup，Karsten Grosse-Brauckmann，Sigmundur Gudmundsson，Greg Lupton，Takashi Kimura，Jaak Peetre，Ted Shifrin，Peter Stiller.

第 2 版纠正了第 1 版中排版上和数学上的错误，也加入了一些新的内容. 近几年，因为椭圆函数在微分几何和变分法中的应用越来越多，所以我在这一版中加入了一些这方面的简要介绍. 这本书中关于椭圆函数最主要的应用是波状体和 Mylar 气球的显式参数的求导. 这样的显式参数化法也可以确定微分几何的不变量，例如，高斯曲率和测地线分析. 当然，这里要用到 Maple. 椭圆函数的这部分应用是我和 Ivailo Mladenov 合作工作的精华部分，在此我要对他在这方面提供的真知灼见和对本书的辛勤奉献表示感谢.

在第 2 版中，Maple 的作用不仅仅是为了画图，而是为了用计算机来展示一些奇妙的现象. 在将本书从第 1 版 AMS-TeX 转换为第 2 版 LaTeX2e 的过程中，充分证明 Maple 更容易嵌入 Postscript 文件，所以在这一版中增加了很多图片. 这些图片都是我用 Maple 8 生成的. 只要阅读了每章最后关于 Maple 的章节，你就能明白这些图片是怎样生成的. 因为 Maple 在升级的过程中改变了一些命令，所以第 1 版中的程序需要大量修订以后才能在 Maple 8 中运行. 我个人认为 Maple 再次升级不会出现这样的情况. 如果这本书中的程序在新的版本中运行时产生错误，你可以升级 Maple. 需要注意的是，Maple 不再支持“linalg”包，而是支持“LinearAlgebra”包. 本书中所有的 Maple 程序，我都进行了相应的修改. 我想不论 Maple 怎么升级，这些命令在一段时间内是不会改变的. 而且不论怎么变，这本书以研究微分方程的解作为研究微分几何的核心内容是不会改变的，正因为这一点，Maple 通过它的“dsolve”命令以及可以给出微分方程的显式解和数值解而在微分几何的研究当中起着越来越重要的作用.

最初，这本书是为半学期或一学期的课程设计的，讲授曲线和曲面的几何学. 然而，今天的课程已经超出这个范围，所以我愿对尚未制定教学大纲的老师提供一些建议. 如果作为一学期来用，建议讲授第 1、2、3 章以及第 5 章的前半部分. 这部分包括基本的曲线和曲面几何学，同时介绍各种曲率以及利用以上思想研究测地线. 如果是我教授这门课程，我会尽可能地用 Maple 把几何概念直观化，也会把类似于 5.7 节在工业上的应用这样的资料作为这个学期学生的研究课题. 如果作为两个学期来用，第一个学期同上，第二个学期可以讲授第 5 章的后半部分以及第 6、7 章，但是不讲授第 4 章的极小曲面和第 8 章的高维几何学部分. 学完这部分、

在变分法的意义下，学生们将会见到高斯-博内、完整性以及一类几何重现(和一点力学知识)．作为一门课程，肯定存在不同于上面提及的讲法，当然，这需要读者自己去挖掘．

John Oprea
oprea@math. csuohio. edu
j. oprea@csuohio. edu
www. csuohio. edu/math/oprea

注：Maple 9 于 2003 年夏天诞生，本书中所有的程序都用 Maple 9 做过测试．所有命令和程序除少数外，都可以运行．3.8 节中的下列代码是用函数 g 和 h 定义一个旋转曲面．

```
> h:=t->h(t);g:=t->g(t);
```

$$h := h$$

$$g := g$$

```
> surfrev:=[h(u)*cos(v),h(u)*sin(v),g(u)];
```

$$surfrev := [h(u)\cos(v), h(u)\sin(v), g(u)]$$

这个程序在 Maple 8 中可以运行，在 Maple 9 中运行时系统会提示在公式“surfrev”中套用的递归次数太多．这时，不定义 g 和 h，直接定义“surfrev”即可．4.9.2 节、4.9.3 节和 4.9.4 节中的程序也遇到同样的定义问题，解决的办法也相似．

致 读 者

在学习一门数学课程的时候，每一个学生都想知道这门课程的实质是什么. 通常来说，一门课程由一系列包含着结果和证明的主题组成，教师很清楚这些主题的顺序和陈述的合理性，而学生则不然. 事实上，所有的书都一样. 编者们由于偏爱他们所从事的学科面对"题材"抓住不放，并希望把它们展示给学生. 在此，让我们花一些时间去描述这本书中的微分几何的实质.

微分几何涉及用微积分去了解空间形状及其性质. 通常我们有两种主要的途径. 首先用参数方程来定义几何体，然后求导，再用代数的办法得到能够准确表示几何实体的新的表达式. 如果有了用参数化代数表示的几何体，那么我们就可以从微积分导出能说明几何学某些性质的几何量. 最基本的例子就是这本书中常提到的各种各样的曲率. 一旦知道这些特殊的量如何出现在微积分中，我们就可以用特定的途径来限制这些量，进而提出问题，即什么几何形状具有满足这些限制的量. 例如，知道了曲率的含义，我们就可以提出什么平面曲线具有恒定曲率函数这样的问题. 在某种意义下，这是用微分法计算几何量的反运算，可以认为积分法就是这么产生的. 更准确地说，这些几何量满足的条件就是一些微分方程，而这些微分方程的解集就是我们要找的几何体.

所以说，微分几何与微分方程紧密相连. 对于学习基础的微分几何，并不需要掌握解微分方程的所有奇妙的方法. 能够处理可分离的微分方程并且知道一些技巧(这本书所用到的)就行了. 甚至有些时候，微分方程的显式解并不存在，但是数值解通常能产生一个解几何体. 由于近十年计算机代数系统的发展，一般人也可以做到这一点.

在第 1 章，我们运用上面所提及的方法研究所有几何体的基础——曲线. 我们用微积分方法得到确定三维空间上的一条曲线的微分方程组——Frenet 方程，运用计算机代数系统 Maple 得到这组方程的解，进而绘制空间上的曲线. 使用任何计算机程序都需要输入参数，这里需要输入的是 Frenet 方程的参数——曲线的曲率和挠率. 正如这个过程所反映的，曲率和挠率确定了一条曲线. 当然，对曲率和挠率加上限定条件，我们就能看到会产生什么样的解析曲线.

在第 2 章，我们运用第 1 章所学的曲线的知识研究三维空间曲面的几何学. 形状算子是一个重要的定义，它与用来理解几何体的各种曲率都密切相关. 类似于三维空间里通常的方向导数，形状算子可以理解为在某一个切方向上求微分. 它实质上是一个矩阵，这样我们可以用线性变换下矩阵的不变量来定义曲率. 例如，主曲率就是形状算子的特征值，平均曲率是特征值的平均值(即矩阵的迹的二分之一)，而高斯曲率则是特征值的乘积(即矩阵的行列式). 当然，有两个方面的问题需要解决. 第一，形状算子及其曲率能够反映我们对几何曲面直观的理解；第二，其曲率确实可计算. 这是下一章讨论的问题.

在第 3 章，证明了曲率是可计算的，只需通过对参数的求导. 不仅如此，我们在曲率上附加一些特定的条件，还能够得到解析解. 例如，要求紧曲面上的高斯曲率是常数，或者旋转曲

面上的平均曲率恒为零，我们可以得到满足这些条件的解析曲面．对可计算性这种要求的一个重要副产物，是高斯得到的著名结果：高斯曲率可以由度量直接计算；也就是说，这些函数向我们表明曲面如何扭曲通常意义下的欧几里得距离．这个结果之所以重要是因为它给出了一种曲率定义，可以把曲率从三维空间推广到更抽象的曲面上，这是向更高级的微分几何迈出的第一步．

第 4 章讲述极小曲面，也就是曲面上每点处的平均曲率恒为零的曲面．我们的主题就是阐明(局部的)极小曲面满足一个称为极小曲面方程的(偏)微分方程．而且，在曲面的定义函数中加上适当的限制，可能找到极小曲面方程的解析解．从几何的观点(而不是解析的观点)来看，我们强调的是基本的计算和结果，以及把肥皂膜解释为极小曲面，肥皂泡解释为平均曲率是常函数的曲面．这些方面获得的最重要结果是亚历山大定理，其中证明能够嵌入到三维空间的极小的紧曲面是球面．在这一章中，还讨论了调和函数——导致另一种研究极小曲面的高级方法，这种方法具有更浓的解析意味．特别是，我们引入复变函数作为极小曲面的自然参数．我们不期望读者了解复变函数(只要知道什么是复数)，所以复习了这方面的相关知识．这种方法大大丰富了极小曲面的知识．我们还举了一个例子，说明极小曲面不是使曲面面积达到最小的曲面．

在第 5 章，我们着手去研究不同的几何体．使得点与点之间达到最短距离的道路的类型是一个几何体的基本性质．例如，平面上两点间最短距离是两点间的直线段．而在球面上就不一样了．从克利夫兰到巴黎，除非穿越隧道，否则我们必须通过大圆路径才能达到最短距离．知道最短曲线是球面上的大圆使我们对球面的曲率和对称性有了一个直观的认识．这一章研究的就是曲面上最短长度的曲线，也就是测地线．事实上，我们对此作少许修正，研究的是被称为测地线方程的微分方程，其解就是曲面上的测地线．有时我们可以得到测地线的解析解，更多的时候只能得到数值解，然后绘制测地线，以此来揭示曲面的基本几何特性．测地线方程可以推广到更抽象的情形，所以我们从考察更一般的几何结果开始．

第 6 章是本书最高深的部分．在这一章，我们研究曲率怎样影响最基本的几何性质，如三角形的内角和这样的基本性质．这样得到数学上一个非常漂亮的结果——高斯-博内定理．我们给出了关于这个定理的各种应用，这些应用告诉我们怎样从抽象的定理中得到具体的几何信息．在这一章，我们还介绍了一个对物理有重要影响的概念——完整性，从经典力学到量子力学，这个概念都有着深远的影响．特别是，我们对傅科摆运动过程提出这个概念，再次显示曲率对我们生存的世界的影响．

第 7 章讲述变分法，它简直可以称为几何和自然界关系的哲学基础．物理系统总是处于由最小位能决定的形态．悬挂的绳子由于这个原因以悬链线的形式存在．推广这种思想，得到欧拉-拉格朗日方程．这依然是一个微分方程，它的解是极小的泛函．特别是，哈密顿原理告诉我们，如果物理系统的欧拉-拉格朗日方程与所谓的作用积分相关，那么就出现物理系统的运动．测地线就是一个例子，我们再次看到几何来源于微分方程(微分方程本身是一个物理原理的反映)．

在第 8 章，我们以流形和高维曲面的观点回顾前面学习的知识．需要更为抽象的这一章，

因为超过三维我们无法看见，而对于学习物理或者微分几何的学生来说，这又是进一步研究的基础. 自然界的物理系统很少仅仅依赖于两个参数存在，所以了解含有大量参数的几何学对于分析物理系统来说是非常重要的. 所以在这一章中，我们研究极小子流形、高维测地线方程，以及黎曼曲率、截面曲率、里奇曲率和标量曲率. 这些主题是许多书籍的题材，故本书只说明它们与前面七章中介绍的曲面论的联系.

以上就是这本书的主要内容. 学习这本书的最好的方法就是：寻找正确的微分方程，力求得到方程的解析解或者数值解，最后揭示基本的几何性质. 让我们开始吧！

目　录

译者序

第 1 版前言

第 2 版前言

致读者

第 1 章　曲线的几何性质 …… 1

1.1 引言 …… 1

1.2 弧长参数化 …… 9

1.3 Frenet 公式 …… 11

1.4 非单位速度曲线 …… 19

1.5 曲率和挠率的一些结论 …… 24

1.6 格林定理及等周不等式 …… 27

1.7 几何曲线与 Maple …… 30

第 2 章　曲面 …… 47

2.1 引言 …… 47

2.2 曲面的几何性质 …… 54

2.3 曲面的线性代数 …… 61

2.4 法曲率 …… 65

2.5 曲面和 Maple …… 69

第 3 章　曲率 …… 77

3.1 引言 …… 77

3.2 曲率的计算 …… 80

3.3 旋转曲面 …… 86

3.4 高斯曲率公式 …… 89

3.5 曲率的一些结果 …… 92

3.6 德洛奈曲面 …… 97

3.7 椭面函数、Maple 和几何 …… 100

3.8 用 Maple 计算曲率 …… 109

第 4 章　常平均曲率的曲面 …… 118

4.1 引言 …… 118

4.2 极小曲面的基本概念 …… 120

4.3 极小化面积 …… 124

4.4 常平均曲率 …… 127

4.5 调和函数 …… 132

4.6 复变量 …… 134

4.7 等温坐标 …… 136

4.8 Weierstrass-Enneper 表示 …… 137

4.9 Maple 和极小曲面 …… 146

4.9.1 极小曲面作图 …… 146

4.9.2 极小曲面方程 …… 148

4.9.3 几何条件：旋转极小曲面 …… 148

4.9.4 代数条件 …… 150

4.9.5 Maple 和极小化面积 …… 151

第 5 章　测地线、度量及等距 …… 154

5.1 引言 …… 154

5.2 测地线方程和克莱罗关系式 …… 158

5.3 关于完备性的简要讨论 …… 166

5.4 非 R^3 中的曲面 …… 167

5.5 等距和共形映射 …… 173

5.6 测地线和 Maple …… 178

5.6.1 绘制测地线 …… 178

5.6.2 圆锥上的测地线 …… 183

5.6.3 圆柱上的测地线 …… 184

5.6.4 波状体曲面上的测地线 …… 186

5.6.5 非 R^3 中曲面的测地线 …… 189

5.6.6 球极平面及墨卡托投射 …… 191

5.7 工业上的应用 …… 195

第 6 章　完整性及高斯-博内定理 …… 204

6.1 引言 …… 204

6.2 修正的共变极面 …… 206

6.3 平行向量场及完整性 …… 207

6.4 傅科摆 …… 210

6.5 角的剩余定理 ······ 212
6.6 高斯–博内定理 ······ 214
6.7 高斯–博内定理的应用 ······ 216
6.8 测地极坐标 ······ 220
6.9 Maple 和完整性 ······ 226
第 7 章 变分法和几何 ······ 231
7.1 欧拉–拉格朗日方程 ······ 231
7.2 横截性和自然边界条件 ······ 236
7.3 基本例子 ······ 239
7.4 高阶问题 ······ 243
7.4.1 高阶欧拉–拉格朗日方程 ······ 243
7.4.2 高阶自然边界条件 ······ 248
7.5 魏尔斯特拉斯 *E*-函数 ······ 249
7.6 带约束条件的问题 ······ 258
7.6.1 积分约束条件 ······ 258
7.6.2 完整性约束条件 ······ 262
7.6.3 微分方程约束条件 ······ 265
7.7 微分几何与力学中的进一步应用 ······ 267
7.8 庞特里亚金最大值原理 ······ 275
7.9 关于气球形状的应用 ······ 278
7.10 变分法和 Maple ······ 285
7.10.1 基本欧拉–拉格朗日程序 ······ 285
7.10.2 压力作用下的梁柱 ······ 288
7.10.3 双摆 ······ 292
7.10.4 被约束的粒子的运动 ······ 294
7.10.5 Maple 和聚酯薄膜气球 ······ 296
第 8 章 高维略谈 ······ 298
8.1 引言 ······ 298
8.2 流形 ······ 298
8.3 共变微商 ······ 301
8.4 克利斯朵夫符号 ······ 307
8.5 曲率 ······ 312
8.6 有趣的双重性质 ······ 323
附录 部分练习的提示及解答 ······ 328
参考文献 ······ 340
索引 ······ 344

第 1 章　曲线的几何性质

1.1　引言

欧几里得几何空间是由直线和平面构成的．要超越这一平坦的空间到弯曲的世界里，就需要了解更一般类型的曲线和曲面．了解曲线的基本特性也是了解曲面几何性质的基础．

三维空间$\mathbb{R}^3$上的曲线是连续映射α：$I\to\mathbb{R}^3$，其中I是实轴$\mathbb{R}$上的某种类型的区间(例如$(0,1)$，(a,b)，$[a,b]$，$(-\infty,a]$，$[0,1]$等)．因为α的值域在$\mathbb{R}^3$中，所以α的输出有三个坐标．于是，对于$t\in I$，我们用

$$\alpha(t)=(\alpha^1(t),\alpha^2(t),\alpha^3(t))$$

作为α的参数化法(parametrization)，其中α^i：$I\to\mathbb{R}$都是函数．一个较好的方法，就是把曲线看成是空间中粒子随时间t变化的运动轨迹$\alpha(t)$．如果每个坐标函数α^i是$\mathbb{R}$上可微的实值函数，则称α是可微的或光滑的．事实上，为以后定义曲率和挠率，需要每个α^i至少是三次可微的．在实际中，这个限制条件并不过分．

映射α在t_0处的速度向量定义为

$$\alpha'(t_0)=\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\bigg|_{t=t_0},\frac{d\alpha^2}{dt}\bigg|_{t=t_0},\frac{d\alpha^3}{dt}\bigg|_{t=t_0}\right),$$

其中$d\alpha^i/dt$是通常意义下的导数，$|_{t=t_0}$表示导数在$t=t_0$处的值．为了方便起见，也将这个值记为$\frac{d\alpha^i}{dt}(t_0)$．为了说明$\alpha'$的几何意义，首先介绍下面例子．

例 1.1.1(曲线的第一个例子：$\mathbb{R}^3$中的直线)　我们知道两点决定一条直线．在平面$\mathbb{R}^2$上，有一种表示直线的代数方法，那就是通常的斜截式方程．可是，在$\mathbb{R}^3$中没有斜率的概念，也就不能用类似的方法给出直线的方程．但是连结p，q两点的直线可以用以下的方法来描述．为了得到所求直线，增加向量p．利用方向向量$q-p$，也就是从p点到q点的方向，参数t表示沿着$q-p$移动的距离．经过以上步骤，就得到$\mathbb{R}^3$中的参数形式的直线(如图 1-1 所示)：

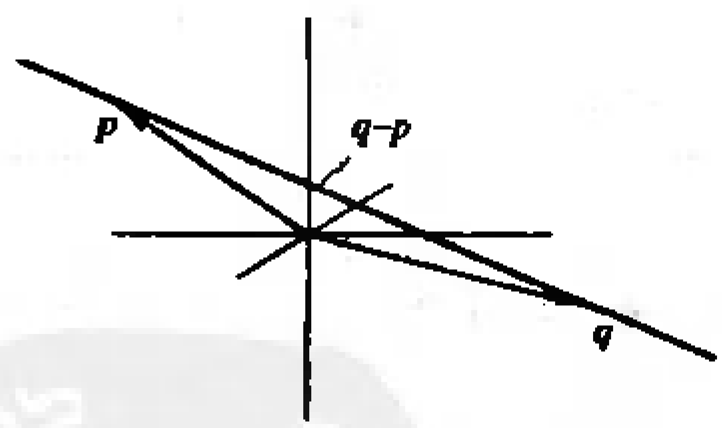


图 1-1　参数形式的直线

$$\alpha(t)=p+t(q-p).$$

例如，取$p=(1,2,3)$且$q=(-1,4,-7)$，此时$q-p=(-2,2,-10)$，则经过p，q两点的直线为

$$\begin{aligned}\alpha(t)&=(1,2,3)+t(-2,2,-10)\\&=(1-2t,2+2t,3-10t).\end{aligned}$$

练习 1.1.2　求经过$(-1,0,5)$和$(3,-1,-2)$的直线的参数方程．

练习 1.1.3　求$\mathbb{R}^4$中经过$(-1,6,5,0)$和$(0,1,-3,9)$的直线的参数方程．

可以看到给定直线 $\alpha(t)=p+t(q-p)$，$\alpha'(t)=q-p$. 因为方向向量 $q-p$ 也是该时刻的速度向量，所以常记为

$$\alpha(t)=p+tv.$$

1~2 以上描述了直线的速度向量，很自然的问题就是一般曲线 $\alpha(t)$ 的速度向量是什么样子. 其定义为

$$\begin{aligned}\alpha'(t_0)&=\left(\left.\frac{\mathrm{d}\alpha^1}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0},\left.\frac{\mathrm{d}\alpha^2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0},\left.\frac{\mathrm{d}\alpha^3}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right)\\&=\left(\lim_{t\to t_0}\frac{\alpha^1(t)-\alpha^1(t_0)}{t-t_0},\lim_{t\to t_0}\frac{\alpha^2(t)-\alpha^2(t_0)}{t-t_0},\lim_{t\to t_0}\frac{\alpha^3(t)-\alpha^3(t_0)}{t-t_0}\right)\\&=\lim_{t\to t_0}\left(\frac{(\alpha^1(t),\alpha^2(t),\alpha^3(t))-(\alpha^1(t_0),\alpha^2(t_0),\alpha^3(t_0))}{t-t_0}\right)\\&=\lim_{t\to t_0}\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}.\end{aligned}$$

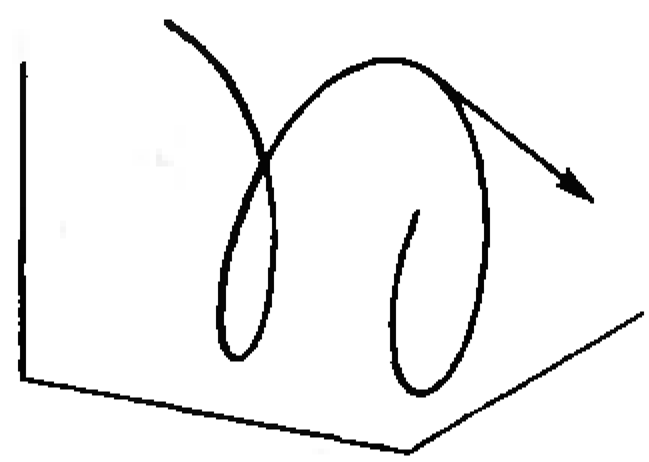


图 1-2 曲线的切向量

上式与通常导数的“斜率”定义很相似. 注意极限号内邻近的两个向量总是指向 t 增加的方向. 对 $t<t_0$，因为 $t-t_0$ 是负值，所以上面的结论是正确的. 又 $t\to t_0$，所以向量越来越接近，直到成为曲线在 $\alpha(t_0)$ 处的切向量(参见图 1-2). 也就是说，α 在 t_0 处的速度向量 $\alpha'(t_0)$ 是 α 在 $\alpha(t_0)$ 处的切向量. 注意，我们得到的是确定长度的向量，而非直线. 回忆$\mathbb{R}^3$ 中向量$v=(v^1, v^2, v^3)$的长度可由勾股定理决定

$$|v|=\sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2}.$$

练习 1.1.4 两次运用勾股定理证明$|v|$是(0，0，0)到(v^1, v^2, v^3)的距离.

如果对所有 $t\in I$，$\alpha'(t)\neq 0$，则称 $\alpha(t)$是正则的. 一般地，如果曲线非正则，就将其分成正则的几段，每段独立考虑. 正则的假定保证了可以沿着曲线作相同方向上的移动. 这对于接

3 下来讨论弧长是很重要的.

例 1.1.5(尖点线 $\alpha(t)=(t^2, t^3)$) 注意 $x=t^2$，$y=t^3$，所以 $y=\pm x^{3/2}$，$\alpha'(t)=(2t, 3t^2)$ 且 $\alpha'(0)=(0, 0)$. 因此 α 是非正则的，但在 x 轴上方和下方部分分别是正则的.

在我们的讨论中，$|\alpha'(t)|=\sqrt{(\mathrm{d}\alpha^1/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}\alpha^2/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}\alpha^3/\mathrm{d}t)^2}$仅仅是 α 的速度. 再次把 α 看作粒子轨迹，t 看作时间，可以看到速度向量的长度就是在给定时间粒子的速度. 对直线 $\alpha(t)=p+tv$，速度是方向向量的长度$|v|$. 注意，所取的直线都是有固定速度v的直线. 稍后我们将看到，每条正则曲线都可以重新参数化使其具有固定的速度，所以这不是本质的限制. 然而，原先给出的参数方程可能掩盖了曲线为直线的事实，直到将其重新参数化，变为含有固定速度的参数方程时才能揭示它的本质. 因为我们想用命题 1.1.7 刻画直线，所以习惯上要把直线重新参数化使其有固定速度.

如果 $\alpha(t)=(\alpha^1(t), \alpha^2(t), \alpha^3(t))$是$\mathbb{R}^3$ 中的曲线，它的加速度向量表示为

$$\alpha''(t)=\left(\frac{\mathrm{d}^2\alpha^1(t)}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}^2\alpha^2(t)}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}^2\alpha^3(t)}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

练习 1.1.6 牛顿提出了一个问题：一条曲线绕一个轴转动产生一个曲面，如果曲面在"稀薄的"流体（如空气）中运动产生的阻力最小，那么这条曲线是什么曲线？牛顿的答案是如下曲线（见第 7 章）：

$$(x(t),y(t)) = \left(\frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{t}+2t+t^3\right],\frac{\lambda}{2}\left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)+t^2+\frac{3}{4}t^4\right]-\frac{7}{8}\lambda\right),$$

其中 λ 是正常数，且 $x\geqslant 2\lambda$. 画出该曲线，计算速度和加速度向量，并求此曲线和 x 轴在交点 $(2\lambda, 0)$ 处的交角.

我们现在来讨论第一个（最简单的非平凡）微积分实例，对曲线的几何性质加上限制. 事实上，这是曲线微分几何的实质. 在后面将会有更多的例子.

命题 1.1.7 *曲线 α 是（有常速度的）直线当且仅当 $\alpha''=0$.*

证明 若 $\alpha(t)=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}$ 是直线，则 $\alpha'(t)=\boldsymbol{v}$（$\boldsymbol{v}$ 是常向量），所以 $\alpha''(t)=0$.

如果对所有的 t，$\alpha''(t)=0$，则对于每个坐标函数 $\alpha^i(t)$ 有 $\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha^i(t)}{\mathrm{d}t^2}=0$. 二阶导数为 0，说明 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha^i(t)}{\mathrm{d}t}=v^i$ 是一个常数. 作关于 t 的积分，得到 $\alpha^i(t)=p^i+v^it$，其中 p^i 是积分常数. 则

$$\alpha(t)=(p^1+tv^1,p^2+tv^2,p^3+tv^3)=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v},$$ 4

其中 $\boldsymbol{p}=(p^1, p^2, p^3)$，$\boldsymbol{v}=(v^1, v^2, v^3)$. 因此，曲线 α 可以表示为参数化的直线. ■

这个简单的结论告诉我们如何使用微积分方法验证几何性质. 为了看出利用这些基本思想能得到什么，考虑下面问题. 求 $\mathbb{R}^3$ 中两点 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的最短距离. 在很小的时候我们就知道答案是直线，现在我们证明其正确性. 微积分告诉我们距离是速度的简单积分. 因此积分

$$L(\alpha)=\int_a^b|\alpha'(t)|\,\mathrm{d}t$$

计算的是正则曲线 α：$[a, b]\to\mathbb{R}^3$ 从 $\alpha(a)$ 到 $\alpha(b)$ 的弧长（即移动距离）. 先考虑弧长的一小段（无穷小的一部分）（如图 1-3 所示），由勾股定理知，直角边为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 的直角三角形的斜边长 $l=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$. 假设 x，y 是以 t 为参数的函数，则 $\alpha(t)=(x(t), y(t))$ 且 $\mathrm{d}x^2=(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2\mathrm{d}t^2$，$\mathrm{d}y^2=(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2\mathrm{d}t^2$. 所以

$$l=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

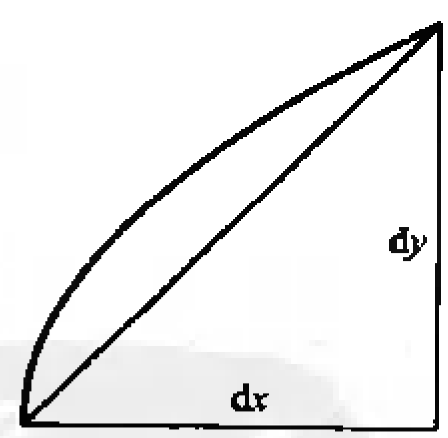


图 1-3 曲线的无穷小段

这个关系式也就是说距离等于速度乘以时间. 通过积分将所有小曲线段相加，得

$$L(\alpha)=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b|\alpha'(t)|\,\mathrm{d}t.$$ 5

这种 3 维的直观描述仅仅用到之前 3 维空间中关于勾股定理的练习. 现在，向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度 $|\boldsymbol{v}|$ 可写成 $\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$，其中的"·"运算是向量的点积. 一般地，若 $\boldsymbol{v}=(v^1, v^2, v^3)$，$\boldsymbol{w}=(w^1, w^2, w^3)$，则 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=v^1w^1+v^2w^2+v^3w^3$.

命题 1.1.8 *点积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|\cos\theta$，其中 θ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的夹角.*

证明 如图1-4所示．由通常的向量性质可得 $u=v-w$．因此

$$\begin{aligned}|u|^2=u\cdot u&=(v-w)\cdot(v-w)\\&=v\cdot v-2v\cdot w+w\cdot w\\&=|v|^2+|w|^2-2v\cdot w.\end{aligned}$$

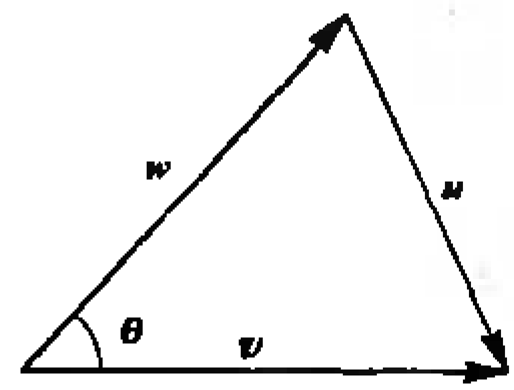


图 1-4

三角形余弦定律表明 $|u|^2=|v|^2+|w|^2-2|v||w|\cos\theta$．两式右边相等，合并相同项，得到

$$v\cdot w=|v||w|\cos\theta.$$ ■

推论 1.1.9(施瓦茨不等式) 点积服从下列不等式：

$$|v\cdot w|\leqslant|v||w|.$$

证明 注意到 $|\cos\theta|\leqslant 1$，故结论成立． ■

对导数而言，点积就如普通的乘积，也就是说保持莱布尼茨(Leibniz)(或乘法)法则．特别地有以下命题．

命题 1.1.10 如果 $\alpha(t)$ 与 $\beta(t)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的两条曲线，则

6 $$\frac{\mathrm{d}(\alpha\cdot\beta)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cdot\beta+\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}.$$

证明 对分量函数使用莱布尼茨法则，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\alpha\cdot\beta)}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha^1\beta^1+\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3)\\&=\sum_i\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}\beta^i+\alpha^i\frac{\mathrm{d}\beta^i}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\sum_i\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}\beta^i+\sum_i\alpha^i\frac{\mathrm{d}\beta^i}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cdot\beta+\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$ ■

在不引起混淆的时候省略 t，乘积法则可简写为 $(\alpha\cdot\beta)'=\alpha'\cdot\beta+\alpha\cdot\beta'$．现在就可以回答曲线上两点间最短(光滑)路径问题．

定理 1.1.11 在 $\mathbb{R}^3$ 中，两点间有最短弧长的曲线是直线．

证明 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中两点 p，q．连结两点的直线的参数方程是 $l(t)=p+t(q-p)$，其中 $q-p$ 表示由 p 到 q 的方向向量．所以 $l'(t)=q-p$ 且 $|l'(t)|=|q-p|$ 为常量．因此

$$L(l)=\int_0^1|l'(t)|\,\mathrm{d}t=|q-p|\int_0^1\mathrm{d}t=|q-p|,$$

且 p 到 q 线段(或方向向量)的长度就是 p 到 q 的距离(正如我们所期望的)．现在考虑连结 p，q 的另一条曲线(如图1-5所示)．

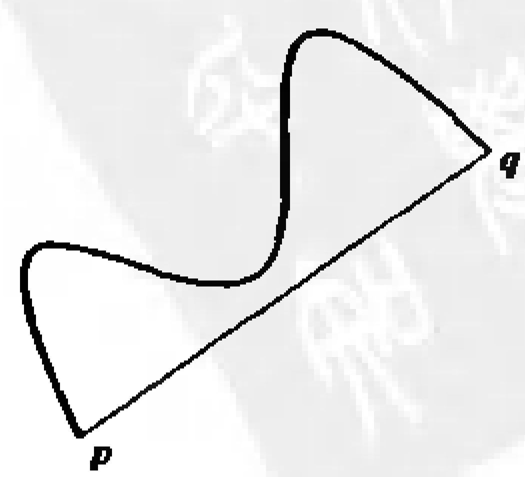


图 1-5 直线和比较曲线

只要证明 $L(\alpha)>L(l)$，那么由 α 的任意性，就可以说明直线是取得最短距离的曲线．但是如何证明 α 比 l 长呢？一个直观的解释是，α 从一个错误的方向出发．也就是说，$\alpha'(a)$ 不是指向 q 点．

7 该如何估计这个偏差呢？$q-p$ 的单位向量 $u=(q-p)/|q-p|$ 与 α

在 p 点的切向量 $\alpha'(a)$ 之间的夹角可由点积 $\alpha'(a)\cdot u$ 决定．再用积分给出偏差的总和，就可以证明 $L(\alpha)>L(l)$．为了得到所需的不等式，下面用两种方法精确地计算 $\int_a^b \alpha'(t)\cdot u\,\mathrm{d}t$．因为 u 是一个常向量，故有 $(\alpha(t)\cdot u)'=\alpha'(t)\cdot u+\alpha(t)\cdot u'=\alpha'(t)\cdot u$．由微积分基本定理有 $\int_a^b \mathrm{d}f/\mathrm{d}t\mathrm{d}t=f(b)-f(a)$，所以

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \alpha'(t)\cdot u\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\alpha(t)\cdot u)'\mathrm{d}t &= \alpha(b)\cdot u-\alpha(a)\cdot u \\
&= q\cdot u - p\cdot u \qquad \text{因为 } \alpha(a)=p,\alpha(b)=q \\
&= (q-p)\cdot u \\
&= \frac{(q-p)\cdot(q-p)}{|q-p|} \\
&= \frac{|q-p|^2}{|q-p|} \\
&= |q-p| \\
&= L(l),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

这就是从 p 到 q 的直线距离．另外，

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \alpha'(t)\cdot u\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_a^b |\alpha'(t)|\cdot|u|\,\mathrm{d}t \qquad \text{由施瓦茨不等式} \\
&= \int_a^b |\alpha'(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{因为 } |u|=1 \\
&= L(\alpha).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

综合(1)，(2)得到 $L(\alpha)\geqslant L(l)$．注意，$\alpha'(t)\cdot u=|\alpha'(t)|\cdot|u|$ 仅当 $\cos\theta=1$ 或 $\theta=0$ 时成立．也就是说，对于任意 t，$\alpha'(t)$ 必须平行于 $q-p$．此时 α 必是从 p 到 q 的直线．因此，如果 α 不是直线，$L(\alpha)>L(l)$． ■

这样，利用微积分的基本概念，我们知道如何辨别 $\mathbb{R}^3$ 中的直线并断定为什么直线给出两点间的最短距离．当然，$\mathbb{R}^3$ 由欧几里得几何学所支配．微分几何的主要目的就是采用类似于 $\mathbb{R}^3$ 中的技巧研究一般曲线的几何性质．

用参数方程表示曲线可能是定义者的偶然之作，但事实上它来源于几何或物理上的思考．用下面的几个例子说明这一点．

例 1.1.12（以(0，0)为圆心，r 为半径的圆） 圆是几何中最实用、最熟悉的曲线之一．当然，问题是如何给出此曲线的参数方程．当 8
$r=1$ 时，从此曲线上一点 P 向横轴作垂线，得到夹角为 θ 的直角三角形，$\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 分别是此直角三角形的垂边和水平边，从而得出 P 点的坐标$(\cos\theta,\ \sin\theta)$（如图 1-6 所示）．对半径为 r 的圆，由相似三角形基本性质，三角形的垂边和水平边分别为 $r\sin\theta$，$r\cos\theta$．所以圆上点的坐标为$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$．因而，圆可用 θ 参数化．再将圆看成粒子运动的轨迹，则可写为

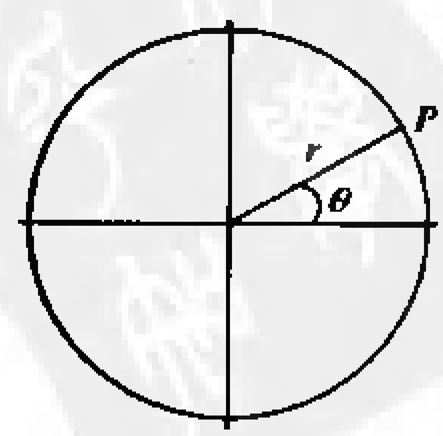


图 1-6 半径为 r 的圆

$$\alpha(t)=(r\cos t, r\sin t),\quad 0\leqslant t<2\pi.$$

这里有两个重要的结论必须牢记．第一，$\alpha'(t)=(-r\sin t,\ r\cos t)$，所以，对于所有的 t，$\alpha(t)\cdot\alpha'(t)=0$．换句话说，切向量垂直于半径；第二，$\alpha''(t)=(-r\cos t,\ -r\sin t)=-\alpha(t)$，即加速度向量指向圆心．最后，圆的弧长(即圆周)为

$$L(\alpha)=\int_0^{2\pi}|\alpha'(t)|\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}r\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}r\,dt$$
$$=rt\Big|_0^{2\pi}=2\pi r.$$

练习 1.1.13 假设一个半径为 a 的圆放在 x 轴上并与(0，0)点接触，现让它沿 x 轴正方向滚动．证明与 x 轴接触点的轨迹 α 满足

9 $$\alpha(t)=(a(t-\sin t), a(1-\cos t)).$$

其中，t 是圆心与 x 轴的新接触点连线和圆心与原接触点连线构成的角．此曲线叫做摆线(如图 1-7 所示)，在第 7 章将会再次讨论这条曲线．提示：回忆 $s=at$，其中 s 是弧长．画出圆滚动 s 个单位后的图像，原接触点在哪里？

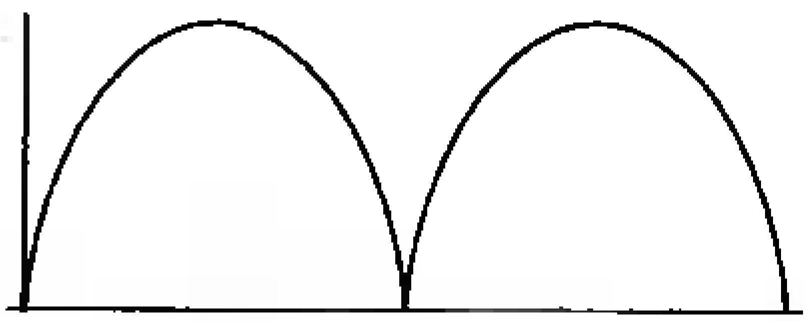


图 1-7 摆线

练习 1.1.14 考虑以下形式的摆线：

$$(x(t), y(t))=(A+a(t-\sin t), B-a(1-\cos t)).$$

画出该摆线，可以看出它是从上例中获得的一个倒转形式．假设单位质量的粒子在摆线上的 $(\bar{x},\ \bar{y})$ 点以静止状态开始，该点对应于参数表示中的角度 $\bar{t}$．在重力作用下(假设无摩擦)，证明对任何选定的初始角度 $\bar{t}$，粒子总是经过时间 $T=\sqrt{\frac{a}{g}}\pi$(其中 g 为重力加速度)就滑到摆线底端(即 $t=\pi$)．惠更斯利用这一性质制作了无摆钟，他考虑了海上船只的准确计时问题，从而改进了航海术．他把摆线命名为等时线(tautochrone)，因为后者意味着时间相同．我们将在第 7 章重温摆线，届时，将看到另一个迷人的性质和名称．提示：位能通过 $v^2/2=g(\bar{y}-y)$ 转化为动能，而时间等于距离除以速度，所以

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{\bar{x}}^{x_{bot}}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\bar{y}-y}}\,dx$$
$$=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\bar{t}}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{\cos\bar{t}-\cos t}}\,dt$$

10 $$=\sqrt{\frac{a}{g}}\left(-2\arcsin\left[\frac{\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{1+\cos\bar{t}}}\right]\right)\Bigg|_{\bar{t}}^{\pi}.$$

用 $y'=(dy/dt)/(dx/dt)=-\sin t/(1-\cos t)$，$\bar{y}=B-a(1-\cos\bar{t})$，$y=B-a(1-\cos t)$ 化简上式，再用微分证明最后一步并且计算 T 的值．见 1.7 节中的 Maple 方法．

例 1.1.15(星形线) 考虑星形线 $\alpha(t)=(a\cos^3t,\ a\sin^3t)$，其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$(如图 1-8 所示)．星形线(它是人们在研究齿轮的最佳形状时发现的)的定义与摆线的定义相似，但它不是圆沿着直线滚动，而是圆在另一个圆的内部滚动．准确地说，是让半径为 $a/4$ 的圆在半径为 a 的圆(圆心在(0，0))内滚动．具体来说，设开始小圆在(a，0)点与大圆接触，并使初始与(a，0)接触的点沿大圆滚动．滚动使其转过一段 s 的弧长．要弄清接触点的位置，关键是要弄清 t 和 θ，其中 t 是大圆圆心到新接触点的连线与 x 轴正向的角度，θ 是小圆转过的角度(以接触点测量)．可得 $s=at$ 且 $s=a\theta/4$，故 $\theta=4t$.

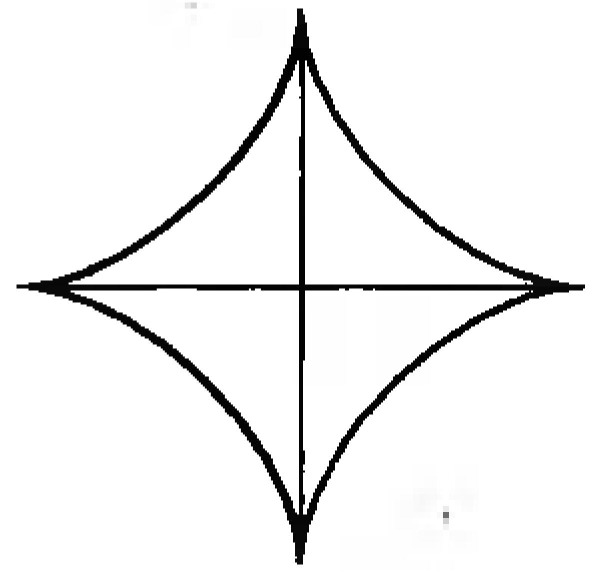


图 1-8 星形线

为了得到转动点轨迹的参数方程，需要做两项工作．首先，建立接触点相对于小圆圆心的轨迹的参数方程．这很简单，因为恰好绕圆转动了 θ．但也存在一个小问题，因我们测得的 θ 是接触点转过的角度，不过这可以如图 1-9 所示处理．注意，这里还要运用一个有用的关系式 $\theta=4t$．小圆相对于圆心的坐标为($(a/4)\cos3t$，$(a/4)\sin3t$)；其次，小圆的圆心总是沿(0，0)为圆心，$3a/4$ 为半径的圆运动，故此时小圆圆心移动到($(3a/4)\cos t$，$(3a/4)\sin t$)，因而相对原点(0，0)接触点移动到

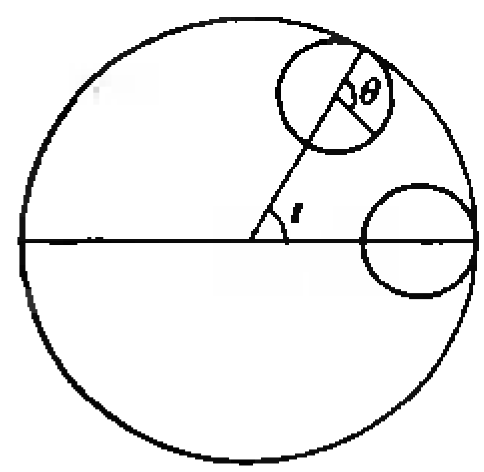


图 1-9

$$\alpha(t)=\left(\frac{3a}{4}\cos t+\frac{a}{4}\cos3t,\frac{3a}{4}\sin t-\frac{a}{4}\sin3t\right).$$

练习 1.1.16 验证上述命题，并说明星形线公式可以化简为

$$\alpha(t)=(a\cos^3t,a\sin^3t),$$

也就是 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

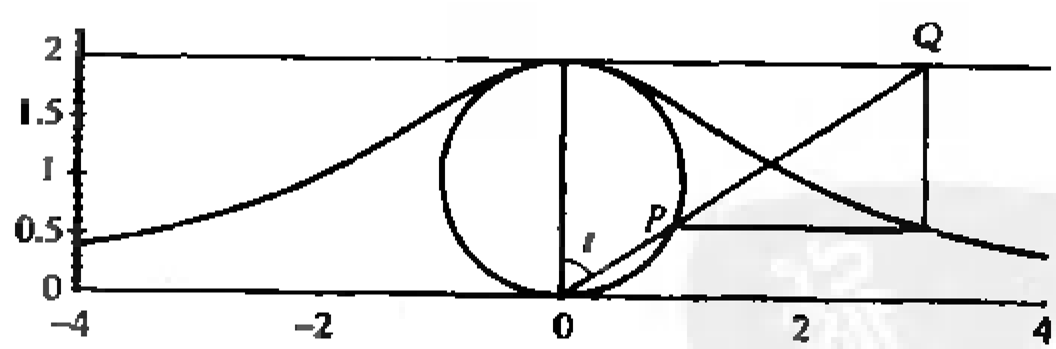


图 1-10 箕舌线

练习 1.1.17 引一条过原点及点 P 的直线，其中 P 是圆心为(0，a)、半径为 a 的圆上的任意一点．求此直线与水平线 $y=2a$ 的交点 Q．从 Q 引一条垂线和过点 P 的水平线相交，这些交点的集合就是著名的*箕舌线*(witch of Agnesi)[⊖]．如图 1-10 所示．用 t 表示 x 轴的垂线和过(0，0)，P，Q 的直线的夹角．证明箕舌线 $W(t)$ 可用参数 t 表示为

⊖ 18 世纪中叶 Maria Agnesi 翻译成"witch"——这显然是误译！早先 Grandi 研究这条曲线时曾使用意大利语"versorio"，意指"可在任意方向自由移动"．Agnesi 认为 Grandi 使用了意大利语"versiera"，意指"魔鬼之妻"或"巫婆"．所以 Agnesi 就给"她"取了这个名字[Yat74].

$$W(t) = (2a\tan t, 2a\cos^2 t).$$

例 1.1.18(螺旋线) 考虑参数方程 $\alpha(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$，其中 $0\leqslant t<\infty$. 注意到前两个坐标确定的是圆周运动，而第三个坐标表示将曲线从平面提起. 这样产生的螺旋线如图 1-11 所示. 计算可得 $\alpha'(t)=(-a\sin t, a\cos t, b)$ 且 $\alpha''(t)=(-a\cos t, -a\sin t, 0)$. 注意 $\alpha''(t)$ 指向 z 轴.

例 1.1.19(悬桥) 考虑悬桥的图(如图 1-12 所示)，这里悬线均匀承担负荷. 这就是说任意区间$[a, b]$支撑的重量为 $W=c(b-a)$，其中 c 为常量. 对悬线张力的竖直和水平方向运用牛顿定律 $F=ma$ 得到力的方程：

$$T\sin\theta = cx \quad 和 \quad T\cos\theta = T_0.$$

这里的 x 和 θ 如图 1-12 中所描述，T_0 是悬线从 0 到 x 处的水平方向上的张力常量.

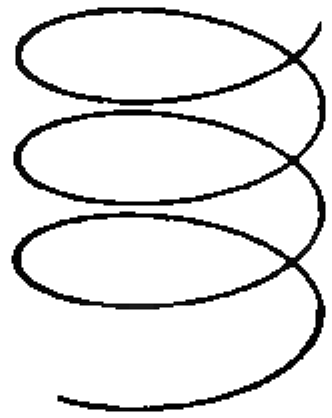


图 1-11 螺旋线

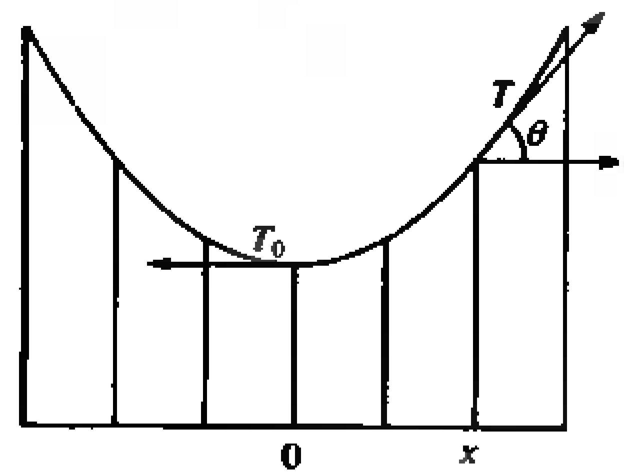


图 1-12 悬桥图

练习 1.1.20 利用 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=\tan\theta$，解上述方程，可得

$$y = \frac{c}{2T_0}x^2 + d.$$

如此一来，悬桥的吊绳形成的曲线是抛物线.

例 1.1.21(悬链线) 假设悬线自由悬挂，只考虑自身重量(如图 1-13 所示)，这种曲线又是什么形状呢？这种情形与上例的不同之处在于：悬线的重量不是沿水平方向均匀分布的，而是沿着悬线的长度均匀分布. 因此，必须考虑弧长而不是简单的只是沿着轴的距离. 用 W 表示悬线(重量)密度，$s=s(x)$ 表示从 $x=0$ 开始的弧长.

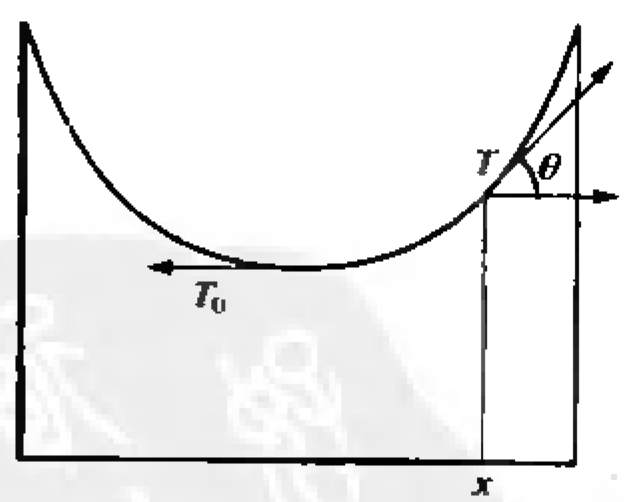


图 1-13 悬线图

练习 1.1.22 由图 1-13，利用 $F=ma$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=\tan\theta$ 以及 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}x=\sqrt{1+(y')^2}$，得到下列方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{W}{T_0}s(x) \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{W}{T_0}\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x}}.$$

11 ~ 14 解第二个方程得

$$y = C\cosh\left(\frac{x}{C}\right) + D.$$

提示：为解此微分方程，设 $z=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，方程可分离变量为

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{W}{T_0}dx.$$

令 $z=\sinh u$，利用 $\cosh^2 u-\sinh^2 u=1$，左边可以求积分.

形如 $y=c\cosh(x/c)$ 的曲线称为悬链线(catenary)，从拉丁语 catena 演化而来，其含义为链. 以后我们将多次在本书的其他地方提到它.

例 1.1.23(追逐线) 假设敌机从(0, 0)点起飞，且以 v_p 的恒定速度沿 y 轴飞升，导弹从$(a, 0)$$(a<0)$点发射，速度是常速 v_m. 导弹在热探测器的控制下追击敌机，导弹的追击线(如图 1-14 所示)由下面微分-积分方程给出：

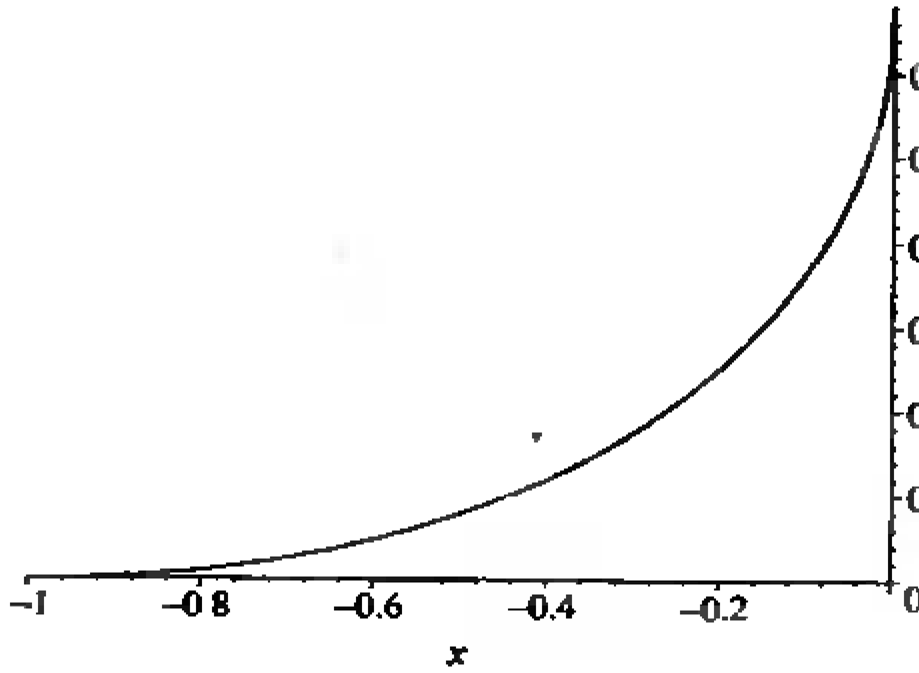


图 1-14 追逐线

$$y=xy'+\frac{v_p}{v_m}\int_a^x\sqrt{1+y'^2}dx.$$

对此方程作微分运算，然后分离变量，再积分就得到追逐线的最终表达式：

$$y=\frac{a}{2}\left[\frac{-1+\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{v_p}{v_m}}}{1-\frac{v_p}{v_m}}-\frac{-1+\left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{v_p}{v_m}}}{1+\frac{v_p}{v_m}}\right].$$

提示：(1)证明：$y=y'+v_pt$，其中 t 表示发射时间. 通过观察导弹方程 $D=RT$，用弧长表示 t.
(2)通过 $y'(a)=0$ 确定积分常数. 15

例 1.1.24(神秘曲线) $\alpha(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ \sin t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)$，其中 $0\leqslant t<2\pi$.

练习 1.1.25 确定此曲线类型，求 $\alpha'(t)$，$\alpha''(t)$，及 $L(\alpha)$. 提示：它是哪种曲线，位于$\mathbb{R}^3$的哪部分?

练习 1.1.26 给出圆心在(a, b)的圆的参数方程.

练习 1.1.27 给出椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程.

1.2 弧长参数化

在前面的讨论中将参数 t 看成时间，通常更方便的是用它表示沿曲线前进的路程. 也就是说，现在的 $\alpha(s)$ 中的参数 s 表示沿曲线移动的距离，这就是弧长参数化. 我们将会看到，以弧长作为参数使曲线的微分几何大为简化. 而且，任意曲线都能用弧长参数表示. 事实上只能进行原则上的处理. 这就意味着，虽然任何正则曲线都可以用弧长参数表示，但只在很少情况下可以得到显式的弧长参数表达式. 现在，先略微仔细地研究有关弧长参数的概念，然后证明，任意曲线都有弧长参数表示. 在下一节里，使用弧长参数化法推导 Frenet 公式，该公式描述

曲线的几何性状.

给定一条参数是 t 的曲线 α：$I\to\mathbb{R}^3$，可以将另一个区间映成 I，并利用这一映射将原参数曲线变成一条"新"的曲线(当然，它们在$\mathbb{R}^3$ 中的象是相同的点集). 精确表述为：令 h：$J\to I$ 是区间 J 到 I 上的映射，所以曲线 α 的重新参数化为

$$\beta=\alpha\circ h: J\to\mathbb{R}^3,\quad \beta(r)=\alpha(h(r)).$$

其中曲线 β 和 α 在$\mathbb{R}^3$ 中经过相同的点，只是在不同的时间到达而已(到达的时间分别是 r 和 t). β 和 α 的速度向量随着 h 而改变.

引理 1.2.1 $\beta'(r)=\alpha'(h(r))\cdot\frac{dh}{dr}(r)$.

证明 根据定义，$\beta(r)=(\alpha^1(h(r)),\ \alpha^2(h(r)),\ \alpha^3(h(r)))$. 由链式法则，坐标函数 β^i 的导数为

16

$$\frac{d\beta^i}{dr}(r)=\frac{d\alpha^i(h(r))}{dr}=\frac{d\alpha^i}{dh}\frac{dh}{dr},$$

而准确地说 $d\alpha^i/dh$ 就是 $d\alpha^i/dt$. 其中 $h(r)=t\in I$. 因此对于 $t=h(r)$，可得

$$\beta'(r)=\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\frac{dh}{dr},\frac{d\alpha^2}{dt}\frac{dh}{dr},\frac{d\alpha^3}{dt}\frac{dh}{dr}\right)=\alpha'(t)\frac{dh}{dr}.$$ ■

练习 1.2.2 曲线 α：$[a,b]\to\mathbb{R}^3$ 的弧长为 $L(\alpha)=\int|\alpha'(t)|\,dt$. 作映射 h：$[c,d]\to[a,b]$，满足 $h(c)=a$，$h(d)=b$，且对所有 $r\in[c,d]$，$h'(r)\geqslant 0$，则 $\beta(r)$：$[c,d]\to\mathbb{R}^3$ 通过映射 h 重新参数化曲线 α. 证明弧长在这一类重新参数化下不变. 对于情形 $h'(r)\leqslant 0$，也有同样结论.

定理 1.2.3 *如果 α 是正则曲线，则 α 可重新参数化为具有单位速度的曲线.*

证明 定义弧长函数为

$$s(t)=\int_a^t|\alpha'(u)|\,du$$

(其中 u 是"虚拟"变量). 因为 α 是正则的，由微积分基本定理可得

$$\frac{ds}{dt}=|\alpha'(t)|>0.$$

根据均值定理，s 在 I 上是严格递增的. 因此 s 有反函数，记为 $t(s)$，且它们的导数互为倒数

$$\frac{dt}{ds}(s)=\frac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s))}>0.$$

令 $\beta(s)=\alpha(t(s))$. 由引理 1.2.1，$\beta'(s)=\alpha'(t(s))\frac{dt}{ds}(s)$. 于是我们有

$$\begin{aligned}|\beta'(s)|&=|\alpha'(t(s))|\left|\frac{dt}{ds}(s)\right|\\&=\frac{ds}{dt}(t(s))\frac{dt}{ds}(s)\end{aligned}$$

$$= \frac{ds}{dt}(t(s)) \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s))}$$

$$= 1.$$ ■

不失一般性，设 β 定义在区间[0，1]上．考虑重新参数化后对某个参数值 s_0 的 β 的弧长 17

$$L(s_0) = \int_0^{s_0} |\beta'(s)| \, ds = \int_0^{s_0} 1 ds = s_0.$$

这恰是我们所说的"弧长参数化"．因而曲线是弧长参数化仅当曲线具有单位速度．

例 1.2.4(螺旋线) 考虑螺旋线 $\alpha(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$．我们有 $\alpha'(t)=(-a\sin t, a\cos t, b)$，$|\alpha'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}=c$．所以 $s(t)=\int_0^t c\,du=ct$，其反函数为 $t(s)=\frac{1}{c}s$．所以用弧长作为参数该曲线可表示为

$$\beta(s) = \alpha(s/c) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right).$$

注意 $|\beta'(s)|=1$．这个例子可以推广到任意有固定速度的曲线 α，这类曲线可以给出具体的弧长参数方程．然而，对一般曲线，不一定能得到由积分定义的 s 的精确表达式．

练习 1.2.5 重新参数化半径为 r 的圆使之具有单位速度．

练习 1.2.6 能否明确地重新参数化椭圆使其有单位速度？

练习 1.2.7 设 $\alpha(t)$ 是一条曲线，但未必是用弧长作为参数．假设有一根线，缠绕在 α 上，并且线的末端系在曲线上的某点．令 s 为从 α 上某固定点沿 α 的弧长函数．如果线保持张紧，线的始端自曲线起点展开，那么，自由端总是位于 $-\alpha'(t)$ 方向上且距 $\alpha(t)$ 为 $s(t)$ 的地方．证明自由端扫出的曲线为

$$\mathcal{I}(t) = \alpha(t) - s(t)\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

这条曲线叫做 α 的渐开线(involute)．计算并画出单位圆 $\alpha(t)=(\cos t, \sin t, 0)$ 的渐开线(如图 1-27 所示)．注意有单位速度的曲线 $\alpha(s)$ 的渐开线为 $\mathcal{I}(s)=\alpha(s)-s\alpha'(s)$．圆的渐开线对于齿轮设计的应用见[SU80]．

练习 1.2.8 证明螺旋线的渐开线是平面曲线． 18

1.3 Frenet 公式

本节假定曲线都以弧长为参数．考虑如下问题：假设一机械手臂的末端有三个手指移动并且抓物体，怎样设计才能使机械手找到正确的抓举位置呢？只要通过某种方式将路径参数化，不仅能给机械手指示正确位置，还可以正确地调节机械手指．如果了解了手臂沿着曲线移动时，三个手指如何与曲线联系在一起，我们也就了解了曲线的几何性质(曲线的旋转和平移)．这种变换被称为 Frenet 公式，那么这三个"手指"在曲线上什么地方呢？

第一个手指是曲线的单位切向量．设 $\beta: I \to \mathbb{R}^3$ 是有单位速度的曲线($|\beta'|=1$)，以 $T=\beta'$ 表示 β 的单位切向量(unit tangent vector)．因为对于 β 上任意一点，都有 $|T|=1$，则 T' 只能度量 T 方向变化的速度，这样 T' 就成为描述 β 某些几何性质的一个很好的量．

命题 1.3.1 $|T|=\sqrt{T\cdot T}=1$，则 $T\cdot T=1$. 根据乘积法则，可得

$$0=(T\cdot T)'=T'\cdot T+T\cdot T'=2T\cdot T'.$$

因此 $T\cdot T'=0$，也就是 T' 垂直于 T.

如图 1-15 所示，T 和 T' 互相垂直，我们称 T' 是 β 的法线(normal)．这里不要求 T' 的长度为 1，可以定义 β 的曲率(curvature)函数为

$$\kappa(s)=|T'(s)|.$$

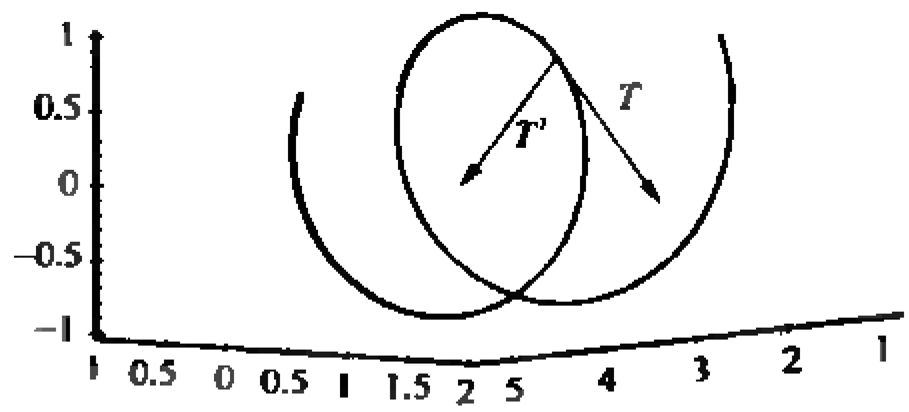


图 1-15 曲线的 T 和 T'

显然 $\kappa\geqslant 0$，而且 κ 因 β 的弯曲加剧而增加．如果
19 处处都有 $\kappa=0$，则就像下面定理 1.3.20 所描述的那样，我们可以完全确定曲线 β. 以下的讨论中假定 $\kappa>0$.

练习 1.3.2 假设 β 是 xy 平面上有单位速度的曲线．证明如果不考虑符号，β 的曲率等于 $d\theta/ds$，其中 θ 是 T 与 $e_1=(1, 0)$的夹角.

我们习惯于把重要的向量单位化，所以定义 $N=\frac{1}{\kappa}T'$ 为 β 的主法向量(principal normal vector)．为此需要 $\kappa\neq 0$，取 $\kappa>0$. 根据曲率的定义，$|N|=1$. 至此还需要第三个向量，这个向量必须垂直与 T 和 N(就像 T 和 N 那样互相垂直)．在此之前，回忆另一种向量运算，叉积(cross product).

不同于两个向量的点积(产生一个实数)，两个向量的叉积产生一个新的向量．设 $\boldsymbol{v}=(v^1, v^2, v^2)$且 $\boldsymbol{w}=(w^1, w^2, w^2)$，定义 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的叉积(用坐标表示)为

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=(v^2w^3-v^3w^3, v^2w^3-v^1w^3, v^1w^2-v^2w^1).$$

一个较简单的记忆这个公式的方法是计算行列式

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ v^1 & v^2 & v^2 \\ w^1 & w^3 & w^3 \end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 分别表示单位向量(1, 0, 0)，(0, 1, 0)，(0, 0, 1)．按照向量计算的惯用记法，分别用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 表示以上向量.

20 **练习 1.3.3** 计算上述行列式，并验证它等于 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$.

练习 1.3.4 如果行列式的第二行和第三行互换，结果如何?

练习 1.3.5 证明(通过一般计算或 Maple)著名的拉格朗日等式

$$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|^2=|\boldsymbol{v}|^2|\boldsymbol{w}|^2-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})^2.$$

练习 1.3.6 利用前面的练习证明

$$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|^2=|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|\sin\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的夹角．注意，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 平行(即 $\boldsymbol{w}=a\boldsymbol{v}$，其中 $a\in\mathbb{R}$).

练习 1.3.7 证明 $\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=0=\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$. 因而两个向量的叉积所得的向量与给定的两个向量垂直.

练习 1.3.8 证明：$|v\times w|$等于由v和w组成的平行四边形的面积(如图 1-16 所示).

现在已经知道叉积(且总假定$\kappa>0$)，可以定义β的副法向量(binormal)$B=T\times N$. 注意$|B|=|T||N|\sin 90°=1\cdot 1\cdot 1=1$，也就是说$B$也是单位向量. 与前面类似，有$B\cdot T=0=B\cdot N$. 称$\{T, N, B\}$为$\beta$的 Frenet 标架(Frenet Frame)(如图 1-17 所示).

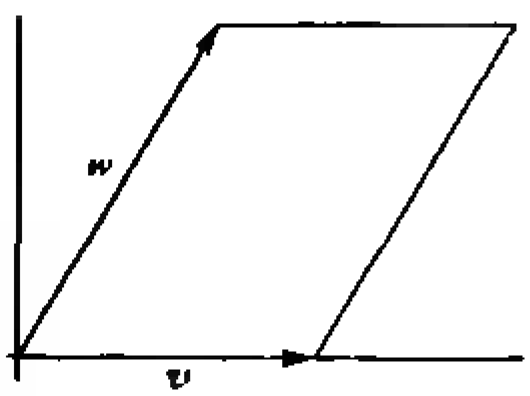


图 1-16 平行四边形

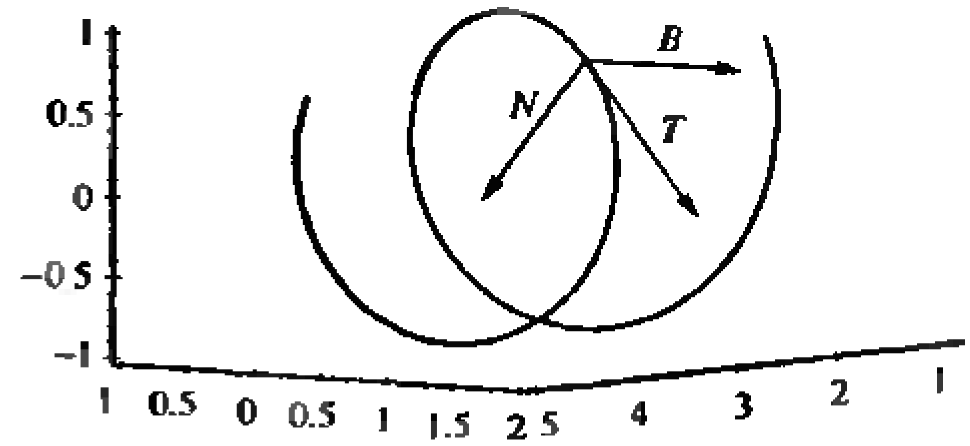


图 1-17 曲线的 Frenet 标架

T，N，B沿曲线β的变化将告诉我们曲线自身在空间中是如何旋转弯曲的. T，N，B的变化又由微分T'，N'，B'决定. 由N的定义可知，$T'=\kappa N$，所以曲率κ描述了T方向上的变化. 当然，还要计算N'，B'. 因为T，N，B是三维空间$\mathbb{R}^3$中三个互相垂直的单位向量，所以$\mathbb{R}^3$中的任一向量都是它们的线性组合. 特别地，$B'=aT+bN+cB$. 如果能确定a，b，c，也就确定了B'. 为此，我们使用已知的T，N，B的性质.

首先

$$\begin{aligned}T\cdot B'&=aT\cdot T+bT\cdot N+cT\cdot B\\&=a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 0\\&=a.\end{aligned}$$

类似地，$N\cdot B'=b$，$B\cdot B'=c$. 故有

$$B'=(T\cdot B')T+(N\cdot B')N+(B\cdot B')B.$$ 21

现在我们确定$T\cdot B'$. 已知$T\cdot B=0$，由乘积法则可得$0=(T\cdot B)'=T'\cdot B+T\cdot B'$. 又$N\cdot B=0$，所以

$$\begin{aligned}T\cdot B'&=-T'\cdot B\\&=-\kappa N\cdot B\\&=0.\end{aligned}$$

同样可以确定$B\cdot B'$. 因为$B\cdot B=1$，所以$0=(B\cdot B)'=B'\cdot B+B\cdot B'=2B\cdot B'$，故$B\cdot B'=0$. 现在$B'$的表达式中只剩下一个可能非零的系数. 既然不能用已知量刻画它，就给它起个名字. 定义$\tau=-N\cdot B'$是曲线β的挠率(torsion). 综上所述，有

$$B'=-\tau N.$$

再求N'，如同求B'，可得

$$N'=(T\cdot N')T+(N\cdot N')N+(B\cdot N')B.$$

相同的计算方法给出$T\cdot N=0$，所以$0=T'\cdot N+T\cdot N'$且$T'=\kappa N$，故$T\cdot N'=-\kappa N\cdot N=-\kappa$. 又$N\cdot N=1$，故$N\cdot N'=0$且$B\cdot N=0$，因而$B'\cdot N+B\cdot N'=0$，所以由定义得$B\cdot N'=$

$-B'\cdot N=-N\cdot B'=\tau$. 因此，

$$N'=-\kappa T+\tau B.$$

定理 1.3.9(Frenet 公式) 对于 $\kappa>0$ 且有单位速度的曲线，Frenet 标架的导数由如下公式给出：

$$\begin{aligned} T' &= \quad \kappa N \\ N' &= -\kappa T \qquad + \tau B \\ B' &= \quad -\tau N. \end{aligned}$$

22 **例 1.3.10**(圆) 考虑圆 $\alpha(t)=\left(r\cos\frac{t}{r},\ r\sin\frac{t}{r},\ 0\right)$，其导数 $\alpha'(t)=(1/r)\left(-r\sin\frac{t}{r},\ r\cos\frac{t}{r},\ 0\right)=\left(-\sin\frac{t}{r},\ \cos\frac{t}{r},\ 0\right)$，故 $|\alpha'(t)|=1$，所以 α 有单位速度，故 $T=\alpha'$. 又 $T'=\alpha''=\left(-(1/r)\cos\frac{t}{r},\ -(1/r)\sin\frac{t}{r},\ 0\right)=-(1/r)\left(\cos\frac{t}{r},\ \sin\frac{t}{r},\ 0\right)$，其中，$\left(-\cos\frac{t}{r},\ -\sin\frac{t}{r},\ 0\right)$是单位向量，因此等于 N. 即 $T'=+(1/r)N$，故 $\kappa=1/r$. 也就是说，半径为 r 的圆曲率为常数 $1/r$. 由此我们获得一种直观的想象，r 越大，圆弯曲得就越轻. 极限 $\kappa=(1/r)\to 0$ 反映了这一点. 其次，我们希望知道圆的挠率.

$$\begin{aligned} N' &= \left(\frac{1}{r}\sin\left(\frac{t}{r}\right),-\frac{1}{r}\cos\left(\frac{t}{r}\right),0\right) \\ &= -\frac{1}{r}T \\ &= -\kappa T. \end{aligned}$$

由 Frenet 公式 $N'=-\kappa T+\tau B$，故得 $\tau=0$，所以圆的挠率为 0. 对此，我们稍后将进行概括性的总结.

练习 1.3.11 利用 Frenet 公式可以确定曲线，不管曲线参数形式有多么复杂. 下面这条曲线也将在练习 1.5.4 中出现. 令 $\beta(s)=((1+s)^{3/2}/3,\ (1-s)^{3/2}/3,\ s/\sqrt{2})$，其中 $-1<s<1$.

(1)证明 β 有单位速度.

(2)证明 $\kappa=1/\sqrt{8(1-s^2)}$.

(3)证明 $N=(\sqrt{2(1-s)}/2,\ \sqrt{2(1+s)}/2,\ 0)$ 且 $B=T\times N=(-\sqrt{1+s}/2,\ \sqrt{1-s}/2,\ \sqrt{2}/2)$.

(4)证明 $\tau=\kappa$.

练习 1.3.12 一刚性物体沿曲线 $\alpha(s)$ 运动(假设它具有单位速度)，则它沿曲线的运动由旋转和平移构成. 转动由角速度 ω 决定，ω 满足 $T'=\omega\times T$, $N'=\omega\times N$, $B'=\omega\times B$. 向量 ω 称为达布向量(Darboux vector). 证明 $\omega=\tau T+kB$. 提示：$\omega=aT+bN+cB$，再和 T, N, B 分别作叉积，求出 a, b, c.

练习 1.3.13 证明 $T'\times T''=\kappa^2\omega$，其中 ω 为达布向量.

练习 1.3.14 设 α: $[a,b]\to\mathbb{R}^3$ 是单位速度曲线. 现在定义一个新的标架$\{T, U, V\}$代

替 Frenet 标架，其中 T 是通常的切向量．设 U 是 α 上满足 $T\cdot U=0$ 的任意单位向量，也就是说，对任意 $t\in[a,b]$，U：$[a,b]\to\mathbb{R}^3$ 对应一个垂直于 $T(t)$ 的单位向量 $U(t)$．定义 $V=T\times U$， 23
证明这一标架满足等式（即“Frenet 公式”）：

$$\begin{aligned}T' &= \quad\quad\quad \omega_3 U - \omega_2 V\\ U' &= -\omega_3 T \quad\quad\quad + \omega_1 V\\ V' &= \omega_2 T - \omega_1 U,\end{aligned}$$

其中 ω_1，ω_2，ω_3 是系数函数，而且满足 $T'=\omega\times T$，$U'=\omega\times U$，$V'=\omega\times V$ 的达布向量是 $\omega=\omega_1 T+\omega_3 U+\omega_3 V$．

练习 1.3.15（[Sco95]） 如果具有单位速度曲线的达布向量 $\omega=\tau T+\kappa B$，绕空间中某一固定的直线以恒定角度、恒定速度转动，我们称此曲线为恒进动的（constant precession）．证明恒进动曲线的特征可如下刻画：

$$\kappa(s)=-a\sin(bs) \quad 和 \quad \tau(s)=a\cos(bs),$$

其中 $a>0$，a，b 均为定值且 $c=\sqrt{a^2+b^2}$．首先，对于向量 $A=\omega+bN$ 和平行于 $A(0)$ 的直线 l，证明以下五条性质等价：(i) $|\omega|=a$；(ii) $\cos\theta=a/c$，其中 θ 是 ω 和 A 的夹角；(iii) $|N'|=a$；(iv) $\cos(\pi/2-\theta)=b/c$，其中 $\pi/2-\mathrm{sgn}(b)\theta$ 是 A 和 N 的夹角；(v) $|A|=c$；其次给定上述性质中的任一个，证明 A 总是平行于 l（即 $A(0)$）当且仅当 $\omega'=-bN'$；最后证明 $A'=0$ 当且仅当

$$\tau'=b\kappa \quad 和 \quad \kappa'=-b\tau.$$

解这个微分方程就可以得到结果．Maple 的“dsolve”的指令很有用，我们将在本章末尾 Maple 部分给出恒进动曲线的精确参数表示．

练习 1.3.16 设 α，β 是两条不相交的闭曲线（即 $\alpha(a)=\alpha(b)$，β 亦类似）．将 $\mathbb{R}^3$ 投射到平面，使得 α，β 至多两个点映射为单一象．对于每个 α 的下穿式交叉，指定 ±1 对应于这一定向，如图 1-18 所示，把这些 ±1 相加就得到 $Lk(\alpha,\beta)$，也就是 α，β 的环绕数（linking number）．令 $\{T,U,V\}$ 是练习 1.3.14 中给出的标架，则关于 α 的 U 的扭曲（twist）定义为

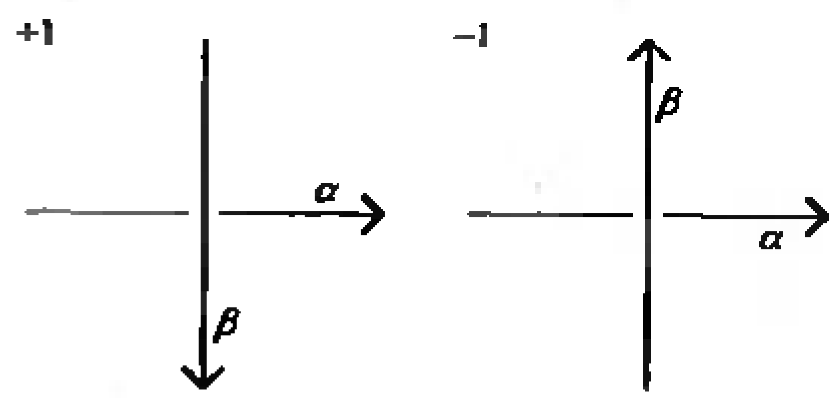


图 1-18 定向环绕数

$$Tw(\alpha,U)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b \omega_1\,\mathrm{d}t.$$

令 $\beta=\alpha+\varepsilon U$，其中 ε 尽可能小且使得 α，β 不相交．证明如果 α 是平面曲线，则 $Lk(\alpha,\beta)=Tw(\alpha,U)$．这是怀特（White）公式的一个特殊情形，而怀特公式对当代 DNA 研究起到了重要作用（详见[Poh80，PR78]）．

练习 1.3.17 对 Frenet 标架 $\{T,N,B\}$，证明 α 的主法向量 N 的扭曲是 α 的挠率的总和（除去 $1/2\pi$ 倍）．即

$$Tw(\alpha,N)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b \tau\,\mathrm{d}t.$$

例 1.3.18（螺旋线） 考虑螺旋线 $\beta(s)=(a\cos(s/c),\ a\sin(s/c),\ (bs)/c)$，其中 $c=(a^2+b^2)^{1/2}$．

那么 $\beta'(s)=(-(a/c)\sin(s/c),\ (a/c)\cos(s/c),\ b/c)$ 且 $|\beta'(s)|=a^2/c^2+b^2/c^2=c^2/c^2=1$，故 β 具有单位速度．因此 $T=\beta'(s)$ 且 $T'=\beta''(s)=(-(a/c^2)\cos(s/c),\ -(a/c^2)\sin(s/c),\ 0)=(a/c^2)(-\cos(s/c),\ -\sin(s/c),\ 0)=(a/c^2)N$．故

$$\kappa=\frac{a}{c^2}=\frac{a}{(a^2+b^2)}$$

是常数．

练习 1.3.19 证明 $\tau=b/c^2=b/(a^2+b^2)$ 是常数．

如果限定曲率和挠率，那么就能得到符合条件的曲线，下面给出的是最简单的限定条件．

定理 1.3.20 *设 $\beta(s)$ 是具有单位速度的曲线，则*

(1) $\kappa=0$ 当且仅当 $\beta(s)$ 是直线．

(2) $\kappa>0$，$\tau=0$ 当且仅当 $\beta(s)$ 是平面曲线．

证明 (1)假设 β 是直线，则 β 的参数方程为 $\beta(s)=\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{v}$ 且 $|\boldsymbol{v}|=1$(所以 β 有单位速度)，$T=\beta'(s)=\boldsymbol{v}$ 为常量，故 $T'=0$，因此，$\kappa=|T'|=0$．

假设 $\kappa=0$．根据定义，$|T'|=0$，有 $T'=0$，故
24 ~ 25 $T=\boldsymbol{v}$ 为常量(因为 β 有单位速度，故 $|\boldsymbol{v}|=1$)．又 $\beta'(s)=T=\boldsymbol{v}$，可得 $\beta(s)=\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{p}$ 为积分常量，所以 β 为直线．

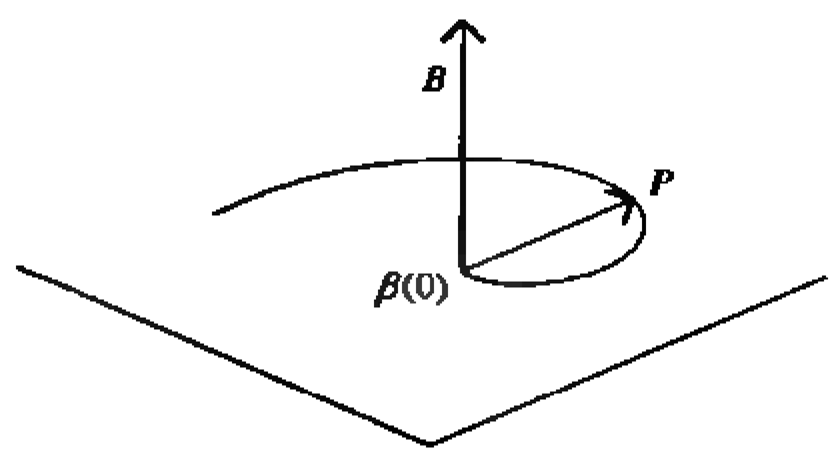


图 1-19 经过 $\beta(0)$ 垂直于 B 的平面

(2)假设 $\tau=0$．根据 Frenet 公式，$B'=0$，故 B 为常量．这意味着 $\beta(s)$ 总是位于与 B 垂直的平面内，以下将证明这一点．过 $\beta(0)$ 作垂直于法向量 B 的平面(如图 1-19 所示)，点 P 在平面上当且仅当 $(P-\beta(0))\cdot B=0$．

我们将证明对任意的 s，都有 $(\beta(s)-\beta(0))\cdot B=0$．考虑 $((\beta(s)-\beta(0))\cdot B)'=(\beta(s)-\beta(0))'\cdot B+(\beta(s)-\beta(0))\cdot B'=\beta'(s)\cdot B=T\cdot B=0$．所以 $(\beta(s)-\beta(0))\cdot B$ 是常量．为确定这一常量，计算表达式在 $s=0$ 处的值，得 $(\beta(0)-\beta(0))\cdot B=0$，则对任意的 s，都有 $(\beta(s)-\beta(0))\cdot B=0$．因而 $\beta(s)$ 在 $\beta(0)$ 和常向量 B 所确定的平面内．

假设 β 位于某一平面(像上面提到的)，则这个平面是由点 P 和不为零的法向量 n 确定的．因为 β 在平面内，故对任意 s，均有

$$(\beta(s)-P)\cdot n=0.$$

经过两次微分得到两个等式 $\beta'(s)\cdot n=0$ 和 $\beta''(s)\cdot n=0$．即 $T\cdot n=0$ 和 $\kappa N\cdot n=0$．这两个等式说明 n 垂直于 T 和 N，所以 n 是 B 的倍数且

$$\pm n/|n|=B.$$

故 B 为常量，且 $B'=0$．由 Frenet 公式可得 $\tau=0$． ■

由此可知，曲率度量了曲线沿直线的偏移，而挠率度量了曲线沿它所在的平面的偏移．对于 xy 平面上的半径为 r 的标准圆，$\tau=0$，$\kappa=1/r$．对于放置在 $\mathbb{R}^3$ 中任一位置的圆，研究它的性质有两种方法．可以给出任一圆在 $\mathbb{R}^3$ 中的参数方程，或直接用圆的定义，即平面上和一定点距离相等的点的集合．为了强调几何性质而不是解析性质(曾经侧重于这个性质)，采用第二

种定义方法. 26

定理 1.3.21 曲线 $\beta(s)$ 是圆的一部分当且仅当 κ 是大于 0 的常量且 $\tau=0$.

证明 假设 β 是圆的一部分，根据定义，β 是平面曲线，故 $\tau=0$. 再由定义，对任意的 s，$|\beta(s)-p|=r$. 两边平方，$(\beta(s)-p)\cdot(\beta(s)-p)=r^2$. 两边求微分，得到(因为 $T=\beta'$)

$$2T\cdot(\beta(s)-p)=0 \quad 或 \quad T\cdot(\beta(s)-p)=0.$$

再次微分，得

$$T'\cdot(\beta(s)-p)+T\cdot T=0$$

$$\kappa N\cdot(\beta(s)-p)+1=0 \qquad (*)$$

$$\kappa N\cdot(\beta(s)-p)=-1.$$

特别地，这意味着 $\kappa>0$，且 $N\cdot(\beta(s)-p)\neq 0$. 微分$(*)$式，可得

$$\frac{d\kappa}{ds}N\cdot(\beta(s)-p)+\kappa N'\cdot(\beta(s)-p)+\kappa N\cdot T=0$$

$$\frac{d\kappa}{ds}N\cdot(\beta(s)-p)+\kappa(-\kappa T+\tau B)\cdot(\beta(s)-p)+0=0.$$

由前面的计算知 $\tau=0$ 且 $T\cdot(\beta(s)-p)=0$，于是

$$\frac{d\kappa}{ds}N\cdot(\beta(s)-p)=0.$$

又由 $N\cdot(\beta(s)-p)\neq 0$ 知 $d\kappa/ds=0$. 因此 $\kappa>0$ 为常量.

现在假设 $\kappa>0$ 且 $\tau=0$，要证 $\beta(s)$ 是圆的一部分，必须证明 $\beta(s)$ 上每个点到某定点为常数. 对标准圆，要证明圆上任一点沿法线方向到圆心的距离等于半径，即 $rN=(1/\kappa)N$. 设 γ 表示曲线

$$\gamma(s)=\beta(s)+\frac{1}{\kappa}N.$$

因为要证明 γ 是一个定点——恰好就是我们期望得到的圆的圆心，必须证明 $\gamma'(s)=0$. 通过计算可得

$$\begin{aligned}\gamma'(s)&=\beta'(s)+\frac{1}{\kappa}N' \qquad 因为\ \kappa\ 为常数\\&=T+\frac{1}{\kappa}(-\kappa T+\tau B)\\&=T-T \qquad 因为\ \tau=0\\&=0.\end{aligned}$$
27

因此 $\gamma(s)$ 是常量 p. 同时有

$$|\beta(s)-p|=\left|-\frac{1}{\kappa}N\right|=\frac{1}{\kappa},$$

故 p 是半径为 $1/k$ 的圆 $\beta(s)$ 的圆心. ∎

练习 1.3.22 证明如果单位速度曲线 β 的任意切线都经过固定点 p，则 β 为直线. 提示：存在某个函数 $r(s)$，使得 $p=\beta(s)+r(s)\beta'(s)$.

练习 1.3.23 设 α 是位于球心为 p、半径为 R 的球面上的单位速度曲线. 证明若 $\tau\neq 0$，

则 $\alpha(s)-p=-\frac{1}{\kappa}N-\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}B$，$R^2=\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\right)^2$.

练习 1.3.24 证明若 $\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\neq 0$ 且 $\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\right)^2$ 为常量，则曲线 α(单位速度)位于球面上.

练习 1.3.25 计算下面曲线的曲率和挠率：

$$\alpha(t)=(a\cos^2(t), a\sin(t)\cos(t), a\sin(t)).$$

然后在同一个坐标系中绘制 $a=1$ 时 $\alpha(t)$ 的图像和半径为 1、圆心位于原点的球面的图像. 并且通过计算

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{|\alpha'(t)|}\right)^2$$

为常量(它必然是 $\alpha(t)$ 所在球的半径的平方)证明 $\alpha(t)$ 是球面曲线. 注意，必须有 $|\alpha'(t)|=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$，因为 $\alpha(t)$ 不具有单位速度且这里 $1/\kappa$ 的微分与 t 相关，而上面的例子是与弧长 s 相关. 提示：可能会用到下一节中的 Maple 方法及公式.

练习 1.3.26 求下面球面和柱面交线的参数方程：

$$x^2+y^2+z^2=4a^2,\quad (x-a)^2+y^2=a^2.$$

提示：$x=a\cos t+a$，$y=a\sin t$ 是柱面的参数方程. 将 x，y 代入球面方程解出 z，这条曲线就是著名的 Viviani 曲线，计算 Viviani 曲线的曲率和挠率(因为我们知道此曲线是球面上的曲线)，并验证以下公式：

28 $$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{|\alpha'(t)|}\right)^2=4a^2,$$

最后在球面上画出该曲线. 比较 Viviani 曲线和练习 1.3.25 中的曲线，做个猜想，能证明这个猜想吗？仍然会用到下一节的公式或者 Maple.

练习 1.3.27 计算曲线 $\beta(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(s), \sin(s), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(s)\right)$ 的 κ 和 τ，确定曲线类型.

练习 1.3.28 设 α 为单位速度曲线，证明存在唯一的圆 β 使得

$$\beta(0)=\alpha(0),\quad \beta'(0)=\alpha'(0),\quad \beta''(0)=\alpha''(0).$$

提示：设 $\beta(s)=p+R\cos(s/R)v_1+R\sin(s/R)v_2$，其中 v_1，v_2 是互相垂直的单位向量. 证明过程说明 β 位于 T，N 张成的平面上——称为 α 的密切平面(osculating plane)，β 称为 α 的密切圆(osculating circle). 同时，证明过程说明 β 的半径恰为 $1/\kappa_\alpha(0)$. 即 β 是在 $\alpha(0)$ 点处与 α 最接近的圆. 由此我们需要思考两点：密切圆是否总是位于曲线的一边？怎样利用密切圆的概念及计算机计算曲线的曲率？

在本节结束之前，我们考虑一下在曲线变化下曲率对弧长的作用. 一般来说，微分几何中我们感兴趣的是诸如弧长、面积、体积等等的变化率. 这样，通过刻画这些几何量变化的表达式将微积分渗透到几何当中. 这种想法起源于变分法，这是第 7 章的内容. 下面考虑特殊例子.

例 1.3.29 设 $\alpha(s)$ 是弧长为 L_0 的单位速度闭曲线，且沿其法线方向向外拉伸. 换言之，

考虑伸展线 $\beta(s)=\alpha(s)+\varepsilon\delta(s)$，通常假定 $\delta\cdot\alpha'=0$. 我们希望知道在这样一个伸展过程中，弧长最初(即当 $\varepsilon\to0$ 时)是怎样变化的. 注意

$$\beta'\cdot\beta'=\alpha'\cdot\alpha'+2\varepsilon\alpha'\cdot\delta'+\varepsilon^2\delta'\cdot\delta',$$

因此 β 的弧长是 ε 的函数：

$$L_\beta(\varepsilon)=\int\sqrt{\alpha'\cdot\alpha'+2\varepsilon\alpha'\cdot\delta'+\varepsilon^2\delta'\cdot\delta'}\,ds.$$ 29

$L_\beta(\varepsilon)$起始时的变化率为

$$\begin{aligned}\frac{dL_\beta(\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}&=\left(\int\frac{2\alpha'\cdot\delta'+2\varepsilon\delta'\cdot\delta'}{2\sqrt{\alpha'\cdot\alpha'+2\varepsilon\alpha'\cdot\delta'+\varepsilon^2\delta'\cdot\delta'}}ds\right)\bigg|_{\varepsilon=0}\\&=\int\frac{\alpha'\cdot\delta'}{|\alpha'|}ds\\&=\int\alpha'\cdot\delta'ds\qquad\text{因为 }\alpha\text{ 为单位速度}\\&=-\int\alpha''\cdot\delta ds\qquad\text{因为 }0=(\alpha'\cdot\delta)'=\alpha''\cdot\delta+\alpha'\cdot\delta'\\&=-\int\kappa N\cdot\delta ds.\qquad\text{因为由 Frenet 公式 }\alpha''=\kappa N\end{aligned}$$

如果我们选择 $\delta(s)=N(s)$(α 的主法向量)，那么 $L'(0)=-\int\kappa ds$. 练习 5.1.4 中曲面上的曲线就是这个例子的推广.

练习 1.3.30 求半径为 r 的圆沿着主法向量方向展开时孤长的初始变化率，这里不需要计算. 求圆的曲率从 0 到 $2\pi\cdot r$(因为此处取的是单位速度圆)的积分，验证结论.

1.4 非单位速度曲线

虽然所有正则曲线原则上能够参数化为单位速度曲线，但有些曲线(例如椭圆曲线)无法得到确切的表达式. 因此，要了解这些曲线的几何性质，必须修正 Frenet 公式，使之可以阐述非单位速度曲线的性质.

设 $\alpha(t)$是任意一条曲线，其速度为 $\nu=|\alpha'(t)|=ds/dt$. 理论上，我们可以将 $\alpha(t)$变为单位速度曲线 $\bar{\alpha}(s(t))$，这样就可以利用弧长参数方程 $\bar{\alpha}(s(t))$来定义 $\alpha(t)$的曲率和挠率，而且，切向量 $\alpha'(t)$的方向和再次参数化后的单位切向量 $\bar{T}(s)$的方向相同，故 $\bar{T}(s(t))=\alpha'(t)/|\alpha'(t)|$. 也就是说，我们可以用参数化为单位速度的曲线的不变量来定义非单位速度曲线的不变量.

定义 1.4.1 定义

(1)$\alpha(t)$的单位切向量为 $T(t)\overset{\text{def}}{=}\bar{T}(s(t))$.

(2)$\alpha(t)$的曲率为 $\kappa(t)\overset{\text{def}}{=}\bar{\kappa}(s(t))$.

(3)若 $\kappa>0$，$\alpha(t)$的主法向量为 $N(t)\overset{\text{def}}{=}\bar{N}(s(t))$.

(4)若 $\kappa>0$，$\alpha(t)$的副法向量为 $B(t)\overset{\text{def}}{=}\bar{B}(s(t))$.

(5)若 $\kappa>0$，$\alpha(t)$的挠率为 $\tau(t)\overset{\text{def}}{=}\bar{\tau}(s(t))$. 30

不要被这些定义弄糊涂了，它们的主要作用是帮助我们利用链式法则计算曲线的切向量和法向量(及它们的微分)．以求 $T(t)$为例，由定义 $T(t)=\overline{T}(s(t))$，其中 $\overline{T}(s(t))$是 $\alpha(t)$的弧长参数方程 $\overline{\alpha}(s(t))$的单位切向量．故可得

$$T(t)=\overline{T}(s)=\frac{\mathrm{d}\overline{\alpha}(s)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\nu}=\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\frac{1}{|\alpha'(t)|}.$$

显然，这正是我们所要的．这样，定义 1.4.1 也可视为温习链式法则的一个简便途径．

定理 1.4.2(非单位速度曲线的 Frenet 公式)　*对于速度为 $\nu=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 且曲率 $\kappa>0$ 的正则曲线 $\alpha(t)$，有*

$$\begin{aligned}T'(t)&=&\kappa\nu N&\\N'(t)&=-\kappa\nu T&&+\tau\nu B\\B'(t)&=&-\tau\nu N.&\end{aligned}$$

证明　由定义，单位切向量 $T(t)=\overline{T}(s)$，$T'(t)$表示关于 t 的微分．对等式右边使用链式法则，可得 κ，τ．

$$\begin{aligned}T'(t)&=\frac{\mathrm{d}\overline{T}(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\\&=\overline{\kappa}(s)\overline{N}(s)\nu\\&=\kappa(t)N(t)\nu(t)\qquad\text{由定义}\\T'&=\kappa\nu N.\end{aligned}$$

这样，第一个公式成立．对第二个和第三个公式，由单位速度的 Frenet 公式，得

$$\begin{aligned}N'(t)&=\frac{\mathrm{d}\overline{N}(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\\&=(-\overline{\kappa}\overline{T}+\overline{\tau}\overline{B})\nu\\&=-\kappa\nu T+\tau\nu B.\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}B'(t)&=\frac{\mathrm{d}\overline{B}(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\\&=-\overline{\tau}\overline{N}\nu\\&=-\tau\nu N.\end{aligned}$$

■

31 **引理 1.4.3**　$\alpha'=\nu T$，$\alpha''=(\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}t)T+\kappa\nu^2N$.

证明　因为 $\alpha(t)=\overline{\alpha}(s(t))$，计算第一个

$$\begin{aligned}\alpha'(t)&=\overline{\alpha}'(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\\&=\nu\overline{T}(s)\\&=\nu(t)T(t),\end{aligned}$$

第二个

$$\begin{aligned}\alpha''(t)&=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}T(t)+\nu(t)T'(t)\\&=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}T(t)+\nu(t)\kappa(t)\nu(t)N(t)\end{aligned}$$

$$= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}T(t) + \kappa(t)v^2(t)N(t).$$ ■

练习 1.4.4 详细计算下面的例子．对 α''给出如下的物理分析．假定一辆汽车以恒定速度(为方便起见)环绕水平公路行驶，则汽车的向心加速度为 $\alpha''=\kappa v^2 N$．汽车只受保证在公路上做圆周运动所需要的力．假定轮胎转动不打滑，这个力等于摩擦系数 μ(通常≈0.60)与汽车重力 mg(质量乘以重力加速度)的乘积．根据牛顿定律，为保证汽车在环路上运动，只需

$$\mu mg \geqslant m\kappa v^2 \quad 或 \quad \mu g \geqslant \kappa v^2.$$

对给定的曲率 κ，为使汽车紧贴路面，速度必须满足

$$v \leqslant \sqrt{\frac{\mu g}{\kappa}}.$$

如果路面倾斜，有什么变化？

由上述定义及已知的单位速度曲线结论，对非单位速度曲线 $\alpha(t)$，有 $T=\alpha'/|\alpha'|$，$B=T\times N$，$N=B\times T$，并有下述定理．

定理 1.4.5 *任意正则曲线 $\alpha(t)$满足下列公式*：

(1)$B=\dfrac{\alpha'\times\alpha''}{|\alpha'\times\alpha''|}$.

(2)$\kappa=\dfrac{|\alpha'\times\alpha''|}{|\alpha'|^3}$.

(3)$\tau=\dfrac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha'''}{|\alpha'\times\alpha''|^2}$. 32

证明 为了证明(1)，使用引理 1.4.3 中的公式，得

$$\begin{aligned}\alpha'\times\alpha'' &= (vT)\times\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}T+\kappa v^2N\right)\\ &= v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}T\times T+\kappa v^3 T\times N\\ &= 0+\kappa v^3 B\end{aligned}$$

故$|\alpha'\times\alpha''|=\kappa v^3$，于是 $B=\dfrac{\alpha'\times\alpha''}{|\alpha'\times\alpha''|}$．对于(2)，只需由$|\alpha'\times\alpha''|=\kappa v^3$ 求 κ 即可．对于公式(3)，取三次微分

$$\begin{aligned}\alpha''' &= \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}T+\kappa v^2N\right)'\\ &= \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}T+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}T'+\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}t}v^2N+\kappa 2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}N+\kappa v^2N'.\end{aligned}$$

又因为 $T'=\kappa N$，且 B 垂直于 T 和 N，$B\cdot T=0$，$B\cdot B=1$，得

$$\begin{aligned}B\cdot\alpha''' &= \kappa v^2 B\cdot N'\\ &= \kappa v^2 B\cdot(-\kappa vT+\tau vB)\\ &= \kappa\tau v^3.\end{aligned}$$

又 $\alpha'\times\alpha''=\kappa v^3B$，故

$$(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha''' = \kappa v^3 B\cdot\alpha'''$$

$$= \kappa\nu^3(\kappa\tau\nu^3)$$
$$= \kappa^2\nu^6\tau.$$

因为$|\alpha'\times\alpha''|^2=\kappa^2\nu^6$，所以

$$\tau = \frac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha'''}{\kappa^2\nu^6} = \frac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha'''}{|\alpha'\times\alpha''|^2}.$$ ■

练习 1.4.6 证明椭圆 $\alpha(t)=(a\cos t, b\sin t)$的曲率

$$\kappa = ab/(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}.$$

注意 $a=b$ 时为圆．证明任意平面曲线 $\alpha(t)=(x(t), y(t))$的曲率公式为

$$\kappa_\alpha = \frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}.$$

33 **练习 1.4.7** 计算曲线 $\beta(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$的 T，N，B 及曲率、挠率．

曲线 $\alpha(t)=(\cosh t, \sinh t, t)$是双曲螺线．回忆双曲三角函数的定义

$$\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2},\quad \sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2},\quad \tanh t = \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}.$$

还有基本等式 $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ 及以下导数公式：

$$\frac{d}{dt}(\cosh t) = \sinh t,\quad \frac{d}{dt}(\sinh t) = \cosh t.$$

练习 1.4.8 对双曲螺线证明：

(1)$T=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tanh t, 1, \operatorname{sech} t)$，其中 $\operatorname{sech} t=\frac{1}{\cosh t}$.

(2)$B=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\tanh t, 1, -\operatorname{sech} t)$.

(3)$N=(\operatorname{sech} t, 0, -\tanh t)$.

(4)$\kappa=1/(2\cosh^2 t)$.

(5)$\tau=1/(2\cosh^2 t)$.

练习 1.4.9 计算双曲螺线 α 的 $s(t)=\int_0^t|\alpha'(u)|du$.

练习 1.4.10 $\alpha(t)$不一定是单位速度曲线，其渐伸线是$\mathcal{I}(t)$．证明渐伸线$\mathcal{I}(t)$的曲率由

$$\kappa_{\mathcal{I}}(t) = \frac{\sqrt{\kappa_\alpha(t)^2+\tau_\alpha(t)^2}}{s(t)\kappa_\alpha(t)}$$

给出，其中 $s(t)$是 $\alpha(t)$的弧长函数．如果 $\alpha(t)$是平面曲线，公式又是怎样的呢？分别用公式和直接计算法计算单位圆渐开线的曲率．

例 1.4.11（平面渐屈线） 平面曲线 $\alpha(t)$的渐屈线仍是平面曲线，且它的渐伸线是 $\alpha(t)$．渐屈线的方程为

$$\mathcal{E}(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t),$$

其中，N 是$\alpha(t)$的法向量．注意渐屈线是由与 $\alpha(t)$相关的密切圆的圆心构成的．为了说明$\mathcal{E}(t)$

34 的渐伸线为 $\alpha(t)$，首先计算

$$\begin{aligned}\mathcal{E}' &= \alpha' + \left(\frac{1}{\kappa}\right)'N + \frac{1}{\kappa}N' \\ &= \alpha' + \left(\frac{1}{\kappa}\right)'N + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\nu T + \tau\nu B) \\ &= \alpha' + \left(\frac{1}{\kappa}\right)'N - \nu T \qquad \text{因为 } \tau = 0 \\ &= \left(\frac{1}{\kappa}\right)'N. \qquad \text{因为 } \alpha' = \nu T\end{aligned}$$

故$|\mathcal{E}'| = \left|\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right|$. 注意渐屈线的单位切向量 $T_{\mathcal{E}}$ 是 $\alpha(t)$的法向量 N，则渐屈线的渐伸线为

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathcal{E}}(t) &= \mathcal{E}(t) - s(t)T_{\mathcal{E}}(t) \\ &= \mathcal{E}(t) - s(t)N(t) \\ &= \alpha(t) + \frac{1}{\kappa}N - \frac{1}{\kappa}N \\ &= \alpha(t).\end{aligned}$$

这里我们用到渐屈线的弧长函数 $s(t)=\frac{1}{\kappa(t)}$，这是因为 $s(t)=\int_0^t |\mathcal{E}'|\,\mathrm{d}u = \int_0^t \left|\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right|\mathrm{d}u = 1/\kappa$.

注意在三维空间中也可以定义渐屈线. 空间渐屈线的定义为$\mathcal{E}=\alpha+\frac{1}{\kappa}N+\frac{c}{\kappa}B$，其中 c 为常量.

例 1.4.12(抛物线的平面渐屈线) 假定抛物线 $y^2=2ax$ 的参数方程为 $\alpha(t)=(t^2/(2a),\ t)$，则 $\alpha'(t)=(t/a,\ 1)$，$\nu=|\alpha'|=\sqrt{a^2+t^2}/a$，故 $T=(t/\sqrt{a^2+t^2},\ a/\sqrt{a^2+t^2})$. 由此计算曲率

$$\begin{aligned}T' &= \left(\frac{a^2}{(a^2+t^2)^{3/2}}, \frac{-at}{(a^2+t^2)^{3/2}}\right) \\ &= \kappa\nu N \\ &= \kappa\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{a}N,\end{aligned}$$

取其长度得

$$|T'| = \frac{a}{a^2+t^2} = \kappa\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{a}.$$

因此$\kappa=a^2/(a^2+t^2)^{3/2}$，将其代入 T'的表达式，得 $N=(a/\sqrt{a^2+t^2},\ -t/\sqrt{a^2+t^2})$. 最后渐屈线的方程为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) \\ &= \left(\frac{t^2}{2a}, t\right) + \frac{(a^2+t^2)^{3/2}}{a^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}}, \frac{-t}{\sqrt{a^2+t^2}}\right) \\ &= \left(\frac{2a^2+3t^2}{2a}, -\frac{t^3}{a^2}\right).\end{aligned}$$

练习 1.4.13 证明$\mathcal{E}(t)$的 x，y 坐标满足关系式

$$27ay^2 = 8(x-a)^3.$$

35

这条曲线就是著名的尼尔(Neil)抛物曲线(如图 1-20 所示).

练习 1.4.14 证明椭圆 $\alpha(t)=(a\cos t, b\sin t)$ 的渐屈线是星形线

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t, \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t\right).$$

练习 1.4.15 证明悬链线 $\alpha(t)=(t, \cosh t)$ 的渐屈线的参数方程是 $(t-\cosh t\sinh t, 2\cosh t)$.

练习 1.4.16 证明星形线 $\alpha(t)=(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ 的渐屈线是一个扩展的且经过旋转得到的不同相的星形线. 提示: 计算渐屈线后, 取星形线 $(2a\cos^3 t, 2a\sin^3 t)$, 根据图

36 形大致的估计旋转, 令 $t=\bar{t}-\pi/4$.

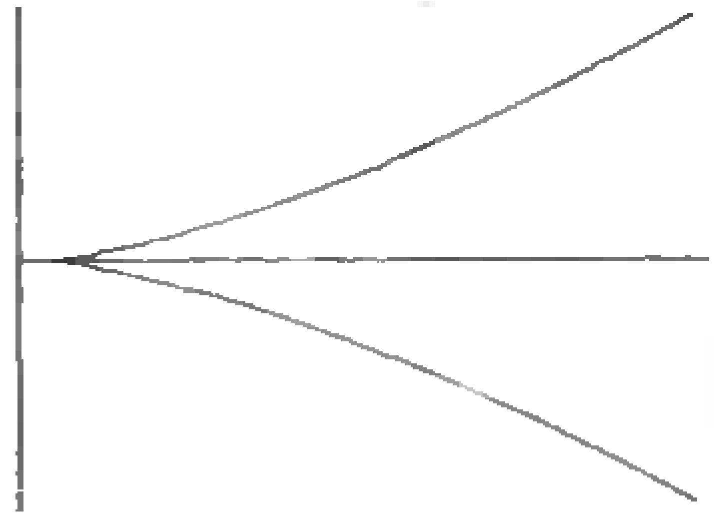


图 1-20 尼尔抛物线

1.5 曲率和挠率的一些结论

前面我们已经利用 Frenet 公式探究曲线的几何信息. 作为更复杂的例子, 考虑一类叫做柱形螺线(cylindrical helices)的曲线. 为了理解这些曲线的定义, 先考虑标准螺线 $\alpha(s)=\left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right)$, 其中 $c=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$, $T=\alpha'(s)=\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right)$. 注意它的第三个坐标为常数, 故 $T\cdot e_3=\frac{b}{c}$(其中 $e_3=(0, 0, 1)$), 因而 $\cos\theta=\frac{b}{c}$, 即 T 和 e_3 间的夹角总是不变.

归纳这个性质就可以得到柱形螺线(cylindrical helix)的定义. 称一条单位速度曲线 α 是柱形螺线, 如果存在固定的单位向量 u 在曲线上使得 $T\cdot u=\cos\theta$ 为定值. 实际上, θ 可以描述为在 T-B 平面内 T 转动到 u 的角度. 其中转动起始朝向 B, 经过 T, B 间的直角, 向量 u 的方向就是螺线的轴(axis). 判断一条曲线为柱面螺线只需要它的挠率、曲率满足一个简单的关系式.

定理 1.5.1 *假设 α 满足 $\kappa>0$, 则 α 为柱面螺线当且仅当 τ/κ 为常数.*

证明 不失一般性, 假设 α 有单位速度. 再设存在单位向量 u 使得 $T\cdot u=\cos\theta$ 是定值, 则 $0=(T\cdot u)'=T'\cdot u=\kappa N\cdot u$, 因为 $\kappa>0$, 故 $N\cdot u=0$. u 与 N 垂直, 所以

$$\begin{aligned} u &= (u\cdot T)T+(u\cdot B)B \\ &= \cos\theta T+\sin\theta B. \end{aligned}$$

图 1-21 表示了 B 的系数. 又 u 是常量, 故 $u'=0$. 因此

$$\begin{aligned} 0 &= \cos\theta T'+\sin\theta B' \\ &= \kappa\cos\theta N-\tau\sin\theta N \\ &= (\kappa\cos\theta-\tau\sin\theta)N. \end{aligned}$$

即 $\kappa\cos\theta-\tau\sin\theta=0$, $\cot\theta=\tau/\kappa$. 因为 θ 为常量, 故 τ/κ 为常量.

现假设 τ/κ 为常量, 因为余切函数的值域是整个数轴, 所以可以选取 θ 使得 $\cot\theta=\tau/\kappa$. 定义 $u=\cos\theta T+\sin\theta B$, 则

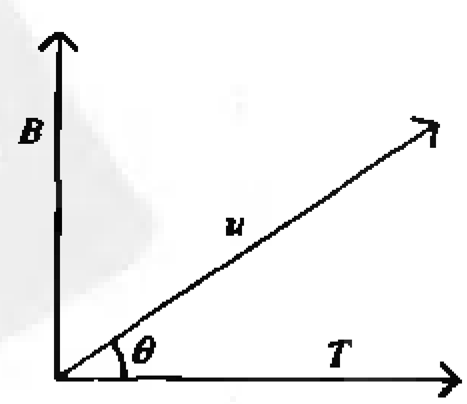


图 1-21

$$u' = (\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta)N = 0.$$

所以 u 是常向量，显然，$T \cdot u = \cos\theta$ 也是常量，故 α 为柱面螺线. ■

为了得到更好的柱面螺线的图像，可以把螺线投影到由起点 $\beta(0)$ 和固定向量(法向量)u 所决定的平面上，如图 1-22 所示.

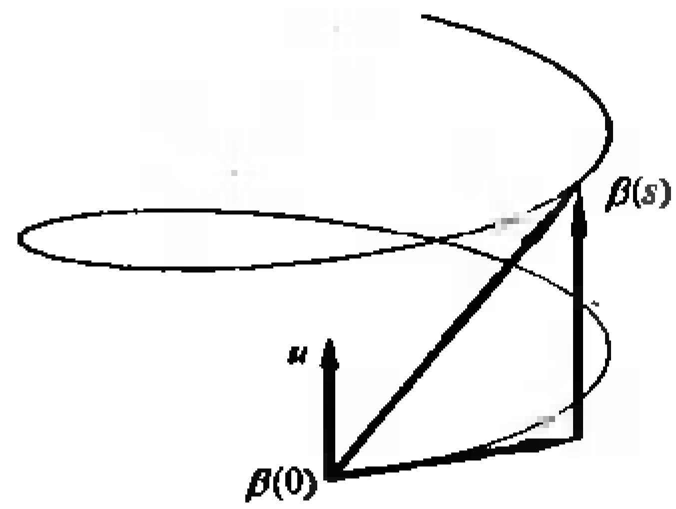


图 1-22

为此，从 $\beta(s)$ 减去 $\beta(s)-\beta(0)$ 的 u 分量，而 u 分量的长度为

$$h(s) = (\beta(s) - \beta(0)) \cdot u.$$

若 $\beta(s)$ 为柱面螺线，这一项究竟是什么呢？对上述式子作微分运算，得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = \beta' \cdot u = T \cdot u = \cos\theta,$$

为常量. 对上式积分，可得 $h(s) = s\cos\theta + C$，而 $h(0) = 0 = 0 + C$，则 $C = 0$，最终得到 $h(s) = s\cos\theta$. 因而柱面螺线 $\beta(s)$ 在经过 $\beta(0)$ 且垂直于 u 的平面内的投影为 37~38

$$\gamma(s) = \beta(s) - h(s)u,$$

其中 $h(s) = s\cos\theta$. 注意，γ 的参数方程不一定是单位速度的参数方程.

练习 1.5.2 证明 $\kappa_\gamma = \kappa_\beta / \sin^2\theta$，其中 κ_β 是 β 的曲率.

练习 1.5.3 当柱面螺线 β 的投影 γ 为圆时，则 β 称为圆形螺线(circular helix). 证明 β 为圆形螺线当且仅当 τ、κ 为常量.

练习 1.5.4 对于练习 1.3.11 中的曲线

$$\beta(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right),$$

我们能得出什么结论？

练习 1.5.5 曲线 $\beta(t) = (t + \sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t - \sin t)$ 是什么曲线？

练习 1.5.6 证明 $\beta(t) = (at, bt^2, t^3)$ 为柱面螺线当且仅当 $4b^4 = 9a^2$，并求向量 u，使得 $T = \beta'/|\beta'|$，$T \cdot u$ 是常量.

练习 1.5.7 令 $\beta(s)$ 为一条曲线，且对任意的 s，$N(s)$ 都垂直于某个固定向量 u，证明 $\beta(s)$ 为柱面螺线. 反之，证明对任意螺线，法向量 $N(s)$ 垂直于螺线的轴 u.

练习 1.5.8 证明对任意螺线，达布向量 ω 平行于螺线的轴 u(见练习 1.3.12).

练习 1.5.9 定义曲线 $\beta(s) = \int_0^s B_\alpha(t)\mathrm{d}t$，其中 $\alpha(t)$ 为单位速度曲线，且 $\tau_\alpha > 0$. 证明 $\kappa_\beta = \tau_\alpha$，$\tau_\beta = \kappa_\alpha$，$T_\beta = B_\alpha$，$N_\beta = -N_\alpha$，$B_\beta = T_\alpha$. 若 $\alpha(t)$ 为圆形螺线，β 亦为圆形螺线.

练习 1.5.10 证明平面曲线 $\beta(s)$ 的空间渐屈线 $\mathcal{E}(s)$ 为柱面螺线. 提示：将 $\mathcal{E}(s)$ 化为单位速度，由定义 $\mathcal{E}(s)$ 的渐伸线为 $\beta(s)$. 计算 β 的挠率，因为 β 为平面曲线，其挠率为 0. 这给出了 $\mathcal{E}$ 的微分满足的条件，再对 $\mathcal{E}$ 应用 Frenet 公式.

定理 1.5.1 向我们展示了如何在某一量上加以限制，从而确定曲线的类型. 例如 τ/κ 满足一定的条件，可以确定一类曲线. 在定理 1.5.1 的基础上，作进一步研究，要求 τ/κ 是弧长函 39

数 s 的线性函数. 由定理 1.3.20，平面内的曲线满足 $\tau=0$，还有另一种描述的方式是，当 $\tau(s)=0$ 时，具有单位速度的曲线 $\alpha(s)$ 位于由 $T(s)$，$N(s)$ 张成的平面中. 平面 $(T(s), N(s))$ 就是先前提及的密切平面(见练习 1.3.28). 另一方面，由练习 1.3.23，如果单位速度曲线 $\alpha(s)$ 是球面曲线，对任意点 p，$\alpha(s)-p$ 在平面 $(N(s), B(s))$ 上. 显然它在 Frenet 标架 $\{T(s), B(s)\}$ 中有不同的组合. 我们称单位速度曲线 $\alpha(s)$ 是伸长的(rectifying)，如果对某个固定的点 p，$\alpha(s)-p$ 在平面 $(T(s), B(s))$ 内. 有下列定理.

定理 1.5.11 ([Che03]) *$\kappa>0$ 的单位速度曲线 $\alpha(s)$ 是伸长的当且仅当*

$$\frac{\tau}{\kappa}=as+b,$$

其中 a，b 为常量，且 $a\neq 0$.

证明 设 $\alpha(s)$ 是伸长的，则存在函数 $\lambda(s)$，$\mu(s)$ 使得 $\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)B(s)$. 则

$$\begin{aligned}\alpha'(s)&=\lambda'T+\lambda T'+\mu'B+\mu B'\\&=\lambda'T+\lambda\kappa N+\mu'B-\mu\tau N\\T&=\lambda'T+(\lambda\kappa-\mu\tau)N+\mu'B,\end{aligned}$$

而 T，N，B 构成一组基(对任意的 s)，所以

$$\lambda'=1,\quad \lambda\kappa-\mu\tau=0,\quad \mu'=0.$$

积分，得

$$\lambda(s)=s+\kappa,\quad \frac{\tau}{\kappa}=\frac{\lambda}{\mu},\quad \mu=c.$$

由以上等式可得 $\tau/\kappa=as+b$，其中 $a=1/c$，$b=k/c$.

现在假定已知 $\tau/\kappa=as+b=(s+k)/c$，其中 $c=1/a$，$k=b/a$. 因此 $c\tau=(s+k)\kappa$，考虑以下微分：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\alpha(s)-(s+\kappa)T(s)-cB(s))&=T-T-(s+\kappa)T'-cB'\\&=-(s+\kappa)\kappa N+c\tau N\\&=(-(s+\kappa)\kappa+c\tau)N\\&=0.\end{aligned}$$

因此，$\alpha(s)-(s+k)T(s)-cB(s)$ 就是常量 p. 重新整理得出 $\alpha(s)-p=(s+k)T(s)+cB(s)$，这
40 就证明了 $\alpha(s)-p$ 在平面 $(T(s), B(s))$ 内. ■

注记 1.5.12 实际上[Che03]已证明 $\alpha(s)$ 是伸长的当且仅当它的参数方程可写为 $\alpha(t)=a\sec t\beta(t)$，其中 $\beta(t)$ 是单位球 S^2 上的单位速度曲线且 $a>0$.

曲率和挠率或独立或联合能够描述曲线的许多几何性质. 具体地说，如果两条单位速度曲线有相同的曲率和挠率，则存在 $\mathbb{R}^3$ 中的一个刚性运动，将其中一条映为另一条. 或者给定曲率和挠率一定存在曲线与之对应. 这一结果在本质上是微分方程解的存在唯一性定理. 由 Frenet 公式确定了方程组，而它的唯一解就是所要的曲线. 在此不给出具体的证明，只通过下面的练习简述部分证明.

练习 1.5.13 证明曲率为已知函数 $\kappa(s)$ 的平面曲线 $\beta(s)$ 可以表示为

$$\beta(s)=\left(\int_0^s \cos\theta(u)\mathrm{d}u,\int_0^s \sin\theta(u)\mathrm{d}u\right),$$

其中 $\theta(u)=\int_0^u \kappa(t)\,\mathrm{d}t$. 提示：运用微积分基本定理，验证其具有单位速度，然后计算 T'_β.

练习 1.5.14 求有单位速度的平面曲线 $\alpha(s)$，其中 $\kappa_\alpha(s)=2s$，$\alpha(0)=(0, 0)$. 这样的曲线称为欧拉螺旋线(Euler spiral)或者卡牛螺线(spiral of Cornu)，使用 Maple 程序“recreate”画出此曲线. 由例 7.6.2 知此曲线是一个变分问题的解.

练习 1.5.15 求有单位速度的平面曲线 $\alpha(s)$，其中 $\kappa_\alpha(s)=1/(1+s^2)$，$\alpha(0)=(0, 0)$.

练习 1.5.16 求有单位速度的平面曲线 $\alpha(s)$，其中 $\kappa_\alpha(s)=1/s$，$\alpha(1)=(3, -2)$.

练习 1.5.17(空间曲线基本定理) 证明若两条单位速度曲线 $\alpha(s)$，$\beta(s)$满足对任意的 s，$\kappa_\alpha(s)=\kappa_\beta(s)$，$\tau_\alpha(s)=\tau_\beta(s)$，则存在 3 维空间中的刚性运动(即平移、转动与反射变换的复合)把 $\alpha(s)$变成 $\beta(s)$. 曲率和挠率决定空间曲线的特性，是微分几何基本结果之一. 提示：

(1)将 $\beta(0)$平移到 $\alpha(0)$.

(2)旋转，如有必要再反射 β 在 $\beta(0)=\alpha(0)$处的 Frenet 标架，使其成为 α 的 Frenet 标架. 41

(3)证明对任意的 s，现在的 Frenet 标架已完全相同，考虑衡量 Frenet 标架偏差的函数

$$\mathcal{D}(s)=T_\alpha(s)\cdot T_\beta(s)+N_\alpha(s)\cdot N_\beta(s)+B_\alpha(s)\cdot B_\beta(s),$$

证明$\mathcal{D}(0)=3$，且对任意的 s，$\mathcal{D}(s)\leqslant 3$，以及$\mathcal{D}(s_0)=3$ 仅当在 s_0 处的标架相同.

(4)利用 Frenet 方程，通过计算$\mathcal{D}'=0$，证明$\mathcal{D}$为常量. 因此，对任意的 s，$\mathcal{D}(s)=3$.

(5)此时，$\alpha'(s)=\beta'(s)$. 积分，并利用初始条件证明 $\alpha(s)=\beta(s)$，这就证明了原先的变换(旋转、反射)将 $\beta(s)$转化成 $\alpha(s)$.

1.6 格林定理及等周不等式

闭曲线在几何问题和数学应用中有特殊的意义. 曲线 α：$[a, b]\to\mathbb{R}^2$ 是闭的，如果$\alpha(a)=\alpha(b)$，且对于任意的 $n>0$，$\alpha^{(n)}(a)=\alpha^{(n)}(b)$，其中 $\alpha^{(n)}$表示 n 重导数. 在实际应用中，闭曲线常用来表示物理系统的周期性轨道运动. 因为具有周期性，所以可以仅仅分析一个周期进而了解系统的运动状况. 几何上，闭曲线及其内部区域的联系是很重要的，高斯-博内定理就是一个例子. 本节描述平面闭合曲线和内部区域的最基本的联系，这一联系称为*等周不等式*. 它描述了平面简单闭曲线的弧长及它围成的区域面积之间的关系. (所谓简单曲线是指没有自交点的曲线).

定理 1.6.1(等周不等式) *在所有有固定长度的平面简单闭曲线中，圆围出的面积最大. 特别地，若 C 是周长为 L 的简单闭曲线，围成的面积为 A，则*

$$L^2\geqslant 4\pi A,$$

等号成立仅当曲线为圆时.

本节提供的等周不等式的证明是 E. Schmidt 给出的，我们将延续[Che67]中的工作，同时和例 7.6.9 中有关变分法的证明做个比较. 证明之前，回忆双变量积分的一个基本结论.

定理 1.6.2(格林定理) *$P(x, y)$，$Q(x, y)$是定义在平面单连通区域$\mathcal{R}$(即一个无孔区域)上的双变量的实值(光滑)函数，则*

42

$$\iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int_C Pdy-Qdx,$$

其中，右边是沿区域$\mathcal{R}$边界 C 的(逆时针)线积分.

注记 1.6.3 注意格林定理可以写成不同形式，以下是它的一个等价形式：

$$\iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_C Pdx+Qdy.$$

本书其他地方，将根据不同问题利用格林定理的不同形式.

例 1.6.4(格林定理和面积) 设闭曲线 C 围成的区域为$\mathcal{R}$. 取 $P=x/2$, $Q=y/2$，由格林定理，得

$$\mathcal{R}\text{的面积}=\iint_{\mathcal{R}}dxdy=\iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dxdy=\frac{1}{2}\int_C xdy-ydx.$$

因此，闭曲线围成的面积可以表示成某个线积分. 当然，这一线积分的计算可以利用曲线的参数方程$\beta(t)=(x(t),\ y(t))$，$a\leqslant t\leqslant b$. 取$\frac{1}{2}\int_C xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t)-y(t)x'(t))dt$. 相同的讨论可得到以下等式：$\mathcal{R}$的面积 $=\int_C xdy=\int_C -ydx$.

定理 1.6.1 的证明 设曲线 C 的参数方程为$\alpha(s)=(x(s),\ y(s))$，$0\leqslant s\leqslant L$. 不失一般性，假设它为单位速度的曲线参数方程. 因为 C 是闭合曲线，所以可以将它放在两条平行线间. 给定图定向使得直线 m, n 是竖直的且它们与 C 分别在 $P=\alpha(0)$, $Q=\alpha(s_0)$处相切(如图 1-23 所示). 同时在两直线间放一个对照圆 K，圆的半径 r 等于两平行线间距离的一半. 利用 α 的横坐标及纵坐标与之满足圆的关系，对圆重新参数化，圆的参数方程为$\beta(s)=(\beta_1(s),\ \beta_1(s))$，其中 $\beta_1(s)=x(s)$，且

$$\beta_2(s)=\begin{cases}-\sqrt{r^2-x(s)^2} & 0\leqslant s\leqslant s_0\\ +\sqrt{r^2-x(s)^2} & s_0\leqslant s\leqslant L\end{cases}.$$

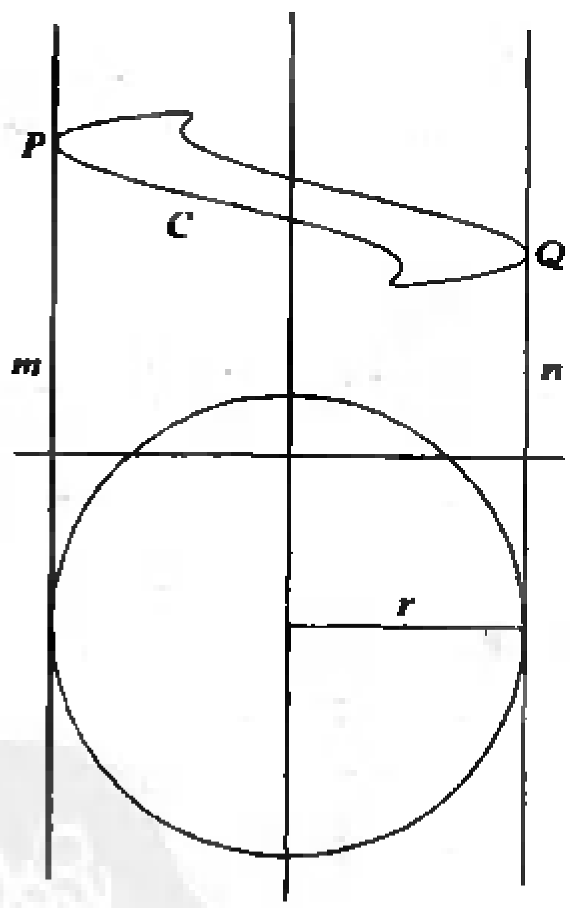


图 1-23 闭曲线和对照圆

注意$\beta(0)=\beta(L)$，应用格林定理计算 C 围成的面积 $A_C=\int_C xdy=\int_0^L x(s)y'(s)ds$. 对此圆有 $\pi r^2=A_K=\int_K -\beta_2(s)dx=\int_0^L -\beta_2(s)x'(s)ds$. 两式相加得

$$\begin{aligned}A_C+\pi r^2&=\int_0^L(xy'-\beta_2x')ds\\&\leqslant\int_0^L|xy'-\beta_2x'|\,ds\\&=\int_0^L\sqrt{(xy'-\beta_2x')^2}ds\\&=\int_0^L\sqrt{x^2y'^2-2xy'\beta_2x'+\beta_2^2x'^2}ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^L \sqrt{(x^2+\beta_2^2)(x'^2+y'^2)}\,\mathrm{d}s \qquad \text{因为}(xx'+\beta_2 y')^2 \geqslant 0\\
&= \int_0^L \sqrt{x^2+\beta_2^2}\,\mathrm{d}s \qquad \text{因为 } \alpha \text{ 是单位速度}\\
&= \int_0^L |\beta(s)|\,\mathrm{d}s\\
&= \int_0^L r\,\mathrm{d}s \qquad \text{因为 } \beta(s)=(x(s),\sqrt{r^2-x(s)^2})\\
&= rL.
\end{aligned}$$

由通常的算术几何不等式，有$\sqrt{A_C\pi r^2}\leqslant(A_C+\pi r^2)/2$，故

$$\sqrt{A_C\pi r^2}\leqslant\frac{rL}{2}$$

$$A_C\pi r^2\leqslant\frac{r^2L^2}{4}$$

$$4\pi A_C\leqslant L^2.$$

这就是等周不等式．当然，我们还要考虑等号成立的情形．假设 $4\pi A_C=L^2$，往回推算，所有的不等式都成为等式．特别地，等式

$$\sqrt{A_C\pi r^2}=\frac{A_C+\pi r^2}{2}=\frac{rL}{2}$$

说明 $A_C=\pi\cdot r^2$，即 $L=2\pi\cdot r$．而且因为上述积分相等且被积函数都为正，必有

$$((x,\beta_2)\cdot(y',-x'))^2=(xy'-\beta_2x')^2=r^2$$

其中的运算是点积．又 $|(x,\beta_2)|=r$，$|(y',-x')|=1$，$(x,\beta_2)\cdot(y',-x')=|(x,\beta_2)||(y',-x')|\cos\theta$，故 $\cos\theta=1$．所以 $\theta=0$ 且(x,β_2)和$(y',-x')$方向相同或相反．考虑向量的长度可得$(x,\beta_2)=\pm r(y',-x')$．故 $x=\pm ry'$，$\beta_2=\mp rx'$．利用 $\beta_2=\sqrt{r^2-x^2}$，由第二个方程，得

$$\int\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{r}\mathrm{d}s$$

$$\int\mathrm{d}\theta=\frac{s}{r}+d \qquad \text{利用 } x=r\sin\theta$$

$$\theta=\frac{s}{r}+d$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{s}{r}+d$$

$$x(s)=r\sin\left(\frac{s}{r}+d\right).$$

因为 $x'(s)=\cos(s/r+d)$，$x'^2+y'^2=1$，可以解得 $y(s)=\mp r\cos(s/r+d)$．不考虑符号，C 的参数方程是一个半径为 r 的圆：

$$\alpha(s)=\left(r\sin\left(\frac{s}{r}+d\right),r\cos\left(\frac{s}{r}+d\right)\right).$$ ■

1.7 几何曲线与 Maple

在微分几何中，计算机代数系统为计算和可视化提供了有效的工具．它的应用范围从弧长积分这样简单的数值计算到表面网格图这样的复杂绘图，无所不及．总之，用计算机解决问题是很普通的事情．因此，在本节及与计算机有关章节中，(曾经是第一个)我会给出个人版本的计算机与几何，当然并不是说这一方法就是最理想的．事实上，相信很多读者会有更好的解决问题的方法．只不过我认为将计算机代数系统引入几何是很有意义的一件事．本书中之所以使用 Maple 8(以后就记为 Maple)是因为我觉得这一系统学起来最简单．如今市场上有一些 Maple 的介绍，我会参考它的一些命令和程序包(见[Red93])．至于使用 Mathematica 处理几何问题的方法，读者可参考[Gra93]．

在开始使用 Maple 之前，需要调用基本的程序包才能进入 Maple 编译环境中，它由以下命令实现：

```
> with(plots):with(LinearAlgebra):
```

这样就可以使用一些专门画图和线性代数的计算工具．而处理几何中的向量所需要用到的大部分命令也可以通过输入以下命令加进去(行向量各元素间输入竖线，列向量各元素间输入逗号)．

```
> A:=<a|b|c>; B:=<d|e|f>;
```

$$A := [a,b,c]$$
$$B := [d,e,f]$$

线性代数运算中最有用的就是点积与叉积．叉积很简单，Maple 在处理点积时稍微麻烦些．DotProduct 命令被看成是埃尔米特内积，所以要得到$\mathbb{R}^n$ 中的点积，必须声明“conjugate = false”．

```
> DotProduct(A,B,conjugate=false);
```

$$da + eb + fc$$

```
> CrossProduct(A,B);
```

46 $$[bf - ce, cd - af, ae - bd]$$

Maple 不只对命令行打包，对程序也是如此．本书将一直称 Maple 程序为“程序”，而且会给出微分几何中几乎所有的标准计算．例如下述程序就是用来计算 1.4 节非单位速度曲线的曲率、挠率．假定曲线的参数方程给定了三个坐标，其中每个坐标都是变量 t 的函数．如果它是 xy 平面上的平面曲线，则取第三个坐标为 0．注意，在“proc()”后面出现了“local”，这是告诉 Maple，“local”后面出现的变量仅在该程序段内有意义(通常对即时计算有效)．所以即使它们事先没有定义，也可以在程序段中使用 local 变量；同时，注意命令“Norm”．标准的 Maple 范数是复的∞范数．为得到通常意义下的范数，需要加上说明“Euclidean，conjugate=false”．

```
> curv:=proc(alpha)
local alphap,alphapp;
alphap:=map(diff,alpha,t);
alphapp:=map(diff,alphap,t);
simplify(Norm(CrossProduct(alphap,alphapp),Euclidean,
conjugate=false)/Norm(alphap,Euclidean,conjugate=false)^3,
symbolic);
end:
> tor:= proc(alpha)
local alphap,alphapp,alphappp;
alphap:=map(diff,alpha,t);
alphapp:=map(diff,alphap,t);
alphappp:=map(diff,alphapp,t);
simplify(DotProduct(CrossProduct(alphap,alphapp),alphappp,
conjugate=false)/Norm(CrossProduct(alphap,alphapp),
Euclidean,conjugate=false)^2,symbolic);
end:
```

在上面两个程序中，Maple 使用了命令 map(diff, alpha, t)表示逐个对参数曲线"alpha"的各个坐标函数作微分运算. "map"命令在很多情况下都用来计算多个坐标. 下面以螺线为例加以说明.

```
> hel:=<a*cos(t)|a*sin(t)|b*t>;
```

$$hel := [a\cos(t), a\sin(t), bt]$$

```
> curv(hel);
```

$$\frac{a}{b^2+a^2}$$

47

```
> tor(hel);
```

$$\frac{b}{b^2+a^2}$$

在估计特殊螺线的曲率和挠率时，不必重新定义整条曲线. 命令"subs"给出一个广义的定义如下：

```
> hel1:=subs({a=4,b=2},hel);
```

$$hel1 := [4\cos(t), 4\sin(t), 2t]$$

可用命令"spacecurve"绘出$\mathbb{R}^3$ 中的螺线图，如图 1-24 所示. 注意选项"orientation"是用来给出参数为球面坐标 θ 和 ϕ 的曲线的定向.

```
> spacecurve(convert(hel1,list),t=0..5*Pi, scaling=
constrained,color=black,axes=framed,orientation=[40,77],
tickmarks=[3,3,3]);
```

有时用环绕空间曲线的管道代替曲线绘图更加方便，这可由命令"tubeplot"实现，如图 1-25 所示. 选项"shading"和"lightmodel"允许使用预设的光照效果进行 3d 绘图(例如可分别取"XY"和"light3"). "style"选项，可以获得隐藏的或标明的网格框，例如这里的"patchnogrid"就可以

画出立体的表面网格线，默认类型为“patch”.

```
> tubeplot(convert(bel1,list),t=0..5*Pi, radius=1.2,scaling
=constrained,shading=XY,lightmodel=light3,style=
patchnogrid,axes=framed,orientation=[40,77]);
```

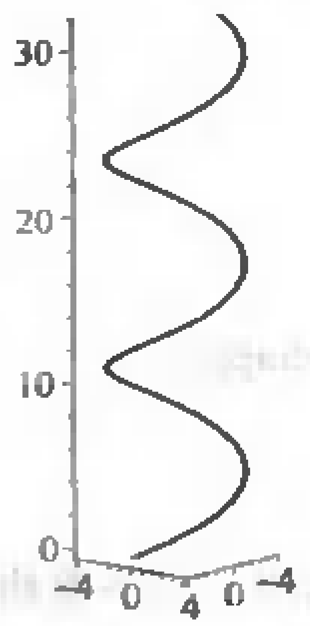


图 1-24 螺线

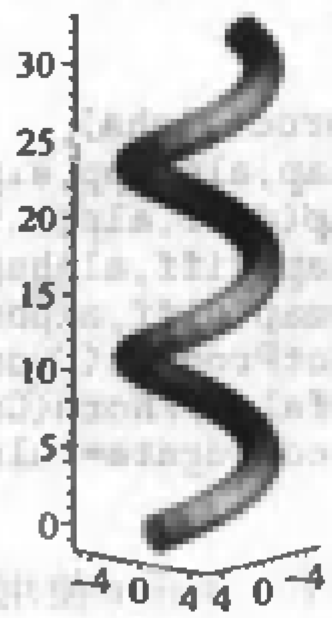


图 1-25 螺旋管

这里 *hel*1 画出了 t 从 0 到 5π 的图形，也可以用选项控制 t 的定义域，从而获得特定范围内的图，例如“scaling＝constrained”就是在每个方向轴上取等距离刻度.

练习 1.7.1 使用选项“scaling＝unconstrained”，“thickness＝1”和“color＝blue”画螺线图. 要得到其他选项，键入 ? plot3d[options]. 命令“spacecurve”是 Maple 的“plot3d”命令的一种曲线版本，在绘制曲面时，将多次使用.

要绘制平面曲线，可以使用“plot”命令. 以箕舌线为例. 从空间曲线到平面曲线通常有一些麻烦. 例如，曲率计算程序是以有三个坐标的曲线为基础，使用这个公式计算平面曲线，就需要人为的将第三个坐标设为 0. 同样，用 Maple 的“plot”命令画平面曲线，只需两个坐标. 给箕舌曲线一个形式上的第三坐标，就可以避免这些麻烦.

```
> witch:=<2*tan(t)|2*cos(t)^2|0>;
```

$$witch := [2\tan(t), 2\cos^2(t), 0]$$

```
> curv(witch);
```

$$-\frac{(4\cos^2(t)-3)\cos^4(t)}{(-4\cos^6(t)-1+4\cos^8(t))\sqrt{4\cos^6(t)+1-4\cos^8(t)}}$$

48 ~ 49 总之，不能像“spacecurve”一样写成“plot(witch，…)”. 有两个原因. 第一，这里用了三个坐标，Maple 的“plot”无法执行；其次，即使用两个坐标定义箕舌线，Maple 的“plot”命令不允许输入这种形式的语法“plot(witch，t＝−1.3..1.3)；”，而必须写成(以下形式)

```
> plot([2*tan(t),2*cos(t)^2,t=-1.3..1.3], scaling=constrained,
axes=framed,color=red);
```

也可用以下程序绘制图 1-26.

```
> plot([witch[1],witch[2],t=-1.3..1.3], scaling=constrained,
axes=framed,color=red);
```

注意，不同于“spacecurve”，必须用方括号将参数 $t=\cdots$ 括起来.

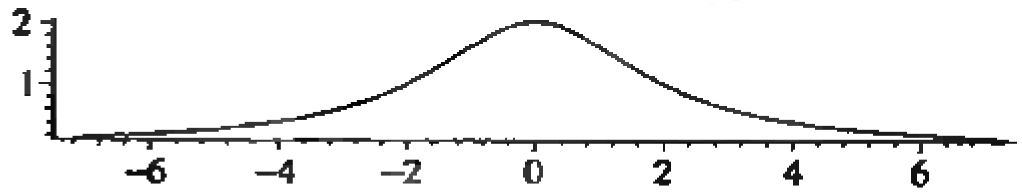


图 1-26 Agnesi 的箕舌线

练习 1.7.2 利用下面的参数方程绘制双纽线 $r^2=a^2\cos(2\theta)$（取定 a 以后）：

$$\alpha(t)=(a(\cos t)\sqrt{\cos(2t)},a(\sin t)\sqrt{\cos(2t)}).$$

参考 Maple 的 help 功能，了解如何使用极坐标画图.

我们还可以使用 Maple 程序绘制更复杂的曲线. 例如下面的第二段程序就是根据输入的曲线类型，输出它的渐开线. 第一段程序给出了曲线从 0 到 t 的弧长.

```
> arc:=proc(alpha)
local alphap;
alphap:=map(diff,subs(t=u,alpha),u);
simplify(int(Norm(alphap,Euclidean,conjugate=false),u=0..t),
symbolic);
end:
```

注意，这段程序要求“alpha”是以 t 为参数的，且在第一步 t 由伪变量“u”代替. 最后，积分在“u”的意义下的切向量的长度(即速度)，就得到用“t”表示的弧长. 这里有个例子，先定义一个单位圆的参数曲线，然后应用“arc”命令：

```
> circ:=<cos(t)|sin(t)|0>;
```

$$circ:=[\cos(t),\sin(t),0]$$ 50

```
> arc(circ);
```

$$t$$

这说明上述单位圆的参数是弧长参数. 利用弧长程序，可以写出简单的渐开线程序.

```
> involute:=proc(alpha)
local a;
a:=1/Norm(map(diff,alpha,t),Euclidean,conjugate=false)*
map(diff,alpha,t);
simplify(alpha-arc(alpha)*a,symbolic);
end:
```

例如，输入输出如下：

```
> involute(circ);
```

$$[\cos(t)+t\sin(t),\sin(t)-t\cos(t),0]$$

如果希望同时绘制圆和它的渐开线，可以分别为它们创建一个绘图结构，然后同时演示，

如图 1-27 所示.

```
> circplot:=spacecurve(convert(circ,list), t=0..2*Pi,
color=black):
> invplot:=spacecurve(convert(involute(circ), list),t=0..
2*Pi,color=black):
> display({circplot,invplot },scaling=constrained,axes=
framed,orientation=[-89,0]);
```

练习 1.7.3 证明螺线$(\cos t,\ \sin t,\ t)$的渐开线是平面曲线. 是什么样的平面曲线?

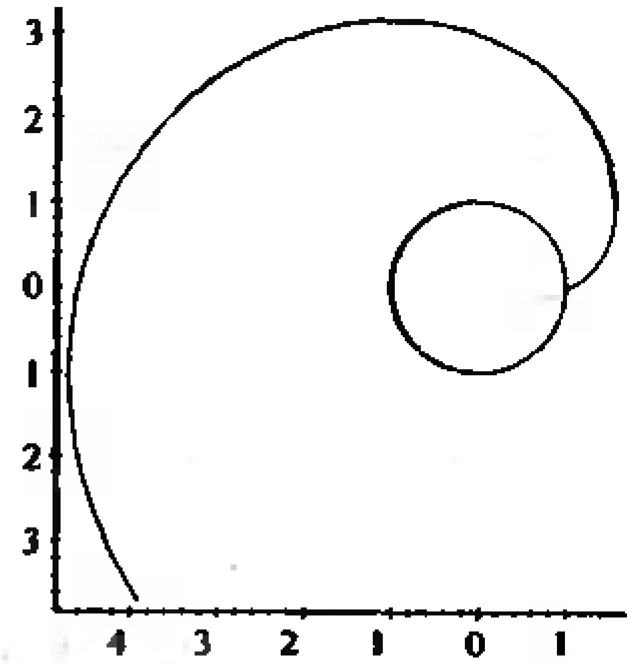


图 1-27 圆的渐开线

类似地，也可以编写求给定曲线的平面渐屈线的程序. 给定曲线 $\alpha(t)$，则其渐屈线是$\mathcal{E}(t)=\alpha(t)+1/\kappa(t)N(t)$，其中 N 是 α 的法向量.

练习 1.7.4 证明

$$\frac{1}{\kappa}N=\frac{|\alpha'|^2}{|\alpha'\times\alpha''|^2}(\alpha'\times\alpha'')\times\alpha'.$$

提示：利用非单位速度的 Frenet 公式.

练习的程序如下：

```
> evolute:=proc(alpha)
local alphap,alphapp,A,C;
alphap:=map(diff,alpha,t);
alphapp:=map(diff,alphap,t);
A:=Norm(alphap,Euclidean,conjugate=false)^2/
Norm(CrossProduct(alphap,alphapp),Euclidean,
conjugate=false)^2;
C:=CrossProduct(CrossProduct(alphap,alphapp),alphap);
simplify(alpha+A*C,symbolic);
end:
```

下列程序绘制椭圆的渐屈线.

```
> ellipse:=<a*cos(t)|b*sin(t)|0>;
```

$$ellipse := [a\cos(t),b\sin(t),0]$$

```
> evolute(ellipse);
```

$$\left[\frac{\cos^3(t)(-b^2+a^2)}{a},\frac{(-1+\cos^2(t))\sin(t)(-b^2+a^2)}{b},0\right]$$

注意，Maple 只化简了第一个坐标，而不是第二个. 事实上，虽然 Maple 不能够同时化简两个坐标，但我们可以将第二个坐标化简为

$$\frac{\sin^3(t)(b^2-a^2)}{b}.$$

51 ~ 52 由此可得，椭圆的渐屈线是星形线.

练习 1.7.5 证明悬链线$(t,\ \cosh(t))$的渐屈线为$(t-\cosh(t)\sinh(t),\ 2\cosh(t))$，并绘制这条曲线.

练习 1.7.6 通过求星形线($\cos^3(t)$, $\sin^3(t)$)的渐屈线做练习 1.4.16. 利用

```
> astr:=<cos(t)^3,sin(t)^3,0>;
```

$$astr := \begin{bmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

然后，利用下述指令，先取

```
> evastr:=evolute(astr);
```

$$evastr := \begin{bmatrix} -\cos(t)(2\cos^2(t)-3) \\ \sin(t)(2\cos^2(t)+1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

取星形线($2a\cos^3(t)$, $2a\sin^3(t)$)(作为列向量考虑)，左乘旋转矩阵

$$\begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix}$$

利用下面的程序把星形线的图形旋转 $\pi/4$ 角.

```
> R:=Matrix([[cos(Pi/4),-sin(Pi/4)], [sin(Pi/4),cos(Pi/4)]]);
```

$$R := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

```
> astr2:=subs(t=u-Pi/4,R.<2*astr[1], 2*astr[2]>);
```

$$astr2 := \begin{bmatrix} \sqrt{2}\sin^3\left(u+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos^3\left(u+\frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2}\sin^3\left(u+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\cos^3\left(u+\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

```
> factor(simplify(expand(astr2[1]),trig));
factor(simplify(expand(astr2[2]),trig));
```

$$-\cos(u)(2\cos^2(u)-3)$$

$$\sin(u)(2\cos^2(u)+1)$$ 53

最后，比照星形线的渐屈线的表达式和上述结果. 再使用“display”命令，在同一坐标平面上画出两个星形线，如图 1-28 所示.

```
> plot([[astr[1],astr[2],t=0..2*Pi], [evastr[1],evastr[2],
t=0..2*Pi]],scaling=constrained,color=black);
```

现在我们来回顾渐伸线和渐屈线的发现过程. 17 世纪，欧洲的航海国家开始了最早的世界性探险，问题就起源于这里. 当时，很容易确定纬度(例如用北极星)，但无法确定经度，这

也导致了许多著名的海难．最简单的寻找经度的方案是：先测出英格兰格林威治一年中每天太阳在何时达到最高点(称为子午点)，并记录这些信息(随船携带)；然后，带着表上船，将其设成格林威治时间．在海上用表观察太阳达到最高点(即当地的子午点)的时间，再比照记录好的信息．例如，某天格林威治的太阳最高点是在下午12：00，而在海上是格林威治时间下午1：00，则该船处于经格林威治距梅里第安西经15度的地方．(为什么等于15度?)这一方案的问题在于那时的钟表还靠摆动计时．对于轻摆，摆动周期不依赖振幅，但对于更大的摆就不一定正确——海上的摆动可能已不合要求．那么，怎样
54 才能使摆动周期真正不依赖振幅呢?

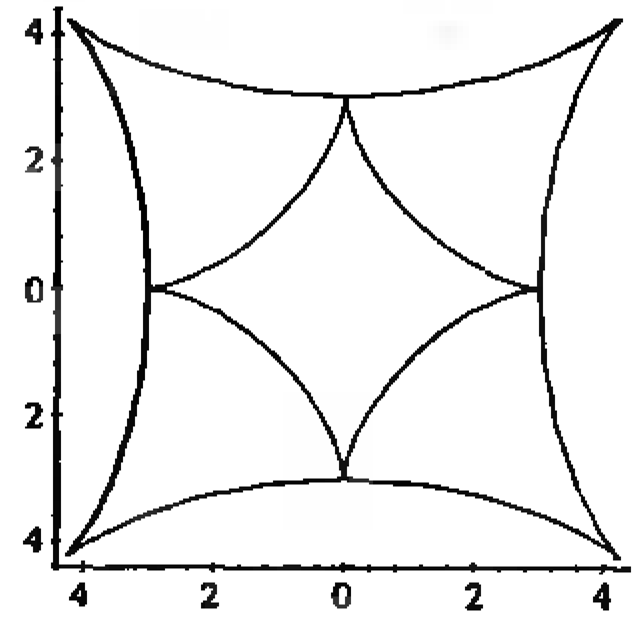


图 1-28　星形线和它的渐屈线

惠更斯(Christian Huygens)在1670年(左右)找到了答案．惠更斯了解到摆线具有等时性(见练习1.1.14)．所谓具有等时性的曲线，是指如果一个质点沿此曲线(无摩擦地)滑下，无论从曲线的哪里开始，总是花相等的时间到达底端．如果摆动一直符合摆线轨迹，那么它的周期就与振幅无关．然而，怎样使摆动符合摆线轨迹呢？在此之前，先观察一下摆线的渐伸线和渐屈线．例如观察如图1-29所示的摆线．

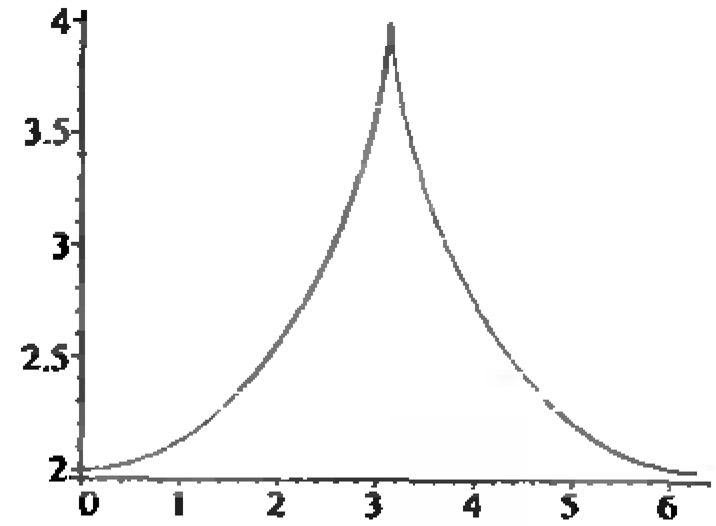


图 1-29　摆线

```
> cycloid:=<t+sin(t)|3-cos(t)>;
```

$$cycloid := [t+\sin(t), 3-\cos(t)]$$

```
> plot([t+sin(t), 3-cos(t),t=0..2*Pi]);
> cycplot:=plot([t+sin(t), 3-cos(t), t=0..2*Pi]):
```

现假想从上述摆线上释放一条线，线的一端固定在顶端的尖点上，线的另一端的运动轨迹显然就是摆线的渐伸线．

```
> cycinv:=involute(cycloid);
```

$$cycinv := \left[-\frac{-t\sqrt{2\cos(t)+2}-\sin(t)\sqrt{2\cos(t)+2}+4\sin\left(\frac{t}{2}\right)+4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(t)}{\sqrt{2\cos(t)+2}},\ -\frac{-3\sqrt{2\cos(t)+2}+\cos(t)\sqrt{2\cos(t)+2}+4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin(t)}{\sqrt{2\cos(t)+2}}\right]$$

55 读者可以自己动手验证(因为Maple的化简不是很到位)上述表达式给出另一条摆线．

```
> invcyc:=<t-sin(t)|1+cos(t)|0>;
```

$$invcyc := [t - \sin(t), 1 + \cos(t), 0]$$

然后绘制渐伸线和原始摆线.

```
> invcycplot:=plot([t-sin(t),1+cos(t), t=0..2*Pi],color
=blue):
> display({cycplot,invcycplot}, scaling=constrained);
```

图 1-30 说明，如果摆线自身是弹性的，且在摆线上无阻碍运动，那么摆的运动符合摆线轨迹. 为了设定界限，先选择一条轨迹(即特殊摆线)，使其成为要求摆线的渐伸线，然后取它的渐屈线. 例如，如果取上述轨迹的渐屈线，利用如下 Maple 程序：

```
> evolute(invcyc);
```

$$[t+\sin(t), 3-\cos(t), 0]$$

可得原始摆线. 可是，惠更斯的思想没有解决经度问题，对此详细的叙述请见[Sob95].

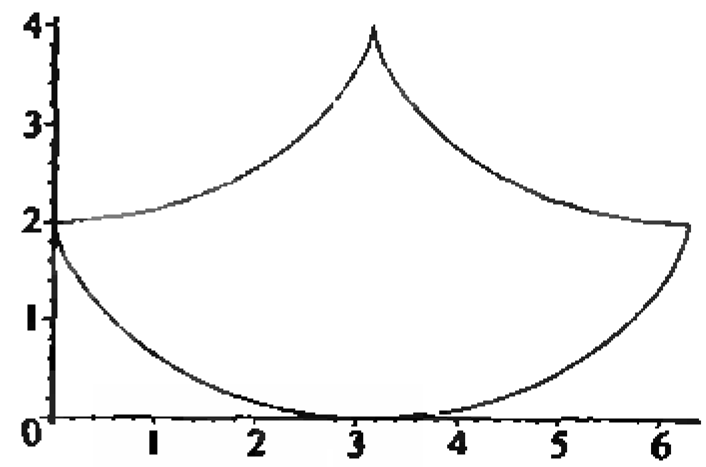


图 1-30 摆线与渐伸线

现在利用练习 1.5.13，根据曲率再创建一条平面曲线. 即使积分公式很难求出，依然可以这样绘制结果. 这个练习说明平面曲线 β 由其曲率确定如下：

$$\beta(s) = \left(\int_0^s \cos(\theta(u))\mathrm{d}u, \int_0^s \sin(\theta(u))\mathrm{d}u\right),$$

其中 $\theta(u) = \int_0^u \kappa(t)\mathrm{d}t$. 根据微积分基本定理，可以将积分转化成微分方程组，进而得到数值解，并绘制其图像. 方程组为 56

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \kappa(s), \quad \frac{\mathrm{d}\beta_1}{\mathrm{d}s} = \cos(\theta(s)), \quad \frac{\mathrm{d}\beta_1}{\mathrm{d}s} = \sin(\theta(s)).$$

结果为特定曲率的单位速度曲线. 作为第一个例子，取 $\kappa = s$. 在 Maple 中定义该方程组，再用 Maple 的微分方程组解答器求出数值解. 关于运算的细节，键入"? dsolve"即知.

```
> beta(s)=[Int(cos(theta(u)),u=0..s), Int(sin(theta(u)),
u=0..s)];
```

$$\beta(s) = \left[\int_0^s \cos(\theta(u))\mathrm{d}u, \int_0^s \sin(\theta(u))\mathrm{d}u\right]$$

```
> theta(u)=Int(kappa(t),t=0..u);
```

$$\theta(u) = \int_0^u \kappa(t)\mathrm{d}t$$

```
> sys:=diff(theta(s),s)=s, diff(x(s),s)= cos(theta(s)),
diff(y(s),s)=sin(theta(s));
```

$$sys := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\theta(s) = s, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x(s) = \cos(\theta(s)), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}y(s) = \sin(\theta(s))$$

```
> p:=dsolve({sys,theta(0)=0,x(0)=0, y(0)=0},{theta(s),
x(s),y(s)},type=numeric):
```

注意"dsolve"的数值选项要求方程组及初始条件．事实上，对特定的方程，"dsolve"将返回脱离方程组的独立形式的解．现在可以用 Maple 的"odeplot"命令画出数值解的图像，如图 1-31 所示．而"odeplot"是以"dsolve"给出的解和变量作为输入条件绘制图像．以绘制"[s，$x(s)$]"为例，这里想得到图形的空间描述．

```
> scurv:=odeplot(p,[x(s),y(s)],-5..5, numpoints=200):
> display(scurv,view=[-2..2,-2..2]);
```

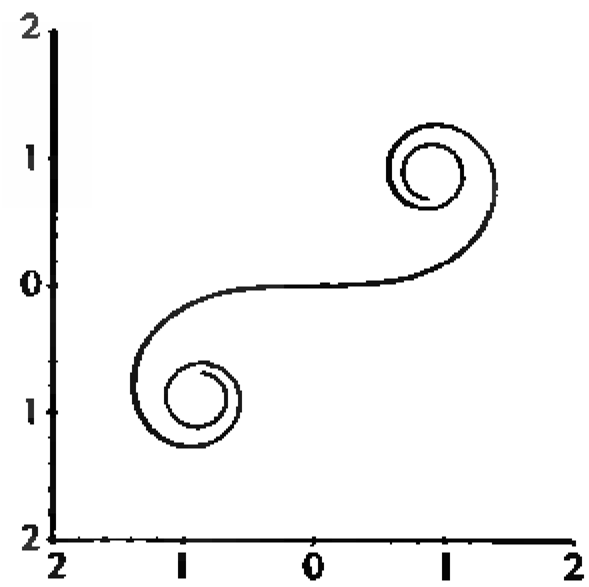


图 1-31　$\kappa(s)=s$ 的曲线

练习 1.7.7　给出具有单位数度的曲线，使它的曲率 $\kappa(s)=1/(1+s^2)$．它是什么样的曲线，能否证明？

现在编写程序，使得只要输入一个曲率，就可以输出该曲率对应的曲线．还需要输入关于曲线参数的范围及观察的区域．特别地，绘图选项"view=[c.. d，f.. g]"指示 Maple 只画出 x 轴上从 c 到 d、y 轴上从 f 到 g 的区域．输入 a 和 b 告诉"odeplot"参数"s"是怎样变化的．

```
> recreate:=proc(kap,a,b,c,d,f,g)
local sys,x,y,p,theta,pl;
sys:=diff(theta(s),s)=kap(s), diff(x(s),s)=cos(theta(s)),
diff(y(s),s)=sin(theta(s));
p:=dsolve({sys,theta(0)=0,x(0)=0,y(0)=0},{theta(s),x(s),
y(s)},type=numeric):
pl:=odeplot(p,[x(s),y(s)],a..b,numpoints=400,thickness=1,
axes=framed,color=red):
display(pl,view=[c..d,f..g],scaling=constrained);
end:
```

对于具体的曲率函数，给出参数（记为 t）并使用破折号和大于号构成的箭头符号→指向由 t 定义的公式．以下给出一些曲率函数的例子：

```
> kap1:=t->t;
```

$$kap1 := t \rightarrow t$$

```
> kap2:=t->t^2:
> kap3:=t->exp(t):
> kap4:=t->sin(t):
> kap5:=t->sin(t)*t:
> kap6:=t->sin(t)*t^2:
> kap7:=t->1/(1+t^2):
```

对其中一些例于曲率函数运行程序．第一个如图 1-32 所示．

```
> recreate(kap5,-8,8,-2,2,0,3);
> recreate(kap7,-10,10,-4,4,0,10);
```

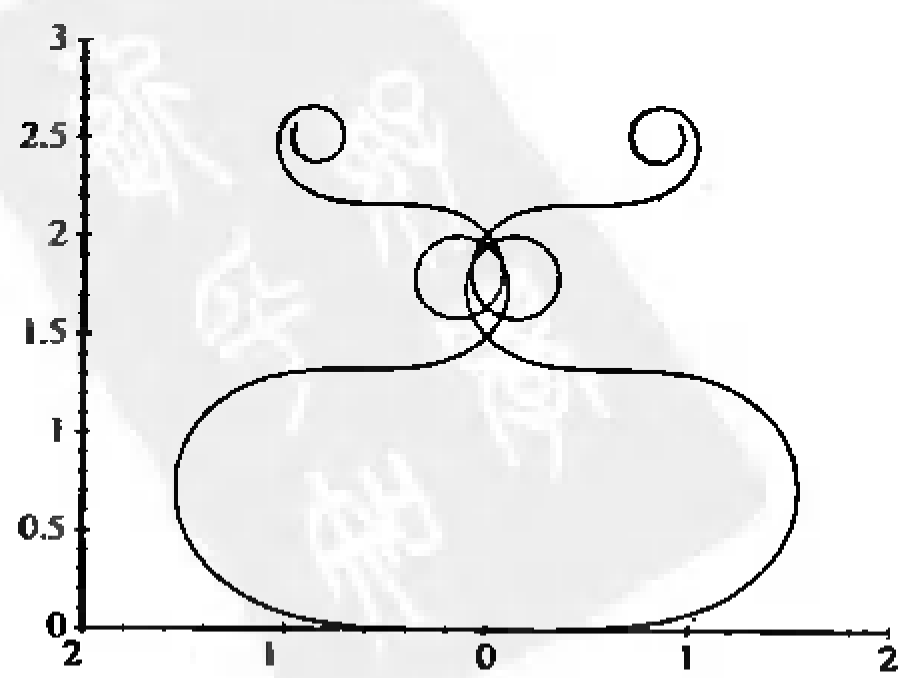


图 1-32　曲率 $\kappa(t)=t\sin t$ 的曲线

练习 1.7.8 求曲线，使得其曲率就是上面列举的曲率函数. 试做“recreate(1，−5，5，−1.5，1.5，0，2)”，得到什么样的曲线?

利用 Frenet(微分)方程组，可以根据曲率和挠率描述空间曲线. 这是前面空间曲线基本定理的一个启发式证明(练习 1.5.17)：在$\mathbb{R}^3$ 中，在刚性运动的意义下曲线由其曲率和挠率确定下面这段程序解了 9 个 Frenet 方程，以及定义了曲线的单位切向量的 3 个方程，而且还可以通过调节可视范围变换视角. 输入的“kap”和“ta”是要求的曲率和挠率；“a，b”限定了曲线解中参数变化的范围；“c，d，e，f，g，h”分别给出沿 x，y，z 轴的可视范围. 最后由命令“theta”和“phi”给出所求图像的定向. 还有一事需要说明，可以输入正值和负值曲率(和挠率)绘图，但是曲率公式总是正函数. 因此，在实现程序相互之间的“可逆性”时必须小心. 57~59

```
> recreate3dview:=proc(kap,ta,a,b,c,d,e, f,g,h,theta,phi)
local sys,p,x,y,z,T1,T2,T3,N1,N2,N3,B1,B2,B3,pl;
sys:=diff(x(s),s)=T1(s),diff(y(s),s)=T2(s),diff(z(s),s)=
T3(s),diff(T1(s),s)=kap(s)*N1(s),diff(T2(s),s)=kap(s)*N2(s),
diff(T3(s),s)=kap(s)*N3(s), diff(Ni(s),s)=-kap(s)*T1(s)+
ta(s)*B1(s),diff(N2(s),s)=-kap(s)*T2(s)+ta(s)*B2(s),
diff(N3(s),s)=-kap(s)*T3(s)+ta(s)*B3(s),diff(B1(s),s)=
-ta(s)*N1(s),diff(B2(s),s)=-ta(s)*N2(s),diff(B3(s),s)=
-ta(s)*N3(s);
p:=dsolve({sys, x(0)=0,y(0)=0,z(0)=0,T1(0)=1,T2(0)=0,
T3(0)=0,Ni(0)=0,N2(0)=1,N3(0)=0,B1(0)=0,B2(0)=0,
B3(0)=1},{x(s),y(s),z(s),T1(s),T2(s),T3(s),N1(s),
N2(s),N3(s),B1(s),B2(s),B3(s)},type=numeric):
pl:=odeplot(p,[x(s),y(s),z(s)],a..b,numpoints=200,
thickness=1,axes=framed, color=red):
display(pl,scaling=constrained,view=[c..d,e..f,g..h],
orientation=[theta,phi]);
end:
```

取 k 和 τ 为常量，可以描绘圆形螺线. 例如取 $\kappa=1/5$ 且 $\tau=1/10$，且解曲线的参数从 0 变化到 200，就得到标准螺线，如图 1-33 所示.

```
> recreate3dview(i/5,1/10,0,200,0,25, 0,20,0,40,49,49);
```

练习 1.7.9 用 recreate3dview 绘制曲线(如图 1-34、图 1-35 和图 1-36 所示).

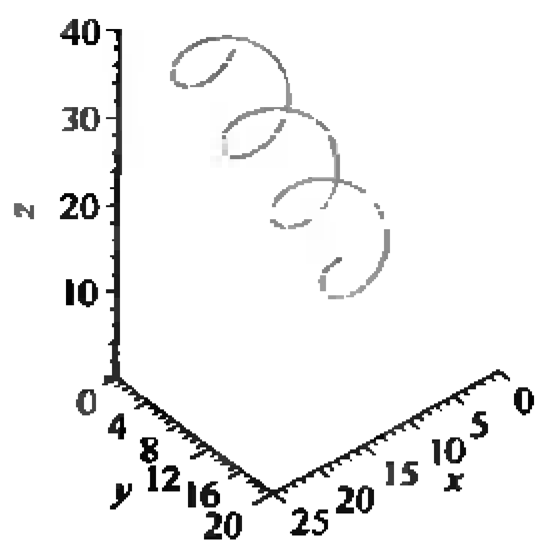


图 1-33 螺线

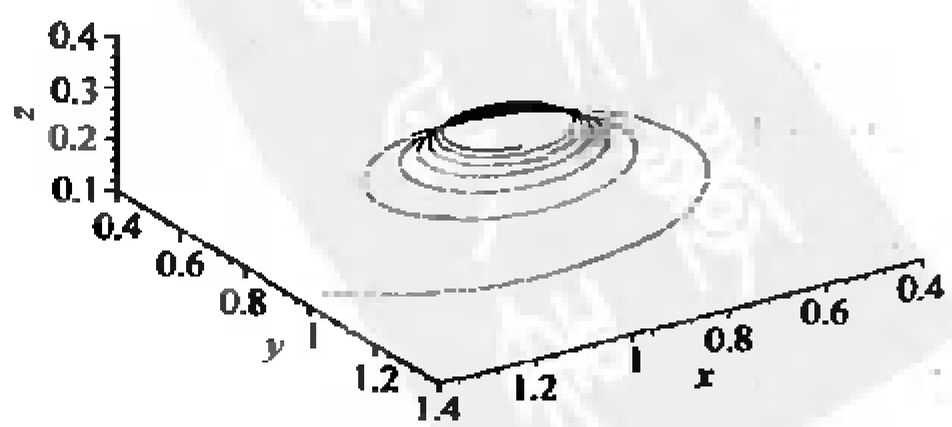


图 1-34 $\kappa=t$ 的曲线

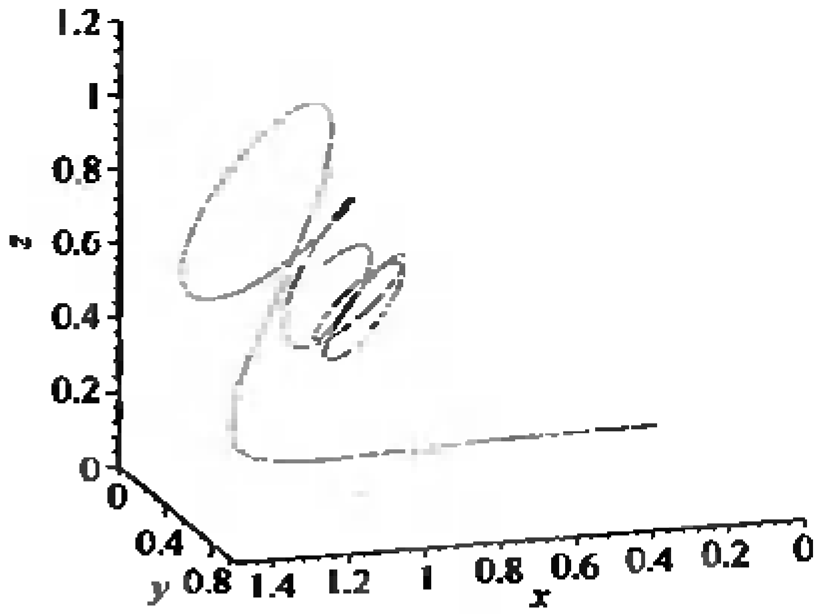


图 1-35 $\kappa=t$ 且 $\tau=\sin(t)$的曲线

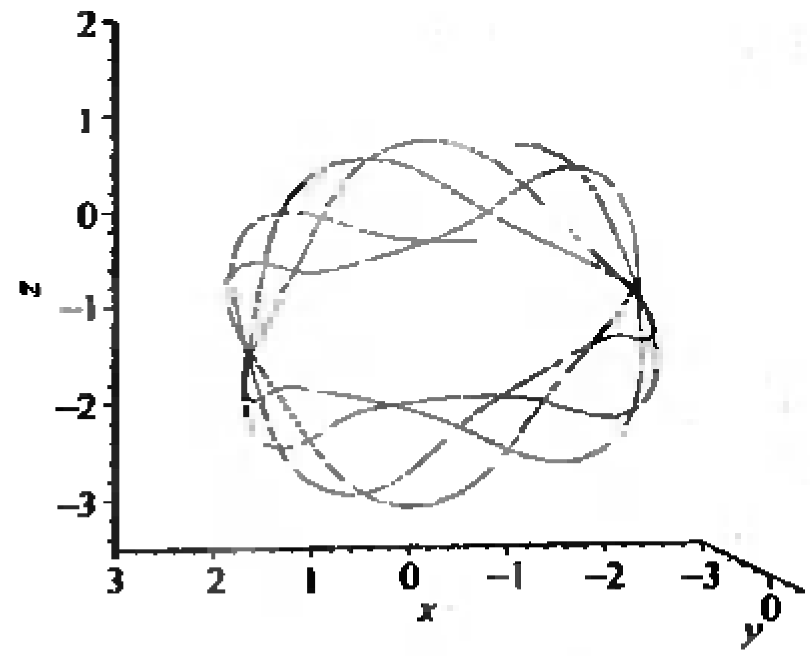


图 1-36 $\kappa=\cos(t)$，$\tau=\sin(t)$的曲线

```
> kap3d1:=t->t;
```

$$kap3d1 := t \to t$$

```
> recreate3dview(kap3d1,1/10,0,9,0.4,1.4,0.4,1.4,0.1,
0.4,58,66);
> tau3d1:=t->sin(t);
```

$$tau3d1 := \sin$$

```
> recreate3dview(kap3d1,tau3d1,0,7.8,0,1.5,0,1,0,1.2,
73,75);
> kap3d2:=t->cos(t);
```

$$kap3d2 := \cos$$

```
> recreate3dview(kap3d2,tau3d1,0,60,-3,3,-2,4,-3.5,2,
100,95);
```

练习 1.7.10 绘制定理 1.5.11 中的伸长曲线. 提示：取 $\kappa=s^2+2s$ 且 $\tau=s$.

在上述绘制曲线的过程中，可以看出 Maple 的"dsolve"命令如何求微分方程的数值解. 其实，另一方面，"dsolve"也能提供精确解. 看下面的例子，即如何用拉普拉斯变换确定练习 1.1.14 中的等时线. 等时线具有这样的性质，一珠子沿曲线(无摩擦地)滑下，无论它从哪里开始，都在同一时间到达底端. 因为重力势能与 y 相关，记曲线为 $x=x(y)$. 假设珠子从(x_1, y_1)处沿曲线下滑，底端为(0, 0). 根据能量守恒，在(x, y)点处，有 $mgy_1=mv^2/2+mgy$，故珠子的速度为 $v=\sqrt{2g(y_1-y)}$，曲线上无穷小部分的弧长为 $ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}\,dy$ 且 $D=RT$. 故其到达底端的总时间为 $T=\int_{y_1}^{0}\frac{\sqrt{(dx/dy)^2+1}}{\sqrt{2g(y_1-y)}}dy$. 我们希望它是不依赖于 y_1 的常量. 也可写为

$$\sqrt{2g}T=\int_{y_1}^{0}\frac{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2+1}}{\sqrt{y_1-y}}\mathrm{d}y,$$

$f(y_1)=1/\sqrt{y_1}$，且 $h(y_1)=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y_1}\right)^2+1}$. 这意味着该积分为 f，h 的卷积，故$\sqrt{2g}T=-f(y)*h(y)$，其中为方便起见将变量换为 y. 两端用拉普拉斯变换作用，结果只作用在 $h(y)$上，然后再用逆变换找出可以确定曲线 $x=x(y)$的有关 h 的条件. 这里必须用 Maple "inttrans"包取代"integral transform"包.

```
> with(inttrans):
```

有时，我们要告诉 Maple 一些关于问题的假设，可以如下实现：

```
> assume(T,constant); additionally(g,constant);
> laplace(sqrt(2*g)*T,y,s);
```

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{g}T}{s}$$

60～62

```
> f:=1/sqrt(y);
```

$$f:=\frac{1}{\sqrt{y}}$$

自己动手做拉普拉斯变换是很困难的，幸运的是 Maple 知道怎么做. 实际上，它包含了 Γ 函数及其特性.

```
> laplace(f,y,s);
```

$$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

因为$\sqrt{2g}L(T)=-L(f)L(h)$，可以通过如下分解求 $L(h)$.

```
> Lh:= simplify(laplace(sqrt(2*g)*T,y,s)/laplace(f,y,s),
symbolic);
```

$$Lh:=\frac{\sqrt{2}\sqrt{g}T}{\sqrt{\pi}\sqrt{s}}$$

因此，利用拉普拉斯逆变换就可求出 $h(y)$.

```
> h:=simplify(invlaplace(Lh,s,y),symbolic);
```

$$h:=\frac{\sqrt{2}\sqrt{g}T}{\pi\sqrt{y}}$$

又已知 $h(y)=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2+1}$，这就给出了 $x=x(y)$满足的微分方程. 以下是如何求解.

```
> solve(sqrt(diff(x(y),y)^2+1)=
2^(1/2)*g^(1/2)*T/Pi/y^(1/2),diff(x(y),y));
```

$$\frac{\sqrt{-y(\pi^2 y-2gT^2)}}{\pi y},-\frac{\sqrt{-y(\pi^2 y-2gT^2)}}{\pi y},$$

```
> simplify(1/Pi/y*(-y*(Pi^2*y-2*g*T^2))^(1/2), symbolic);
```

$$\frac{\sqrt{\pi^2 y-2gT^2}\,\mathrm{I}}{\pi\sqrt{y}}$$

注意，Maple 通过引入复数 $\mathrm{I}=\sqrt{-1}$来化简，这只不过是个记号．再用“dsolve”解微分方程．

63
```
> dsolve(diff(x(y),y)=1/Pi/sqrt(y)*
(-(Pi^2*y-2*g*T^2))^(1/2),x(y));
```

$$x(y)=\frac{\sqrt{-\pi^2 y+2gT^2}\sqrt{y}}{\pi}+\frac{gT^2\sqrt{(-\pi^2 y+2gT^2)y}\cdot\arctan\left(\frac{\pi\left(y-\frac{gT^2}{\pi^2}\right)}{\sqrt{-\pi^2 y^2+2ygT^2}}\right)}{\pi^2\sqrt{-\pi^2 y+2gT^2}\sqrt{y}}+C1$$

这里并没有给出更多信息，因而我们要善于观察，以便得到实质性的东西．

```
> x(y)=Int(1/Pi/y^(1/2)* (2*g*T^2-Pi^2*y)^(1/2),y=0..y1);
```

$$x(y)=\int_0^{y1}\frac{\sqrt{-\pi^2 y+2gT^2}}{\pi\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

需要使用“student”包实现积分中的变量代换．

```
> with(student):
> x(y)=changevar(y=2*g*T^2/Pi^2*sin(w)^2,
Int(1/Pi/y^(1/2)*(2*g*T^2-Pi^2*y)^(1/2),y=0..y1),w);
```

$$x(y)=\int_0^{\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{y1}{gT^2}}}{2}\right)}\frac{2\sqrt{2}\sqrt{-2gT^2\sin^2(w)+2gT^2}\,gT^2\sin(w)\cos(w)}{\pi^3\sqrt{\frac{gT^2\sin^2(w)}{\pi^3}}}\mathrm{d}w$$

化简被积函数．

```
> simplify(2/Pi^3*2^(1/2)/(g*T^2/Pi^2* sin(w)^2)^(1/2)*
(-2*g*T^2*sin(w)^2+2*g*T^2)^(1/2)*g*T^2*sin(w)*cos(w),trig);
```

$$\frac{4\sqrt{gT^2\cos^2(w)}\,gT^2\sin(w)\cos(w)}{\pi^2\sqrt{-gT^2(-1+\cos^2(w))}}$$

Maple 在化简方面做得不是很好．我们能看出某些等式，而 Maple 却无法识别．同时注意，虽然 $\cos(w)$ 为正值，但是除非有明确指示，否则 Maple 是不会取平方根的．实际上在使用
64 Maple 化简过程中，必须应用一点技巧，以获得最好的结果．

```
> x(y)=int(4*g*T^2*cos(w)^2/Pi^2,w);
```

$$x(y) = \frac{4gT^2\left(\frac{1}{2}\cos(w)\sin(w)+\frac{w}{2}\right)}{\pi^3}$$

```
> x(y)=combine(4*g*T^2/Pi^2* (1/2*cos(w)*sin(w)+1/2*w),w);
```

$$x(y) = \frac{gT^2\sin(2w)+2gT^2w}{\pi^3}$$

因此，在参数 w 的意义下，可以描述曲线 $x=x(y)(y=2gT^2\sin^2(w)/\pi^3$，利用倍角公式可化简成 $y=gT^2(1-\cos(2w))/\pi^2)$. 令 $2w=\theta$.

```
> xtheta:=(g*T^2/Pi^2)*(sin(theta)+theta);
ytheta:=(g*T^2/Pi^2)*(1-cos(theta));
```

$$xtheta := \frac{gT^2(\sin(\theta)+\theta)}{\pi^3}$$

$$ytheta := \frac{gT^2(1-\cos(\theta))}{\pi^2}$$

这恰好是摆线. 如此一来，Maple(在人为的帮助下)发现等时线就是摆线. 忽略常系数并画出参数曲线，如图 1-37 和图 1-38 所示.

```
> plot([theta+sin(theta),1-cos(theta), theta=0..4*Pi],
scaling=constrained,view=[0..12,0..2],color=blue);
```

```
> plot([theta+sin(theta),1-cos(theta), theta=Pi..2*Pi],
scaling=constrained,view=[3..6.3,0..2],color=magenta,
ytickmarks=4);
```

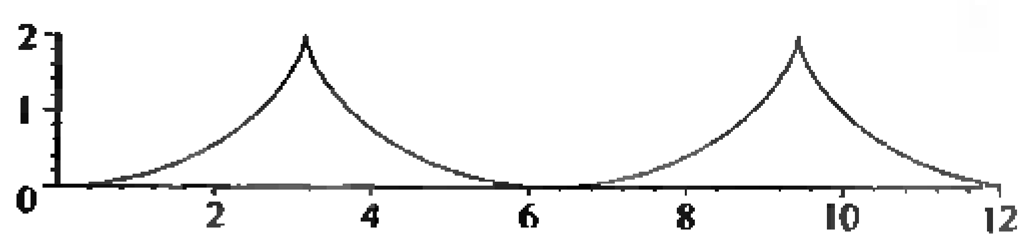


图 1-37　等时线

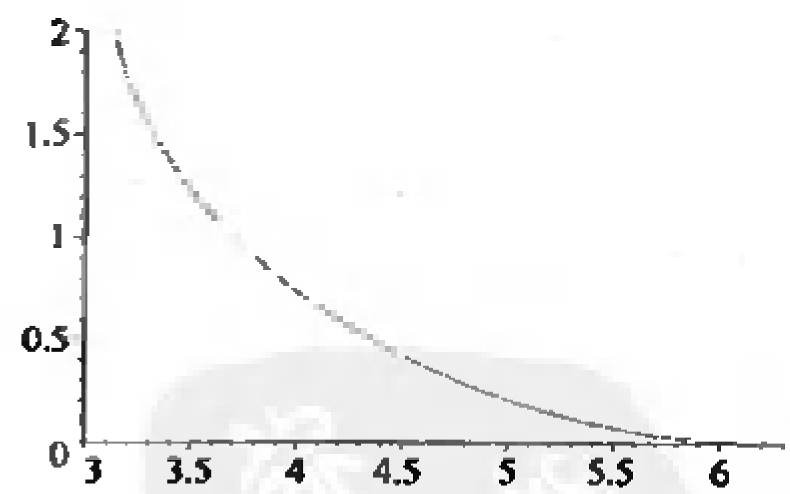


图 1-38　等时线. 更近的视角

现在，根据练习 1.3.26 绘制并分析 Viviani 曲线.

```
> viv:=<a*(1+cos(t))|a*sin(t)|a*2*sin(t/2)>;
```

$$viv := \left[a(1+\cos(t)), a\sin(t), 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

可以用两种方法作图. 而且我们可以存储它们，并立刻同时显示它们. 取 Viviani 曲线、球面和与之相交的圆柱. 而 Viviani 曲线正是它们的交线.

```
> viv1:=spacecurve(convert(subs(a=1,viv), list),t=-Pi..Pi,
color=black):
```

```
> viv2:=tubeplot(convert(subs(a=1,viv),list), t=-2*Pi..2*Pi,
radius=0.05,color=black):
```

```
> sphere:=plot3d([2*cos(u)*cos(v), 2*sin(u)*cos(v),
2*sin(v)],u=0..2*Pi,v=-Pi/2..Pi/2,shading=XY,lightmodel
=light2):
```

```
> cyl:=plot3d([cos(u)+1,sin(u),v], u=0..2*Pi,v=-2..2,
shading=Z,lightmodel=light1):
```

现在开始作图. 注意我们使用 viv2 命令是因为“tubeplot”会让我们更清楚地看到交线，如图 1-39 所示.

```
> display({viv2,sphere,cyl },scaling=constrained,
orientation= [-27,69]);
```

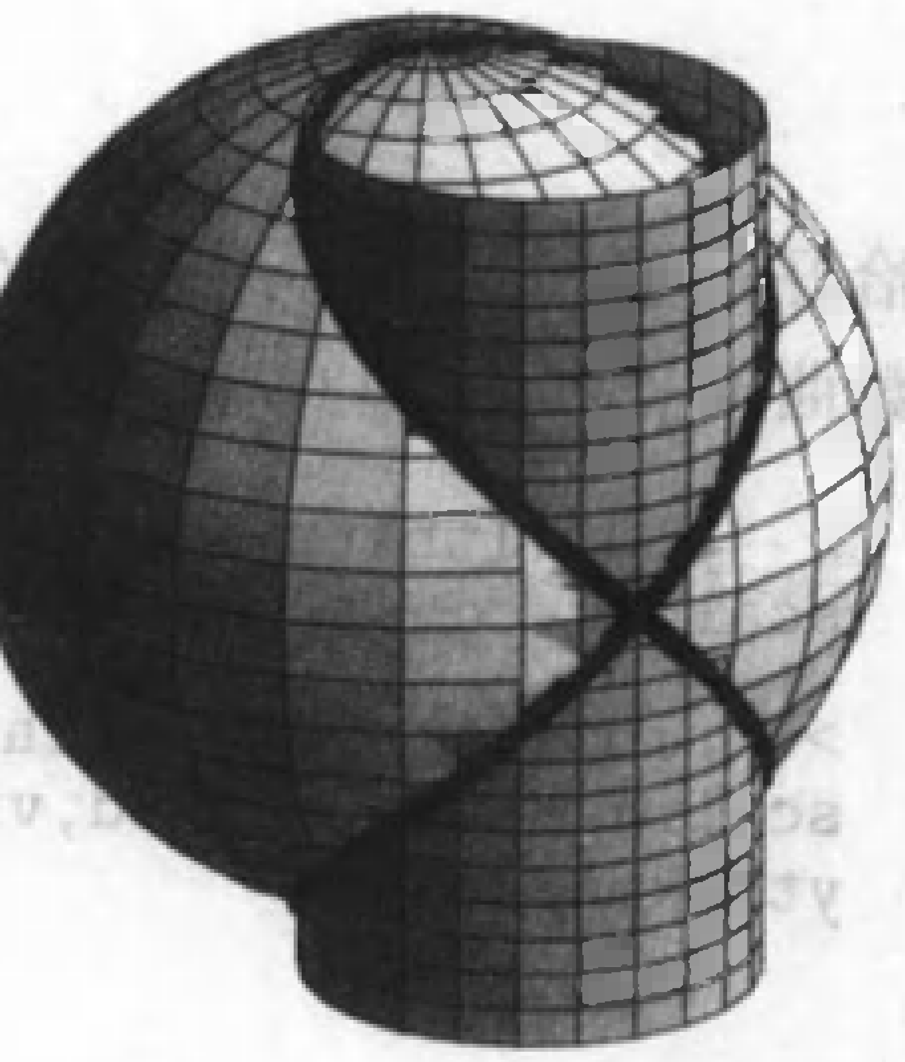


图 1-39 球和圆柱交出的 Viviani 曲线

再验证 Viviani 曲线是球面曲线. 利用练习 1.3.23～练习 1.3.26 给出的球面曲线的判断准则.

```
> kk:=curv(viv);tt:=tor(viv);
```

$$kk := \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)+5}}{a\left(1+\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{(3/2)}}$$

$$tt := \frac{3\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(3\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)+5\right)a}$$

检验此标准，只需以下为常量.

```
> zz:=simplify(1/kk^2+(1/tt^2)* diff(1/kk,t)^2/Norm(
map(diff,viv,t),Euclidean,conjugate=false)^2,symbolic);
```

$$zz := 4a^2$$

所以 Viviani 曲线的确是球面曲线.

练习 1.7.11 验证以下曲线是球面曲线.

$$(a\cos^2(t),a\sin(t)\cos(t),a\sin(t)).$$

练习 1.3.15 讨论了恒进动曲线. 选定 $\kappa(s)=-a\sin(bs)$, $\tau(s)=a\cos(bs)$, 其中 $a>0$, b 均为常量，利用上述绘图程序，可以得到恒进动曲线. 总之，在[Sco95]中，这类曲线的参数方程都可以推导出来. 而且，这样的曲线位于同一个单叶双曲面上(这在本书中多次提到)，此
65～67 单叶双曲面的方程是

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}z^2=\frac{4b^2}{a^4}.$$

更详细的参数方程为：

$$x(s)=\frac{c+b}{2c(c-b)}\sin((c-b)s)-\frac{c-b}{2c(c+b)}\sin((c+b)s)$$

$$y(s)=-\frac{c+b}{2c(c-b)}\cos((c-b)s)+\frac{c-b}{2c(c+b)}\cos((c+b)s)$$

$$z(s)=\frac{a}{bc}\sin(bs),$$

其中，$c=\sqrt{a^2+b^2}$．以下程序绘制相应双曲面上的恒进动曲线.

```
> constprec:=proc(a,b)
local c,alpha,a1,a2,hyp,pl1,pl2;
c:=sqrt(a^2+b^2);
a1:=c+b;
a2:=c-b;
alpha:=[a1/(2*c*a2)*sin(a2*s)-a2/(2*c*a1)*sin(a1*s),
-a1/(2*c*a2)*cos(a2*s)+a2/(2*c*a1)*cos(a1*s),
a/(b*c)*sin(b*s)];
hyp:=[2*b/a^2*cosh(r)*cos(q),2*b/a^2*cosh(r)*sin(q),
2/a*sinh(r)];
pl1:=tubeplot(alpha,s=0..2*Pi,radius=0.01,color=black,
numpoints=200);
pl2:=plot3d(hyp,r=-1..1,q=0..2*Pi);
display({pl1,pl2},scaling=constrained,style=wireframe,
shading=XY);
end:
```

取 $a=4$，$b=3$ 的恒进动曲线，如图 1-40 所示.

```
> constprec(4,3);
```

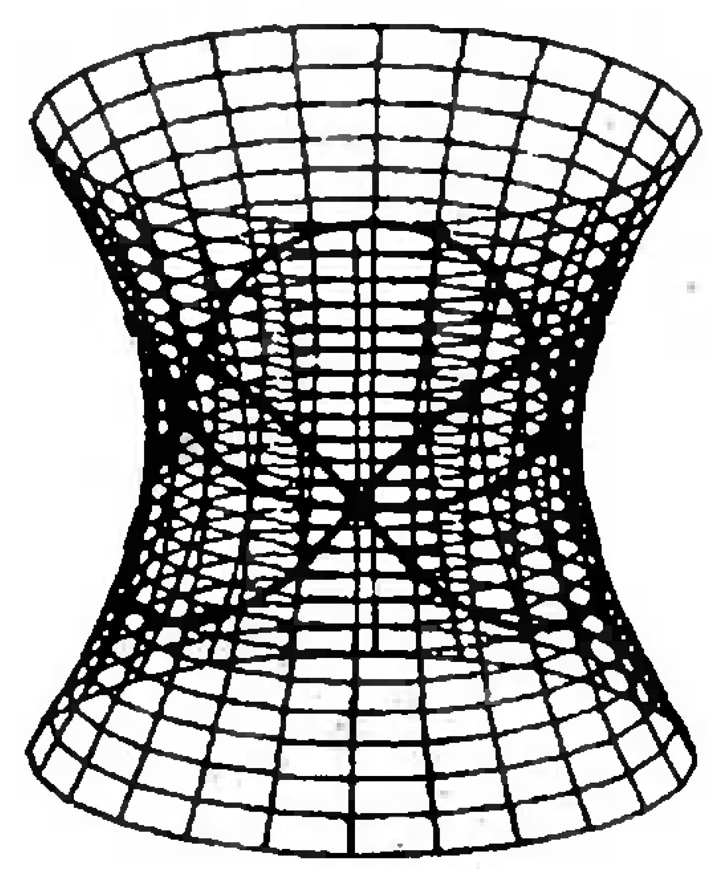


图 1-40　$a=4$，$b=3$ 的恒进动曲线

练习 1.7.12　绘制 $a=15$，$b=8$ 和 $a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$ 的恒进动曲线，猜想什么时候恒进动曲线是闭曲线？见[Sco95].

练习 1.7.13　绘制 $a=15$，$b=8$ 和 $a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$ 的恒进动曲线的单位切向量 $T(s)$（也就是切标线或切指标线）. 用“display”画出单位球的 $T(s)$，猜想这样曲线的尖点总数. 对球面曲线的切指标线的讨论见[Sol96].

练习 1.7.14　下列程序绘制地球上两点 A，B 之间的大圆弧并计算两点间的距离（假定地球半径为 3970 英里）. 给出 A，B 的经纬度坐标，例如 $A=[100,25]$，意为 A 点的经度为 100，纬度为 25. 取格林威治和英格兰以东为正经度，以西为负，且假设地球表面是球面，参数方程为 $(R\cos(u)\cos(v),R\sin(u)\cos(v),R\sin(v))$，其中 R 是地球半径.

解释每行程序. 这是对本章用到的向量积分的一个很好的检测.

```
> with(LinearAlgebra):with(plots):
> great_circle:=proc(place1,place2,theta,phi)
local point1,point2,angle,A,B,sphere,circ,alpha,unitcp,
alp1,alp2;
A:=map(evalf,[Pi/180*place1[1],Pi/180*place1[2]]);
B:=map(evalf,[Pi/180*place2[1],Pi/180*place2[2]]);
```

```
point1:=<cos(A[1])*cos(A[2])|sin(A[1])*cos(A[2])|sin(A[2])>;
point2:=<cos(B[1])*cos(B[2])|sin(B[1])*cos(B[2])|sin(B[2])>;
angle:=evalf(arccos(DotProduct(point1,point2,conjugate=
false)));
print('Distance is',3970*angle,'miles');
unitcp:=1/sin(angle)*CrossProduct(point1,point2);
alp1:=ScalarMultiply(point1,cos(t));
alp2:=ScalarMultiply(CrossProduct(unitcp,point1),sin(t));
alpha:=alp1+alp2;
sphere:=plot3d([cos(u)*cos(v),sin(u)*cos(v),sin(v)],u=0..
2*Pi,v=-Pi/2..Pi/2, shading=XY,lightmodel=light2,grid=
[25,19]):
circ:=tubeplot(convert(alpha,list),t=0..angle,radius=0.01,
color=navy):
display({sphere,circ},scaling=constrained,orientation=
[theta,phi]);
end:
```

68~69

这里有一些经纬度(同程序中的顺序)：克利夫兰(−81.68，41.48)，纽约(−73.94，40.67)，芝加哥(−87.68，41.84)，巴黎(2.30，48.83)，莫斯科(37.62，55.75)，亚特兰大(−84.42，33.76)，多伦多(−79.60，43.67)，汉城(127.05，37.52)，北京(116.35，39.90)，悉尼(151.30，−33.90)，新德里(77.22，28.90)，里约热内卢(−42.70，−22.49)。那么，从纽约到莫斯科多远？伦敦到巴黎呢？克利夫兰到悉尼呢？如图1-41和图1-42所示。

```
> great_circle([-73.94,40.67],[37.62,55.75], -21,60);
```

Distance is ,4680.738234,*miles*

```
> great_circle([-81.68,41.48],[151.30,-33.9], -156,75);
```

Distance is ,9566.027530,*miles*

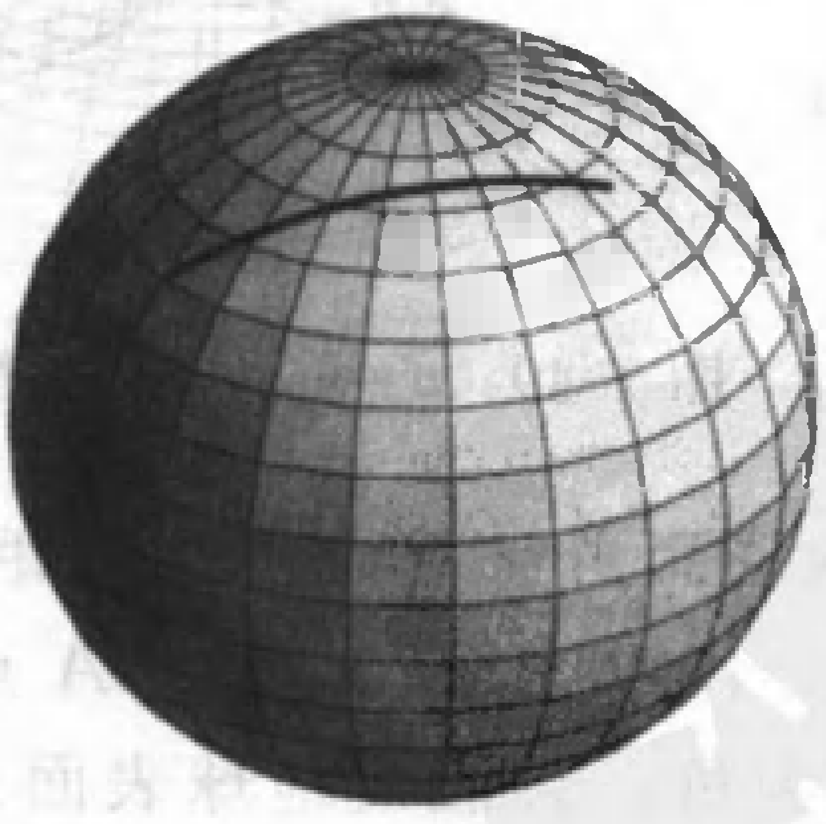


图1-41 纽约到莫斯科



图1-42 克利夫兰到悉尼

70

第2章 曲 面

2.1 引言

在日常生活中随处可见曲面的例子，气球、内胎、容器和肥皂泡都是曲面的物理模型. 怎样才能研究这些实体的几何性质呢？我们必须有坐标才能计算. 但是，不要因为这些曲面是$\mathbb{R}^3$中的曲面，就认定它们是 3 维的. 例如，沿母线把一个圆柱面剪开，就可以把它展开平放在桌面上，这表明圆柱面实际上是 2 维的曲面. 因此，可以用两个坐标描述它. 这给了我们描述曲面几何性质的一个提示. 也就是说，我们将曲面展开成平面部分，根据所要的扭曲和伸长变换了解曲面在空间中是如何弯曲的. 这个展开提供了坐标，可以用来求曲面微积分以及展开中描述曲面形状的各种基于微积分的变量. 就像 Frenet 公式的微积分能够描述曲线的几何性质一样，曲面上的微积分能够描述曲面的几何性质.

令 D 表示平面$\mathbb{R}^2$ 上的开集，通常 D 是开圆盘或开矩形. 令

$$\boldsymbol{x}: D \to \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \mapsto (x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v))$$

表示从 D 到$\mathbb{R}^3$ 的映射，其中 x^i 是映射 $\boldsymbol{x}$ 的分量函数. 通过偏微分可以求 $\boldsymbol{x}$ 在某时刻关于一个变量的微分. 固定 $v=v_0$，令 u 变化，则 $\boldsymbol{x}(u, v_0)$仅有一个变量，因此是一条曲线，这条曲线称为 u-参数曲线(u-parameter curve). 同样地，如果固定 $u=u_0$，那么得到 v-参数曲线(v-parameter curve)$\boldsymbol{x}(u_0, v)$. 显然，这两条曲线通过$\mathbb{R}^3$ 中的定点 $\boldsymbol{x}(u_0, v_0)$. 对 $\boldsymbol{x}$ 的坐标函数分别作关于变量 u 和 v 的微分，就可以得到 u-参数曲线和 v-参数曲线的切向量，分别记为

$$\boldsymbol{x}_u = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u}, \frac{\partial x^2}{\partial u}, \frac{\partial x^3}{\partial u}\right) \quad 和 \quad \boldsymbol{x}_v = \left(\frac{\partial x^1}{\partial v}, \frac{\partial x^2}{\partial v}, \frac{\partial x^3}{\partial v}\right).$$

计算这些偏微分在点(u_0, v_0)处的取值，从而得到参数曲线在此点的切向量或速度向量 $\boldsymbol{x}_u(u_0, v_0)$和 $\boldsymbol{x}_v(u_0, v_0)$(如图 2-1 所示).

当然，为了得到曲面上点的确切坐标，还需要两个条件. 首先，映射 $\boldsymbol{x}$ 必须是 1-1 的. 事实上，这个条件可以略微放宽，对曲面上特定自相交集成立即可，也就是那些给出单一法向量的自相交集. 其次是，映射 $\boldsymbol{x}$ 不能使参数曲线“卷曲”在一起，以至于 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 方向相同，如果如此，就失去了 2 维的意义，而这恰恰是要描述的曲面的特性. 第一个条件很容易满足，只要通过简单的代数方法或强制地缩小 D 的范围即可. 如何才能使得向量 $\boldsymbol{x}_u$和 $\boldsymbol{x}_v$ 处处线性无关，从而保证第二个性质？下面的练习为我们提供了一个简单的验证方法.

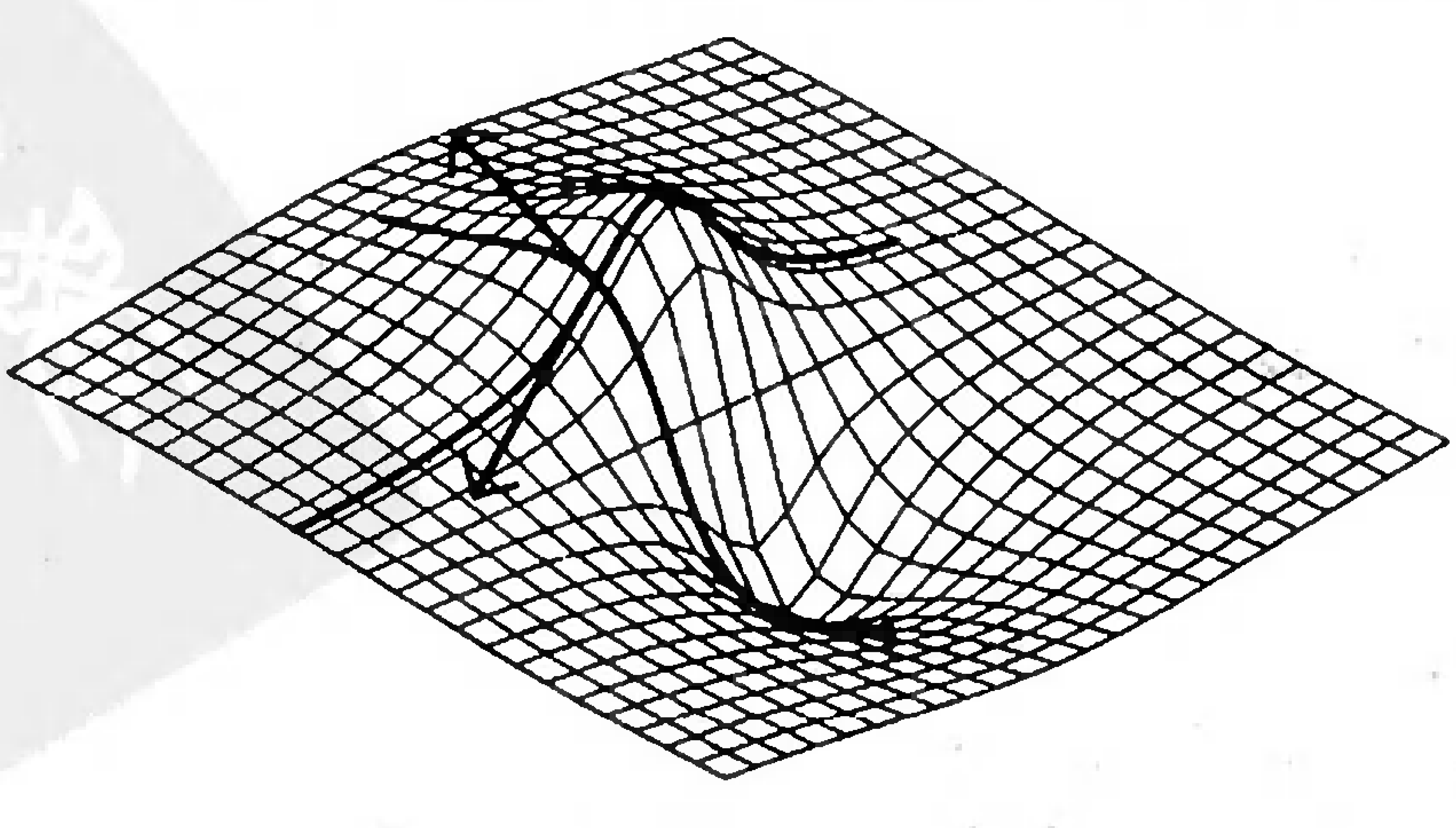


图 2-1 参数曲线及其切向量

练习 2.1.1 证明 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v = 0$. 回想：如果一个向

量是另一个向量的常数倍，那么这两个向量线性相关.

D 是$\mathbb{R}^2$ 中的开集，映射 $\boldsymbol{x}$：$D\to\mathbb{R}^3$ 是**正则**的，如果对于 D 的任意点均有 $\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\neq 0$.（当然 $\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v$ 必须存在！）**坐标补片**(coordinate patch)是$\mathbb{R}^2$ 中的开集 D 到$\mathbb{R}^3$ 的 1-1 正则映射
71~72 $\boldsymbol{x}$：$D\to\mathbb{R}^3$. $\mathbb{R}^3$ 中的**曲面**(surface)是$\mathbb{R}^3$ 中的子集 M，使得对于 M 的任意一点，在 M 中存在包含此点的邻域，此邻域包含在某个坐标补片 $\boldsymbol{x}$：$D\to M\subseteq\mathbb{R}^3$ 的像集中.

因为曲面上的每一个坐标补片(例如 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$)都是 1-1 的(至少在坐标原点的一个小的开区域上是 1-1 的)，所以存在相应的反函数(事实上这些函数是连续的). 这样就可以考虑任何一对坐标补片的复合 $\boldsymbol{x}^{-1}\circ\boldsymbol{y}$：$D\to\mathbb{R}^2$. 如果每个坐标函数的任意次数的偏导数$\frac{\partial}{\partial u}$，$\frac{\partial^2}{\partial u^2}$，$\frac{\partial^2}{\partial u^2}$，… 存在且连续，称此映射是**可微的**(或**光滑的**). 如果曲面上任意两个坐标补片的复合都是可微的，则称此曲面可微(或光滑). 我们所研究的曲面通常都是光滑的或者很接近于光滑的. 也就是说，为了得到光滑性，可能要删除其中有限多个点. 事实上，这里之所以要提到交迭的坐标补片的概念，是因为在讨论等距和高斯曲率的时候要用到.

曲面 M 上的函数 f：$M\to\mathbb{R}$ 是**可微的**(或**光滑的**)，如果对于 M 上的任意坐标补片，复合映射 $f\circ\boldsymbol{x}$ 是光滑的. 曲面 M 上的曲线事实上是映射 α：$I\to M$，其中 $I=[a, b]$是$\mathbb{R}$ 上的一个区间. 如果对 M 中的任意两点 p，q，存在曲线 α：$[0, 1]\to M$，使得 $\alpha(0)=p$，$\alpha(1)=q$，则称 M 是**道路连通**(path connected)的. 本书中所涉及的曲面，如果没有特别声明，都假定是道路连通的. 当然，这自然满足一个比较弱的性质，那就是曲面是连通的. 也就是说，如果 M 可以写成两个不交开集的并 $M=A\cup B$，那么 A 或 B 是空集.

练习 2.1.2 这个练习需要一些拓扑知识，在定理 6.7.7 中要用到这个练习的结论. 假设 M 连通，证明 M 中既开又闭的子集或者是$\varnothing$或者是 M.

如果对于 M 上的任意坐标补片 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}^{-1}\circ\alpha$：$I\cap\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}(D))\to\mathbb{R}^2$ 是光滑的，则称曲线是**可微的**(或**光滑的**). 下面的引理表明光滑曲面之所以重要的原因. 也就是说，我们要了解曲面上的曲线，只需要研究$\mathbb{R}^2$ 的开邻域上的参数曲线，而不是直接研究曲面上的曲线.

引理 2.1.3(重要引理) *M 是一个曲面，α：$I\to\boldsymbol{x}(D)\subset M$ 是$\mathbb{R}^3$ 中的曲线，它包含在 M 的一个坐标补片的像中，则存在唯一的光滑函数 $u(t)$，$v(t)$：$I\to\mathbb{R}$，使得*

$$\alpha(t)=\boldsymbol{x}(u(t),v(t)).$$

证明 因为 α 光滑，由定义知 $\boldsymbol{x}^{-1}\circ\alpha$：$I\to D$ 光滑. 又 $D\subseteq\mathbb{R}^2$，故 $\boldsymbol{x}^{-1}\circ\alpha(t)=(u(t), v(t))$，则

$$\alpha(t)=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^{-1}\circ\alpha(t))=\boldsymbol{x}(u(t),v(t)).$$

下证 $u(t)$，$v(t)$的唯一性. 不妨假设存在另外两个函数$\bar{u}(t)$，$\bar{v}(t)$，满足 $\alpha=\boldsymbol{x}(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$. 可以假设$\bar{u}(t)$，$\bar{v}(t)$定义在 I 上，且重新参数化，则

$$(u(t),v(t))=\boldsymbol{x}^{-1}\circ\alpha(t)=\boldsymbol{x}^{-1}\circ\boldsymbol{x}(\bar{u}(t),\bar{v}(t))=(\bar{u}(t),\bar{v}(t)).$$ ■

为了研究光滑曲面上的曲线，就可以考虑单变量函数 $u(t)$，$v(t)$. 并且注意 M 上的曲线 α 可以不包含在一个坐标补片中，这时可以分别研究包含在单个坐标补片的部分，然后把所有的信息结合在一起. 说明一下，本书的例子只处理包含在单个补片中的曲线. 所谓闭曲线是指 α：$[a, b]\to M$，满足 $\alpha(a)=\alpha(b)$，且对于任意 $n\geqslant 1$，$\alpha^{(n)}(a)=\alpha^{(n)}(b)$. 这等价于此曲线可以

由面环 S^1 到 M 的光滑映射所表示．由此引出下面的定义．

假设 M：$\boldsymbol{x}(u, v)$ 和 N：$\boldsymbol{y}(r, s)$ 是由单个坐标补片定义的两个曲面．F：$M \to N$ 是 M 到 N 上的映射，记为 $F(p)=q$，其中，$p \in M$，$q \in N$．如果 $\mathbb{R}^2$ 的开子集的复合映射 $\boldsymbol{y}^{-1} \circ F \circ \boldsymbol{x}$：$D_x \to D_y$ 是光滑映射，则称 F 是可微的(或光滑的)．也就是说，通常意义下的偏导数都一定存在且连续．当然，这些定义可以推广到由多个坐标补片覆盖的曲面上．只需要求所有的复合映射都是光滑的即可．以后可以看到曲面的映射相当复杂．当然，也可以用线性代数的方法给出映射的线性逼近．在给出坐标补片的例子之前，介绍最后一个预备概念，这个概念在以后的证明中大有用处．如果 M 闭且有界，则称 M 是 $\mathbb{R}^3$ 的紧(compact)曲面．有界的意义很清楚，M 有界也就是说 M 完全包含在 $\mathbb{R}^2$ 的足够大的球面中．对于 $\mathbb{R}^2$ 中的任意收敛序列 $\boldsymbol{x}_i \to \bar{x}$，其中 $\boldsymbol{x}_i \in M$，均有 $\bar{x} \in M$，则称子集 M 是闭的．下面将分别给出紧曲面和非紧曲面的例子．下面是关于紧性的最重要的命题．

命题 2.1.4　关于紧性有下面的性质：

(1)如果 F 是紧曲面 M 到曲面 N 的映射，则 $F(M)$ 在 N 中紧．

(2)如果 M 紧，f：$M \to R$ 是光滑映射，则 f 可以在 M 的某点上取到最大最小值．

曲面上坐标补片(或参数化)的例子

例 2.1.5(蒙日片)　双变量实值函数 $z=f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面．为了说明这点，定义坐标补片

$$\boldsymbol{x}(u,v) = (u,v,f(u,v)),$$

其中 u，v 遍历 f 的定义域．所以 $\boldsymbol{x}_u=\left(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial u}\right)$，$\boldsymbol{x}_v=\left(0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial v}\right)$．为方便起见，以下分别用

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_u, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = f_v$$

来表示偏导数．由

$$\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1) \neq 0$$

可知坐标补片是正则的．

以抛物面 $z=x^2+y^2$ 为例，此非紧曲面的蒙日片(如图 2-2 所示，并且比较图 2-3)由

$$\boldsymbol{x}(u,v) = (u,v,u^2+v^2)$$

给出．

练习 2.1.6　此抛物面在 $u_0=0$，$v_0=0$ 处的参数曲线是什么？

练习 2.1.7　给出圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的坐标补片，这里有问题吗？

练习 2.1.8　给出(部分)单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的蒙日片．为什么此蒙日片不能定义在整个球面上？



图 2-2 蒙日片

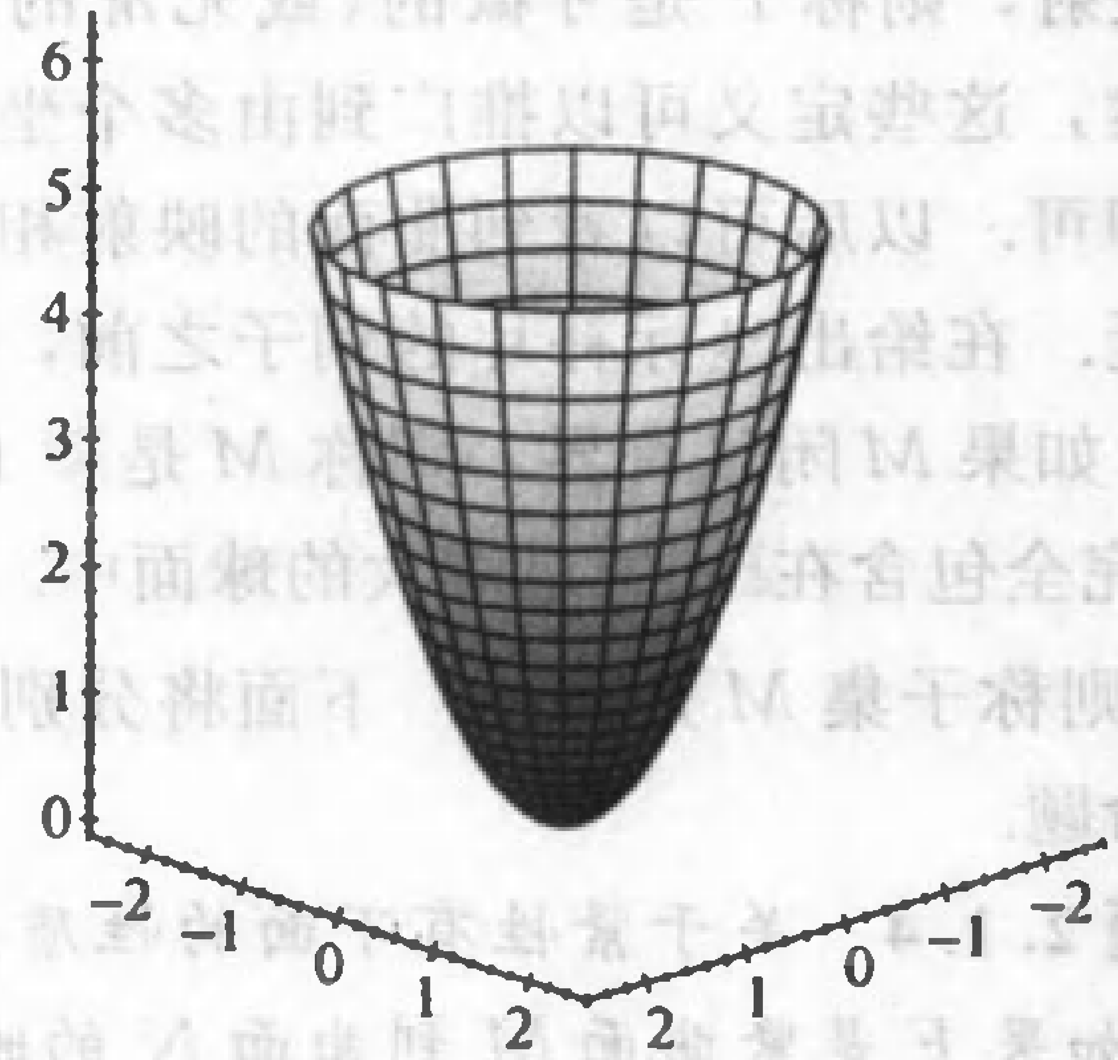


图 2-3 (非蒙日)抛物面

例 2.1.9(地面坐标) M 是半径为 R 的球面(方便起见假设中心是(0, 0, 0)), 地面坐标由两个角以及半径(此例固定为 R)构成. 从原点(0, 0, 0)到离原点距离为 R 的点画一条线段, 参数 v 表示从这条线段到 xy 平面的角度(弧度), 取值范围为 $-\pi/2<v<\pi/2$. 如果把这条线段投影到 xy 平面上, 则 u 表示投影与正 x 轴的夹角, 其取值范围为 $0\leqslant u<2\pi$. 如图 2-4 所示. 考虑图 2-5 中的三角形, 可得点的 xyz 坐标为

$$(R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v)=\boldsymbol{x}(u,v),$$

那么

$$\boldsymbol{x}_u=(-R\sin u\cos v, R\cos u\cos v, 0),$$
$$\boldsymbol{x}_v=(-R\cos u\sin v, -R\sin u\sin v, R\cos v).$$

进一步, 计算它们的叉积

$$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v=(R^2\cos u\cos^2 v, R^2\sin u\cos^2 v, R^2\sin v\cos v),$$

73~76 其中, 在第三个坐标中, 用到 $\sin^2 u+\cos^2 u=1$. 注意 $|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|=R^2\cos v$. 从现在开始, 用 $S^2(R)$ 表示中心在原点, 半径为 R 的球面; S^2 表示中心在原点, 半径为 1 的球面. 注意球面是紧的.

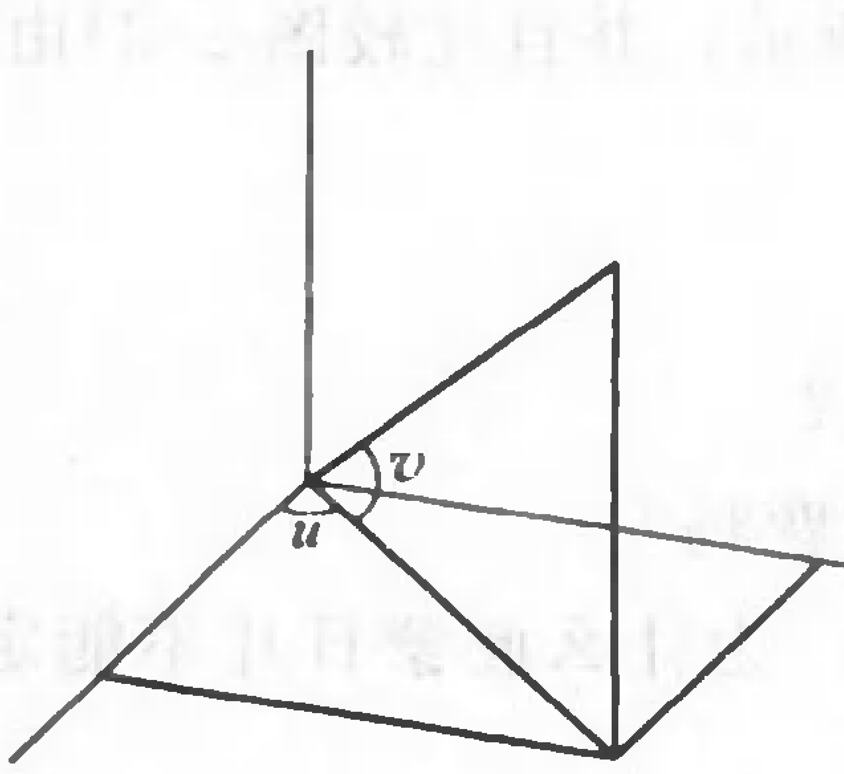


图 2-4 地面坐标

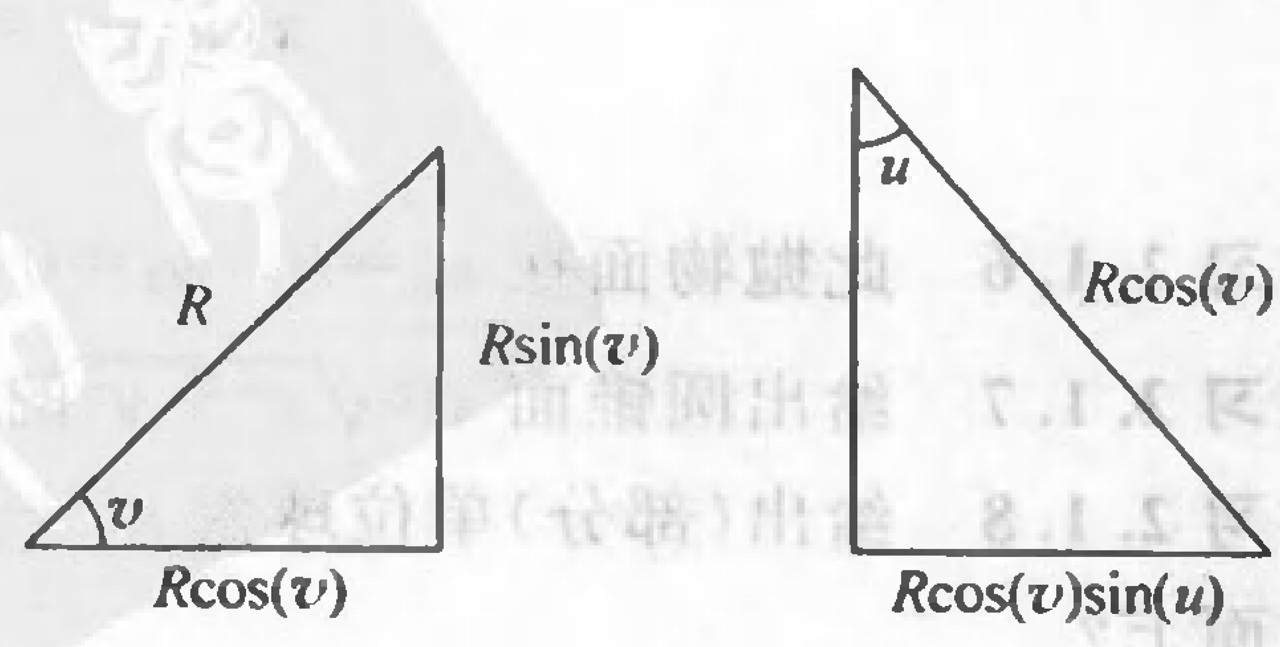


图 2-5 投影三角形

例 2.1.10(旋转曲面)　设 C 是 xy 平面上的曲线，其参数方程为 $\alpha(u)=(g(u),\ h(u),\ 0)$. 沿 x 轴旋转曲线 C(如图 2-6 所示)，可以由以下方法得到曲面上点 p 的坐标. 因为曲线是沿着 x 轴旋转，故 x 坐标依然是曲线本身的坐标. 以 v 表示离开 xy 平面的旋转角度，则 y 坐标缩小到 $y\cos v=h(u)\cos v$，同时 z 坐标增加到 $h(u)\sin v$，如图 2-7 所示. 因此，坐标补片可以定义为

$$x(u,v)=(g(u),h(u)\cos v,h(u)\sin v).$$

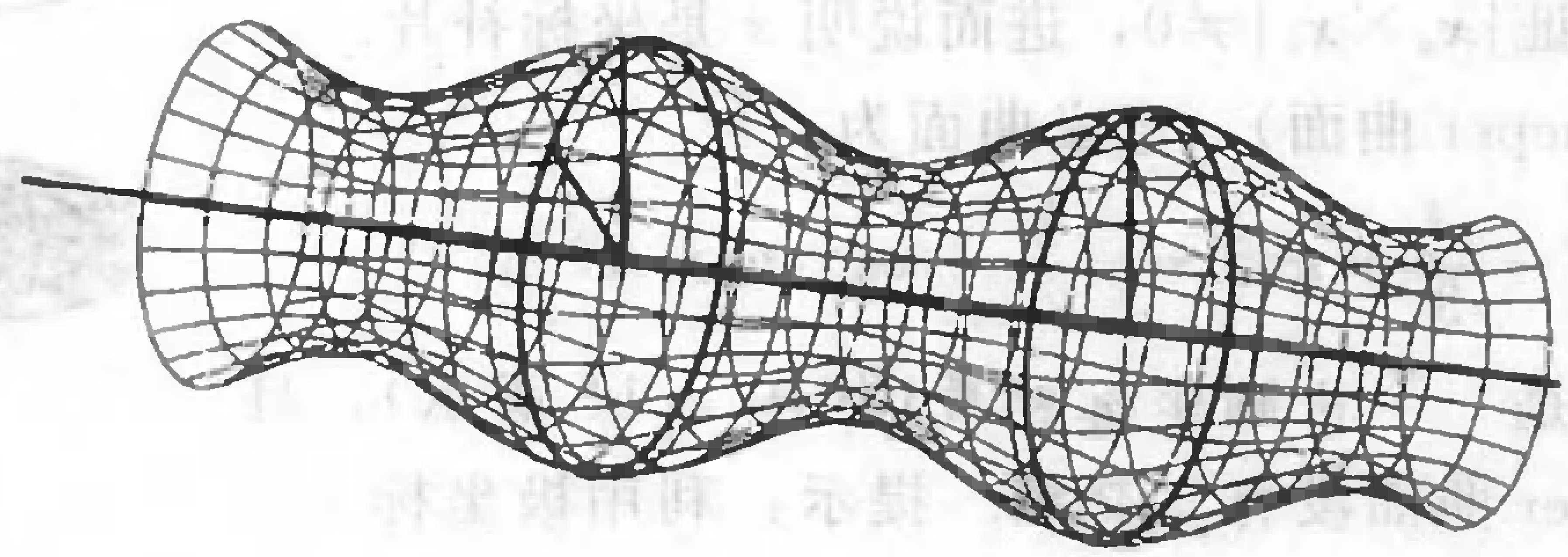


图 2-6　旋转曲面

如果绕不同的轴旋转，则所得的坐标是上面所得坐标的一种置换. 例如，xz 平面上的参数曲线 $(h(u),\ 0,\ g(u))$ 沿 z 轴旋转所得到的旋转曲面为 $(h(u)\cos v,\ h(u)\sin v,\ g(u))$.

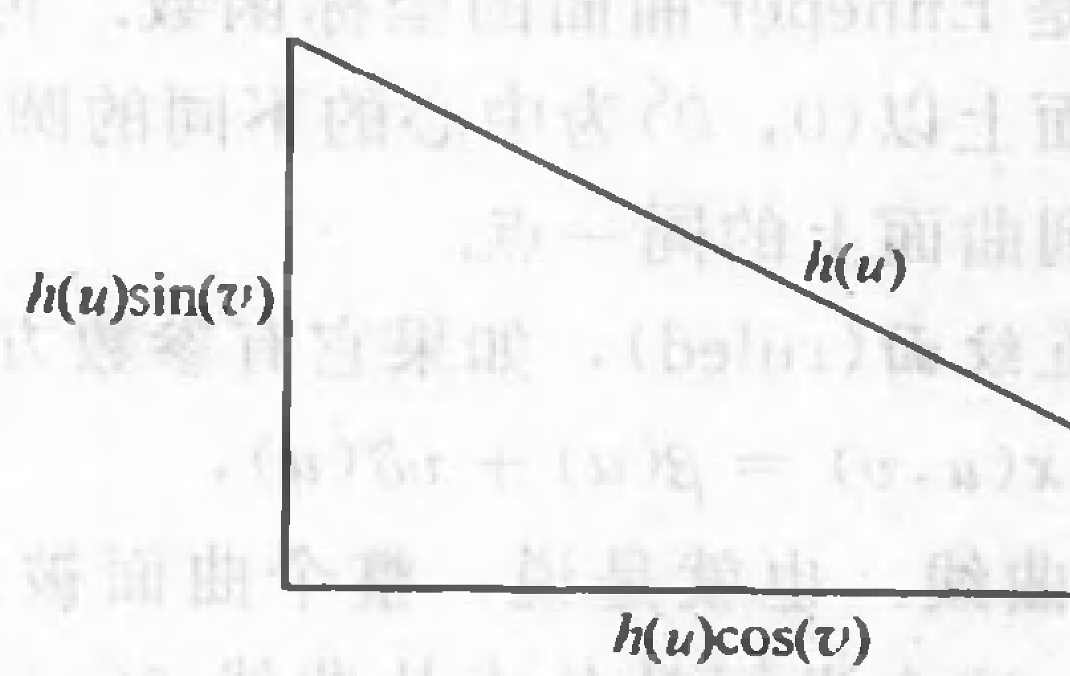


图 2-7　旋转三角形的曲面

练习 2.1.11　验证

$$x_u\times x_v=h\left(\frac{dh}{du},-\frac{dg}{du}\cos v,-\frac{dg}{du}\sin v\right).$$

为什么对任意的 u，v，均有 $x_u\times x_v\neq 0$?

一般来说，$g(u)$ 表示沿旋转轴的长度，而 $h(u)$ 表示到旋转轴的距离. 当然最好的情形是 $g(u)=u$ 的时候，此时根据参数 u，我们很容易确定点在曲面上的位置.

练习 2.1.12　给出悬链线 $y=\cosh(x)$ 沿 x 轴旋转所得的悬链面的坐标补片，如图 2-8 所示.

练习 2.1.13(环面)　考虑图 2-9 中的环面. 沿 z 轴旋转半径为 r 的圆周，证明这个补片为

$$x(u,v)=((R+r\cos u)\cos v,(R+r\cos u)\sin v,r\sin u).$$

u，v 如何变化? 注意环面是紧的.

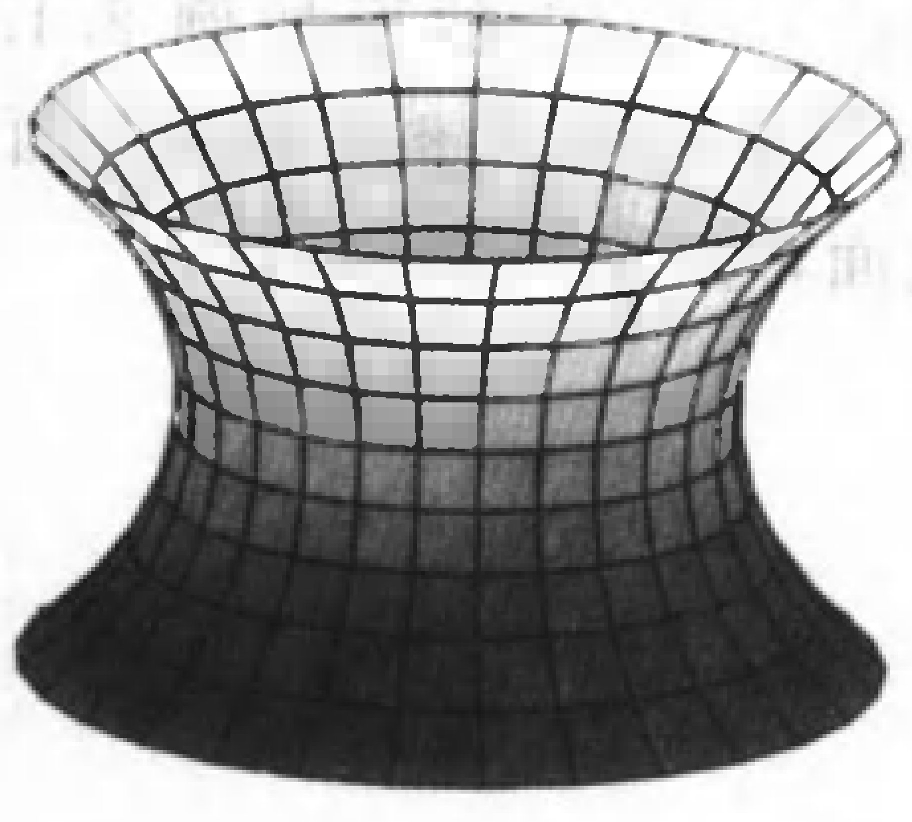


图 2-8　悬链面

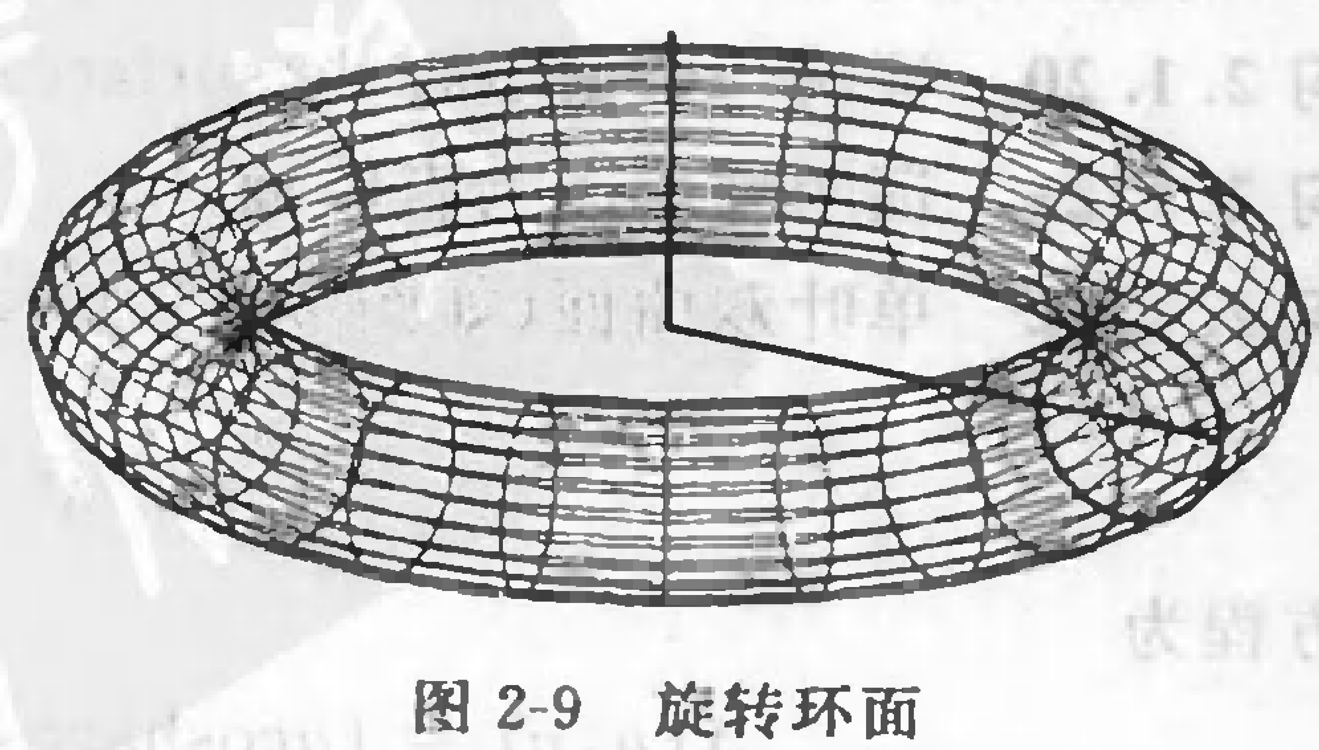


图 2-9　旋转环面

例 2.1.14(螺旋面)　取螺线 $\alpha(u)=(a\cos u, a\sin u, bu)$，画出通过点 $(0, 0, bu)$ 及点 $(a\cos u, a\sin u, bu)$ 的直线．由这条旋转上升的线扫出的曲面就是螺旋面．这条线的参数方程是 $(0, 0, bu)+v(a\cos u, a\sin u, 0)$．故螺旋面(如图 2-10 所示)的坐标补片为

$$\mathbf{x}(u,v)=(av\cos u, av\sin u, bu).$$

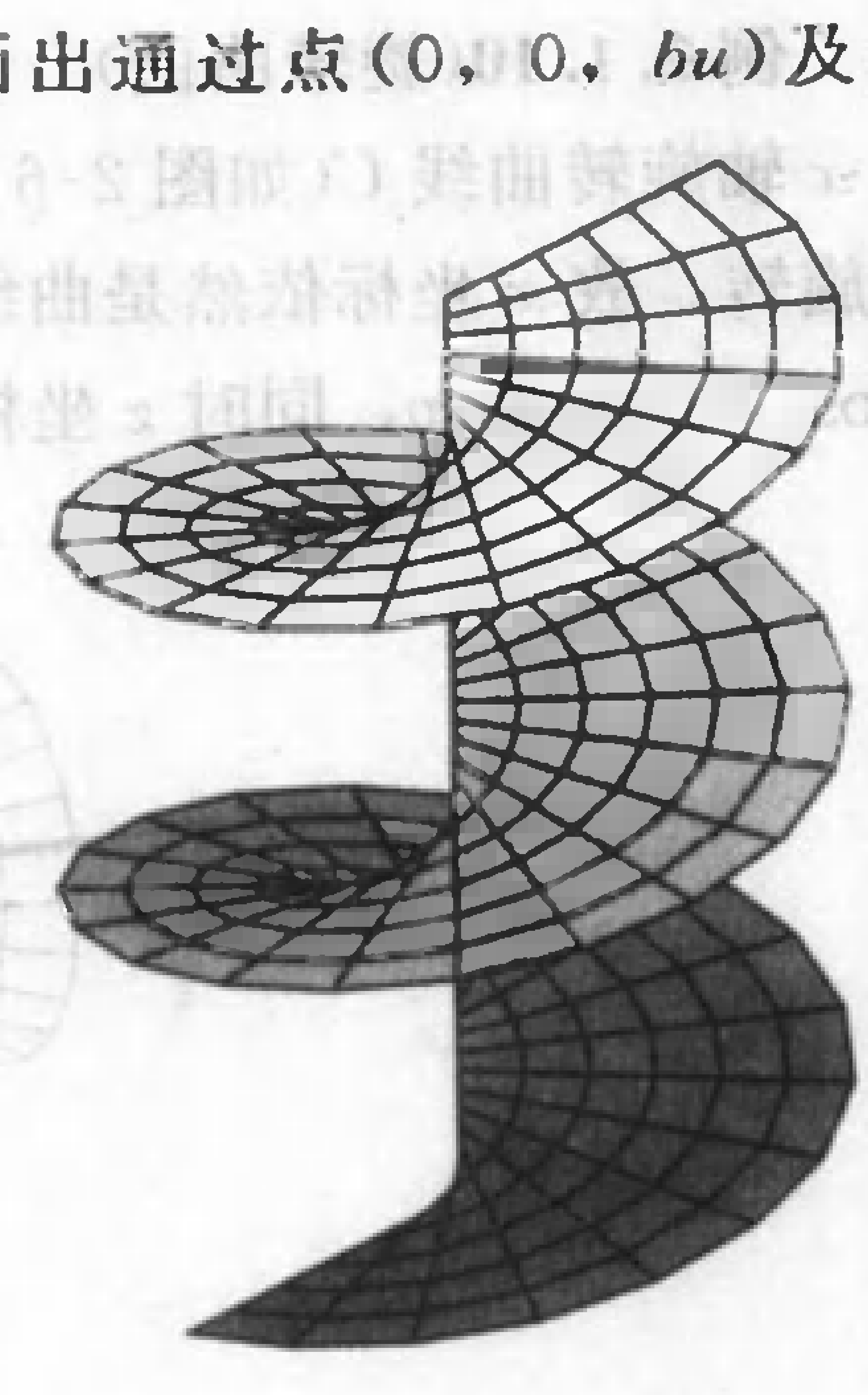


图 2-10　螺旋面

练习 2.1.15　验证 $|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v|\neq 0$，进而说明 $\mathbf{x}$ 是坐标补片．

练习 2.1.16(Enneper 曲面)　定义曲面为

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2, v-\frac{v^3}{3}+vu^2, u^2-v^2\right).$$

证明这样定义的是一个正则坐标补片(如图 2-11 所示)，且 $u^2+v^2<3$ 时，Enneper 曲面没有自交集．提示：利用极坐标 $u=r\cos\theta$，$v=r\sin\theta$，证明等式 $x^2+y^2+\frac{4}{3}z^2=\frac{1}{9}r^2(3+r^2)^2$ 成立，其中 x，y，z 是 Enneper 曲面的坐标函数．再由这个等式说明映射在 (u, v) 平面上以 $(0, 0)$ 为中心的不同的圆上是单射．最后，在圆 $u^2+v^2=3$ 找到两个点，而这两个点映到曲面上的同一点．

曲面是*直纹面*(ruled)，如果它有参数方程

$$\mathbf{x}(u,v)=\beta(u)+v\delta(u),$$

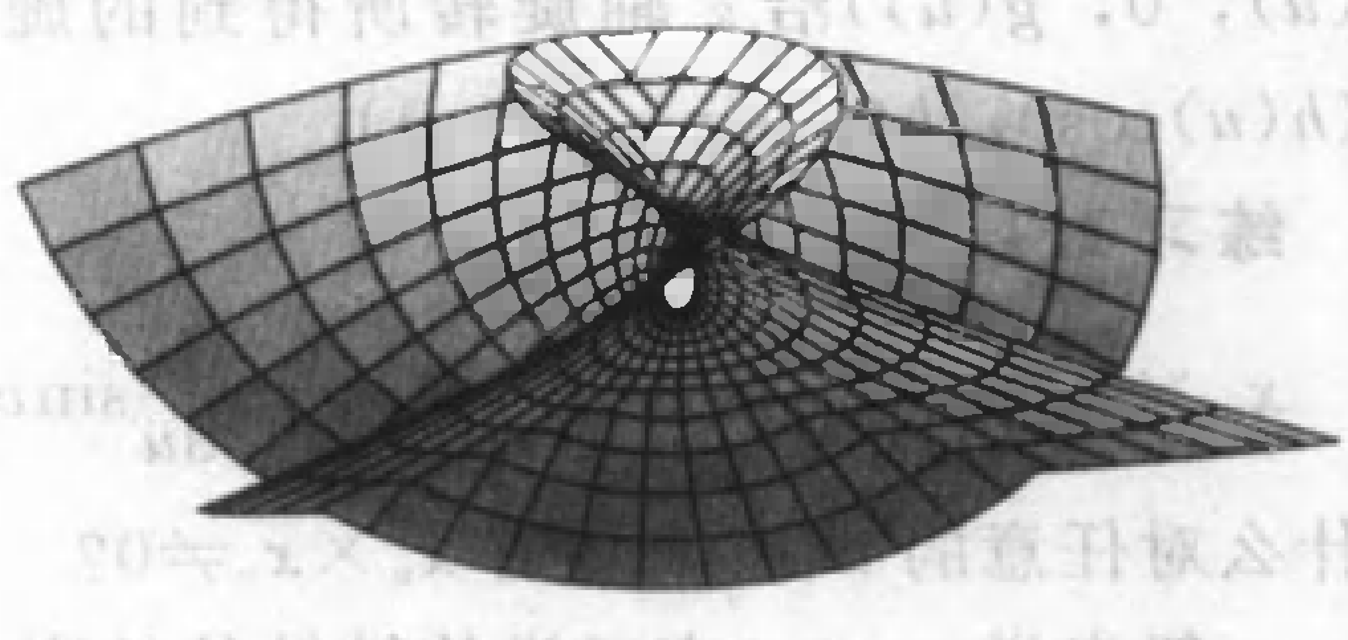


图 2-11　Enneper 曲面

其中 β，δ 是曲线．也就是说，整个曲面被这个坐标补片覆盖，这个坐标补片由从曲线 $\beta(u)$ 出发沿 $\delta(u)$ 方向的直线发散而成．曲线 $\beta(u)$ 称为曲面的*准线*(directrix)，以 $\delta(u)$ 为方向向量的直线称为*母线*(ruling)．曲面为*双直纹面*(doubly ruled)，如果它有两个不同的直纹坐标补片 $\mathbf{x}(u, v)=\beta(u)+v\delta(u)$ 和 $\mathbf{y}(u, v)=\alpha(u)+v\gamma(u)$．直纹面上可能存在点满足 $\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v=\beta'(u)\times\delta(u)+v\delta'(u)\times\delta(u)=0$．练习 2.1.24 表明有办法处理这样的点．下面是两个著名的直纹曲面的例子．

77~80 **例 2.1.17**(锥面)　$\mathbf{x}(u, v)=\mathbf{p}+v\delta(u)$，其中 $\mathbf{p}$ 是固定点．

例 2.1.18(圆柱面)　$\mathbf{x}(u, v)=\beta(u)+v\mathbf{q}$，其中 $\mathbf{q}$ 是固定方向向量．

练习 2.1.19　找出标准锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和标准圆柱面 $x^2+y^2=1$ 的形如例 2.1.17 和例 2.1.18 的直纹坐标补片．这也解释了为什么上面给出的坐标补片被称为锥面和圆柱面．

练习 2.1.20　证明马鞍面(saddle surface)$z=xy$ 为双直纹面，如图 2-12 所示．

练习 2.1.21　证明螺旋面为直纹面．

练习 2.1.22　单叶双曲面(如图 2-13 所示)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其参数方程为

$$\mathbf{x}(u,v)=(a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u).$$

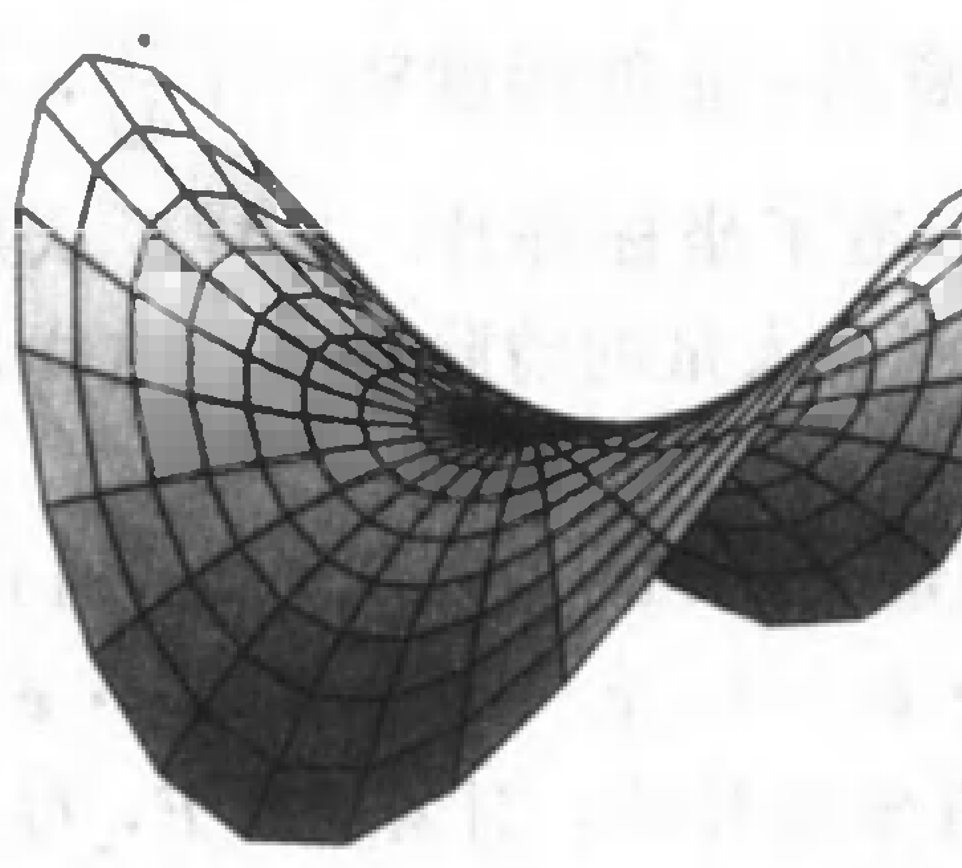


图 2-12　马鞍面

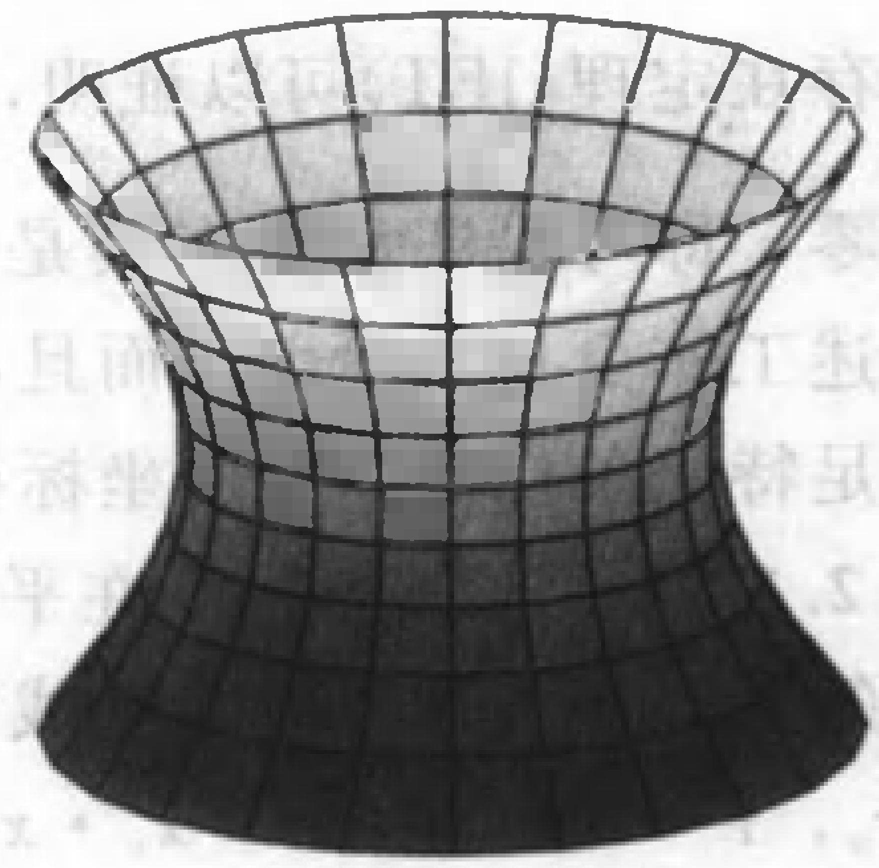


图 2-13　单叶双曲面

但是它不是直纹坐标补片．对这个曲面可以找到两个(相关)直纹坐标补片．即证明它是双直纹面．提示：一条准线为 $\beta(u)=(a\cos u, b\sin u, 0)$．令 $\delta(u)=\beta'(u)+(0, 0, c)$．因为它们是直纹面，所以单叶双曲面在工程上是很有用的．例如，核反应冷却塔的外形就是单叶双曲面，因为这样可以沿它的母线建造一条笔直的梁(见[Whi84])．此时塔上的压力小(即无内部弯曲)且易于建造．那么其他什么地方也使用了这一形状呢？观察海贝型靠背柳条椅墓面的结构，你注意到什么了吗？为什么？

练习 2.1.23　证明单叶双曲面的另一坐标补片是

$$x(u,v)=\left(a\frac{u-v}{u+v},b\frac{1+uv}{u+v},c\frac{uv-1}{u+v}\right).$$

特别地，取 $a=b=c=1$，相应的曲线是 $x^2+y^2-z^2=1$．这一坐标补片上的 u，v-参数曲线是什么样的？将它们和上个练习中含有母线的坐标补片中的曲线作一比较．

练习 2.1.24　假设 M：$x(u, v)=\beta(u)+v\delta(u)$ 为直纹面，其中 $|\beta'|=1$，$|\delta|=1$，且 $\delta'\neq 0$，则 M 不是柱面．证明 M 存在形如 $y(u, w)=\gamma(u)+w\delta(u)$ 的参数方程，其中 $\gamma'\cdot\delta'=0$．注意 γ 未必是单位速度的，形如 γ 的曲线称为 M 的严格线．证明 M 上满足 $x_u\times x_v=0$ 的点必在严格线上．提示：记 $\gamma(u)=\beta(u)+r(u)\delta(u)$，利用 $\gamma'\cdot\delta'=0$，得到 $r(u)$．令 $w=v-r(u)$．

练习 2.1.25　求螺旋面和单叶双曲面的严格线．对于单叶双曲面，为方便起见，假设 $a=b=c=1$．

练习 2.1.26　假设 M：$x(u, v)=\beta(u)+v\delta(u)$ 为直纹面，证明 M 存在形如 $y(u, w)=\varepsilon(u)+w\delta(u)$ 的参数方程，其中 $\varepsilon'\cdot\delta=0$．提示：记 $\varepsilon(u)=\beta(u)+s(u)\delta(u)$，利用 $\varepsilon'\cdot\delta=0$，得到 $s(u)$．答案可能为积分形式．我们将利用这一结果证明稍后的卡塔兰定理．找出柱面 $x(u, v)=\beta(u)+vq$ 一个这样的参数方程．

本节坐标补片的定义为我们提供了丰富的例子，我们可以在这些曲面上验证曲率的概念 81～82
(及它在几何上的作用)．但是在进一步讨论之前，必须注意下面几个重要问题．

(1)坐标补片可能漏掉曲面上的一个或一系列点．这一缺陷意味着我们通常定义的特殊的单个坐标补片并不能完全定义整个曲面．通常情况下，需要多个坐标补片覆盖整个曲面．以我们定义的球面的坐标补片为例，南北极就不在坐标补片上．

(2)其他简单的验证条件也能给出曲面．例如，给出水平点集 $g(x, y, z)=c$，则由隐

(反)函数存在定理(IFT)可以证明，对于水平点集中的任意点，g 的梯度$\nabla g=\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right)$存在且非零，即可保证水平点集是个曲面. 实质上 IFT 构造了坐标补片. 这样，从某种意义上说，上述工作更具一般性. 而且，"坐标补片逼近"之后产生大量的清除运算. 这样，只是着重研究满足特定条件的曲面的坐标补片.

练习 2.1.27(预备练习) 在平面标准坐标系下，以向量 $e_1=(1,0)$，$e_2=(0,1)$代替 x_u，x_v. 这两条参数曲线分别为水平线和垂直线. 我们有 $e_1\cdot e_1=1$，$e_1\cdot e_2=0$，$e_2\cdot e_2=1$. 令 $E=x_u\cdot x_u$，$F=x_u\cdot x_v$，$G=x_v\cdot x_v$，并对本节给出的所有坐标补片，计算 E，F，G. 坐标补片和平面本身有什么相同又有什么不同？特别地，F 意味着什么？

2.2 曲面的几何性质

现在对于曲面，我们有了一些了解，但是怎样发掘它的几何性质呢？数学其实也是所有自然科学中最重要的技巧就是线性近似. 面对非线性或弯曲对象，直接研究过于复杂，就可以用直线、平面、欧几里得空间进行线性逼近，然后研究这些线性对象，从而推导出原始的弯曲对象的性质. 当然，在曲线上建立 Frenet 标架，正是类似的工作. 这一过程对于从微分方程到代数拓扑等学科都是有意义的.

然而问题是使用什么类型的线性空间逼近曲面呢？正如在单变量微积分中用切线来逼近曲线上的点，同样地可以用*切平面* $T_p(M)$逼近平面 M 上的点 p 的邻域. 平面是由向量组成的，那么一个很自然的想法就是 $T_p(M)$由 M 上曲线的速度向量组成.

正式地称向量$v_p\in T_p(M)$与 M *相切*(tangent)于 p 点，如果v_p 是 M 上某曲线的速度向量.
83 这样，存在 $\alpha: I\to M$，使得 $\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=v_p$. 通常在不引起混淆的情况下，用v 代替v_p. M 在 p 点处的*切平面*(tangent plane)的定义是

$$T_p(M)=\{v\,|\,v\text{ 在 }p\text{ 点切于 }M\}.$$

立刻得到两条经过 $p=x(u_0,v_0)$、速度分别是 x_u，x_v 的 u，v-参数曲线. 下面的引理说明每个切向量都是 x_u，x_v 的(唯一)线性组合. 因此，$\{x_u,x_v\}$是向量空间 $T_p(M)$的一组*基*(basis)(回忆"基"的定义).

引理 2.2.1 *$v\in T_p(M)$当且仅当$v=\lambda_1x_u+\lambda_2x_v$，其中 x_u，x_v 取点(u_0,v_0)处的值.*

证明 首先假设曲线 α 满足$\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=v$. 可知 $\alpha(t)=x(u(t),v(t))$. 由链式法则，得 $\alpha'=x_u(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)+x_v(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)$. 现在 $\alpha(0)=p=x(u(0),v(0))$，故 $u(0)=u_0$，$v(0)=v_0$(因为 x 是 1-1 的)，并且

$$v=\alpha'(0)=x_u(u_0,v_0)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0)+x_v(u_0,v_0)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0).$$

因此 $\lambda_1=(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)(0)$，$\lambda_2=(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)(0)$.

现在假设$v=\lambda_1x_u+\lambda_2x_v$(其中 x_u，x_v 取点(u_0,v_0)处的值). 我们要找到 M 上的曲线使得 $\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=v$. 利用坐标补片 x 定义下面的曲线

$$\alpha(t)=x(u_0+t\lambda_1,v_0+t\lambda_2).$$

则 $\alpha(0)=p=x(u(0),v(0))$，且

$$\alpha'(t)=\boldsymbol{x}_u(u_0+t\lambda_1,v_0+t\lambda_2)\frac{\mathrm{d}(u_0+t\lambda_1)}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{x}_v(u_0+t\lambda_1,v_0+t\lambda_2)\frac{\mathrm{d}(v_0+t\lambda_2)}{\mathrm{d}t}$$
$$=\boldsymbol{x}_u(u_0+t\lambda_1,v_0+t\lambda_2)\lambda_1+\boldsymbol{x}_v(u_0+t\lambda_1,v_0+t\lambda_2)\lambda_2.$$

于是 $\alpha'(0)=\boldsymbol{x}_u\lambda_1+\boldsymbol{x}_v\lambda_2$. ■

怎样利用一个方程判断切平面呢？有一种方法适合$\mathbb{R}^3$中的任意平面．一个平面由点p和平面(在p点处)的法向量N决定．取使得$q-p$与N垂直的任意点q，即$N\cdot(q-p)=0$或者对于$q=(x, y, z)$，$p=(x_0, y_0, z_0)$，$N=(a, b, c)$，有

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$$
$$ax+by+cz+d=0,$$

其中$d=-(ax_0+by_0+cz_0)$．这显然是通常的平面方程．事实上，我们已经知道了如何取$T_p(M)$的法向量．因为$\{\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v\}$是切空间$T_p(M)$的基，只需找一个和$\boldsymbol{x}_u$，$\boldsymbol{x}_v$(由此对任意$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{x}_u+\lambda_2\boldsymbol{x}_v$)都垂直的向量即可，这个向量就是叉积$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v$．因此，如果$\boldsymbol{x}$是曲面满足$\boldsymbol{x}(u_0, v_0)=p$的坐标补片，那么$T_p(M)$的法向量(如图2-14所示)为

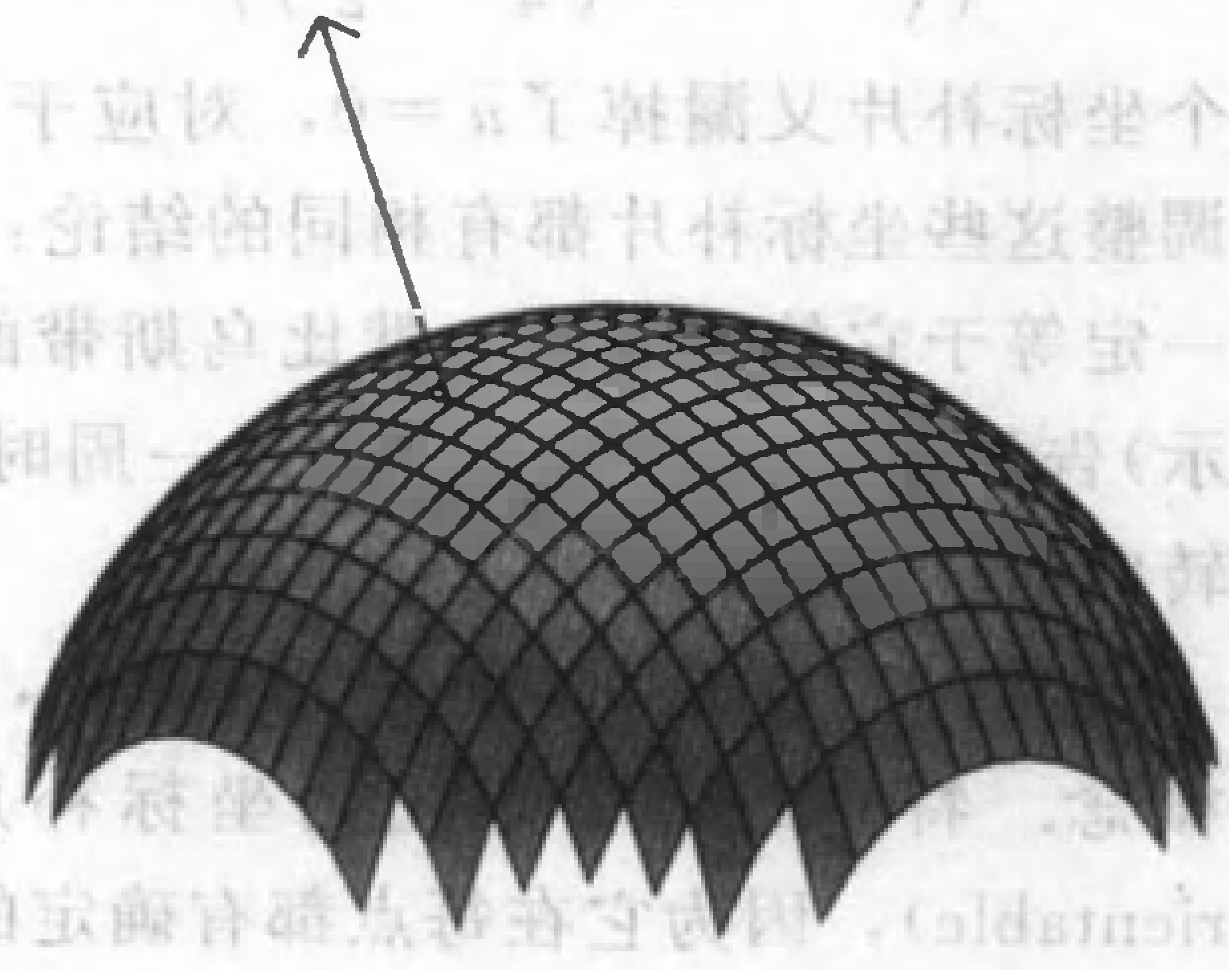


图 2-14　曲面的法向量

$$\mathcal{N}=\boldsymbol{x}_u(u_0,v_0)\times\boldsymbol{x}_v(u_0,v_0).$$

例 2.2.2(双变量函数)　设M是函数$z=f(x, y)$的图像．蒙日坐标补片是$\boldsymbol{x}(u, v)=(u, v, f(u, v))$，且$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v=(-f_u, -f_v, 1)$．如果$p=(u_0, v_0, f(u_0, v_0))$，则$T_p(M)$的方程为

$$-f_u(u_0,v_0)(x-u_0)-f_v(u_0,v_0)(y-v_0)+(z-f(u_0,v_0))=0.$$

例如，如果$z=x^2+y^2$，对于$p=(x_0, y_0, x_0^2+y_0^2)$，有

$$-2x_0(x-x_0)-2y_0(y-y_0)+(z-(x_0^2+y_0^2))=0,$$

化简得

$$2x_0x+2y_0y-z=x_0^2+y_0^2.$$

特别地，对$p=(1, 0, 1)$，有切线方程$2x-z=1$.

例 2.2.3(半径为R的球面)　给出球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的地面坐标．回忆法向量为

$$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v=(R^2\cos u\cos^2 v,R^2\sin u\cos^2 v,R^2\sin v\cos v).$$

(注意$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v=(R\cos v)p$是球面上点$p$的倍数，这说明从原点出发的半径向量在$\pi/2$角度时到达球面)．假设$p=(R, 0, 0)$．则$u=0$，$v=0$，那么，$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v$在$p$点处即为$(R^2, 0, 0)$，$T_p(M)$的方程是 84~85

$$(R^2,0,0)\cdot(x-R,y,z)=0$$
$$R^2x=R^3$$
$$x=R.$$

这正是球面在$(R, 0, 0)$处的切平面.

事实上，我们对切平面方程——刻画了曲面几何性质的法向量并不感兴趣．当沿切向量确

定的方向移动时，知道法向量方向的变化情况，那么就知道了曲面上沿此方向曲线的弯曲情况．这是很重要的．当曲面需要多于一个坐标补片覆盖时，各个坐标补片的法向量极有可能并不相容，细节参考[dC76 p. 102]．这样的曲线称为不可定向的(nonorientable)．第一个例子是

例 2.2.4(默比乌斯带)　考虑正则参数曲线

$$x(u,v)=\left(\left(2-v\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin u,\left(2-v\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos u,v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right),$$

其中，$0<u<2\pi$ 且 $-1<v<1$．这个坐标补片去掉了 $u=0$ 的区间，故还需要另外一个坐标补片，这个坐标补片可以定义为 $y(\bar{u},\bar{v})$：

$$\left(\left(2-\bar{v}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\bar{u}}{2}\right)\right)\cos\bar{u},-\left(2-\bar{v}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\bar{u}}{2}\right)\right)\sin\bar{u},\bar{v}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\bar{u}}{2}\right)\right),$$

这个坐标补片又漏掉了 $\bar{u}=0$，对应于 $u=\pi/2$．无论怎么调整这些坐标补片都有相同的结论：(x 的)单位法向量一定等于它的相反数．默比乌斯带的图像(如图 2-15 所示)告诉我们，当环绕闭曲线一周时，它的法线是如何转向的．

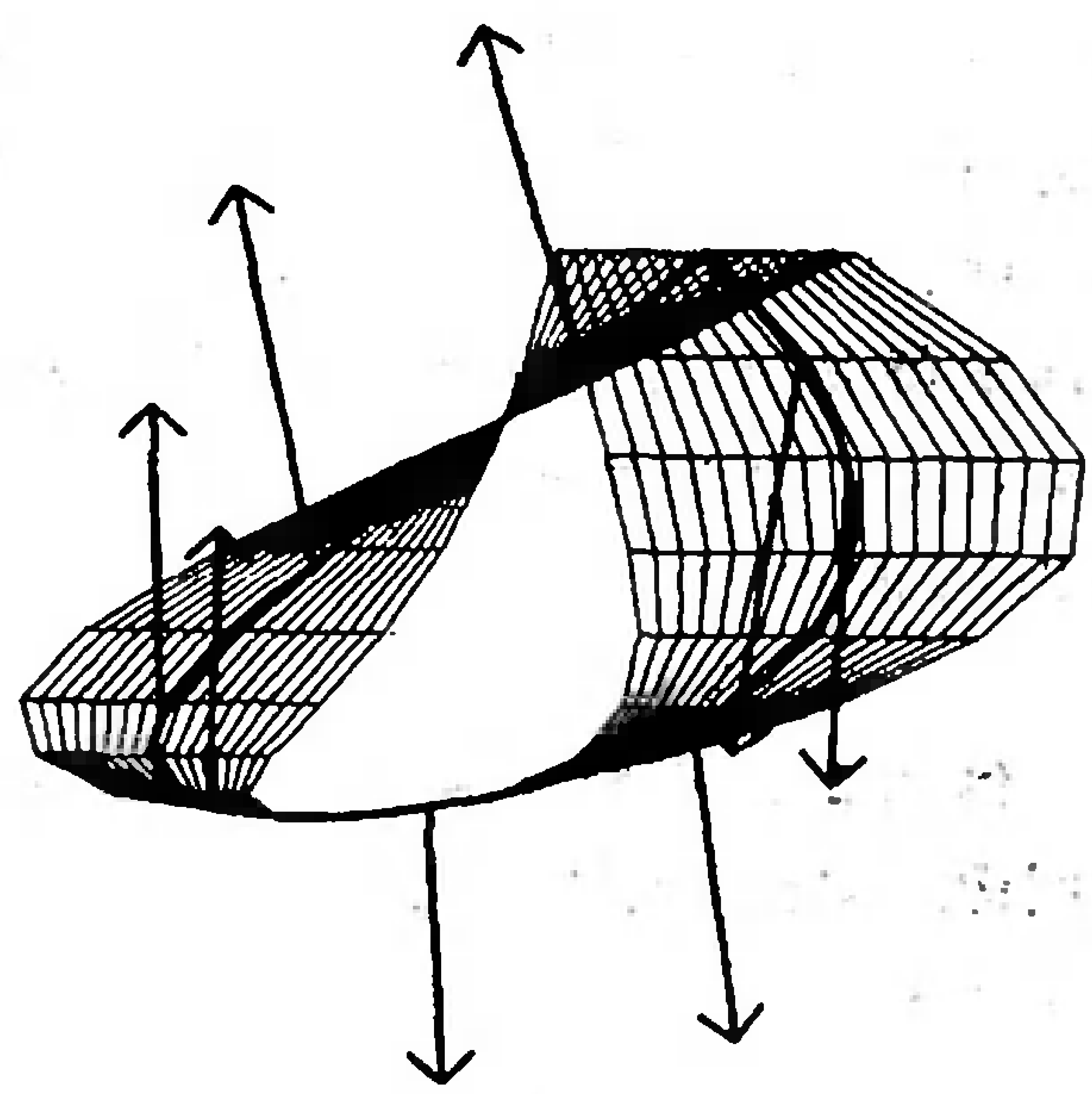


图 2-15　默比乌斯带

因为在本书的其他地方少有提及，我们会淡化定向的概念．特别地，单个正则坐标补片 x 是可定向的(orientable)，因为它在每点都有确定的法向量

$$U=\frac{x_u\times x_v}{|x_u\times x_v|}$$

(注意，交换 x_u，x_v 的次序，坐标补片每点处的 U 都变成 $-U$)．这引出了曲面是可定向的一般定义．即如果曲面存在光滑的单位法向量场，则它是可定向的．除个别的例子如 Henneberg 曲面(默比乌斯带是它的一部分)之外，我们所研究的曲面都是可定向的．

现在回到讨论的问题上来，即如何用单位法向量的变化描述曲面的几何性质．为了看到怎样计算给定方向上的变化，首先来看切向量如何作用于一个函数上．设 $g(x, y, z)$是函数，$\alpha(t)=(\alpha^1(t), \alpha^2(t), \alpha^3(t))$是给定的曲线．根据多元微积分的链式法则，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(\alpha(t)))&=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\mathrm{d}\alpha^1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\mathrm{d}\alpha^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\mathrm{d}\alpha^3}{\mathrm{d}t}\\&=\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}\alpha^2}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}\alpha^3}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\nabla g(\alpha(t))\cdot\alpha'(t),\end{aligned}$$

其中，$\nabla g\overset{\mathrm{def}}{=}\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right)$．取 $\boldsymbol{v}\in T_p(M)$，并假定 g 限定在 $M\subseteq\mathbb{R}^3$ 上．那么 g 在 M 上沿 $\boldsymbol{v}$ 方向是怎样变化的？而 M 上 $\boldsymbol{v}$ 方向本身就意味着曲线 α 上 p 点处的方向，其中 $\alpha'=\boldsymbol{v}$．g 在 $\boldsymbol{v}$

方向的方向导数为

$$\boldsymbol{v}[g](p) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(\alpha(t)))|_{t=0} = \nabla g(p) \cdot \boldsymbol{v},$$

其中 $\alpha(0)=p\in M$，$\alpha'(0)=\boldsymbol{v}$.（注意后一个等式说明方向导数不依赖速度向量为$\boldsymbol{v}$的过 p 点的曲线的选取）. 因此$\boldsymbol{v}$作用在函数 g：$M\to\mathbb{R}$ 得到数$\boldsymbol{v}[g]$，这就是为什么用$\boldsymbol{v}[g]$表示方向导数. 注意通常的多元函数的方向导数也有相同的定义. 只是给出的函数 g 未必限制在曲面 M 上，且方向向量$\boldsymbol{v}$可能是$\mathbb{R}^3$ 中的任意向量. 很多情况下，$\boldsymbol{v}$表示 M 上的向量场(vector field)——对于 M 上的任意点 p，选取 p 的一个切向量，使得这个切向量的集合是光滑变化的——那么，由$\boldsymbol{v}[g](p)=\boldsymbol{v}_p[g]$给出了 M 上一个新的函数(这里所说的向量场$\boldsymbol{v}$在 M 上是光滑变化的，如果对任意曲线 α：$I\to M$，$t\to\boldsymbol{v}(\alpha(t))$是可微的). 86～87

如果 f 是 M 上的函数，则对于坐标补片 $\boldsymbol{x}$ 有复合映射 $f(\boldsymbol{x}(u, v))=f\circ\boldsymbol{x}$. 则在 M 的坐标补片上，f 是 u，v 的函数. 因而可以记

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial(f\circ\boldsymbol{x})}{\partial u}.$$

对 v 有类似的公式. 因为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\boldsymbol{x}(u, v_0))=\boldsymbol{x}_u$，所以

$$\boldsymbol{x}_u[f] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(f(\boldsymbol{x}(u,v_0)))|_{u=u_0} = \frac{\partial f}{\partial u}|_{u=u_0},$$

且此等式对任意的 f 都成立. 也就是说，u-参数速度向量作用于函数上得到函数的 u-偏导数(结合坐标补片).

练习 2.2.5　证明莱布尼茨法则(乘积法则)成立，即对$\boldsymbol{v}\in T_p(M)$，有$\boldsymbol{v}[fg]=\boldsymbol{v}[f]g(p)+f(p)\boldsymbol{v}[g]$.

练习 2.2.6　证明$\boldsymbol{v}[x]=v^1$，$\boldsymbol{v}[y]=v^2$，$\boldsymbol{v}[z]=v^3$，其中$\boldsymbol{v}=(v^1, v^2, v^3)$.

练习 2.2.7　利用上述讨论和练习 2.2.6、练习 2.2.5，证明对于函数 f：$M\to\mathbb{R}$ (M 的参数方程为$\boldsymbol{x}(u, v)=(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$)，有

$$\boldsymbol{x}_u[f] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u}$$

以及

$$\boldsymbol{x}_v[\boldsymbol{x}_u[f]] = \sum_j\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\partial v}.$$

若置换 u，v，结果如何？

练习 2.2.8　假设曲面 M 是函数 g 的水平点集合 $g(x, y, z)=c$. 证明 M 上的任一点 p 的法向量为$\nabla g(p)$. 提示：取$\boldsymbol{v}\in T_p(M)$且利用$\boldsymbol{v}$的定义及链式法则证明$\nabla g(p)\cdot\boldsymbol{v}=0$. 因而，对水平点集合，还有另外一种获得其法线的方法. 试应用于球面 $g(x, y, z)=x^2+y^2+z^2=R^2$. 88

重要说明　在微积分中，通常用单位向量$\boldsymbol{v}$定义方向导数. 这样做是因为我们想要寻找$\boldsymbol{v}$方向上函数的变化，而不希望$\boldsymbol{v}$的大小影响计算结果. 通常取曲面的单位法线，令

$$U = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}.$$

现在，当我们问及 U 在给定方向上如何变化时，仅仅测量 U 在方向上的变化——而这正是刻画曲面形状的量．M 上的法向量 U 是指取 M 上任意一点 p，指定一个向量 $U(p)\in \mathbb{R}^3$．因为它是$\mathbb{R}^3$ 中的向量，故 $U(p)=(u^1(p),\ u^2(p),\ u^3(p))$，亦可写成

$$U = (u^1, u^2, u^3).$$

或者在$\mathbb{R}^3$ 的基 $e_1=(1,\ 0,\ 0)$，$e_2=(0,\ 1,\ 0)$，$e_3=(0,\ 0,\ 1)$的意义下，写成

$$\begin{aligned} U &= u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3 \\ &= \sum_{i=1}^{3} u^i e_i, \end{aligned}$$

其中 u^1，u^2，u^3 是 M 到$\mathbb{R}$ 的函数．因为对每个 $p\in M$，都有 U 在 p 点的向量，所以称 U 是 M 的向量场．类似地，对应于 M 上的每一点存在$\mathbb{R}^3$ 中的任一指定向量，它在 M 上的变化是光滑的，就可称其为 M 的向量场．

那么怎样刻画 U 在方向$v \in T_p(M)$上的变化呢？可以仅仅观察函数 u^1，u^2，u^3 在v方向上的变化，也就是考虑 u^1，u^2，u^3 在v 方向上的方向导数．当然，因为v 位于点 p，故我们感兴趣的只是 U 在v 方向上的初始变化率，所以计算在 0 处($\alpha(0)=p$)的导数．把 U 在v 方向上的初始变化率命名为共变微商(covariant derivative)．这里忽略了一点，即为了取$\mathbb{R}^3$ 上的微商，需要 U 定义在开集上，而非简单地定义在 M 上．当然可以通过扩充将 U 定义在拓广的 M 上．只要满足 U 在 M 上定义相同，延伸部分如何定义没有关系．例如，沿 M 的法向量简单移动离开M 一小段，定义 U 的延伸，使得它们在 M 上的定义一致．在练习 8.3.1 中可以看到这个特殊延伸无关紧要(也将看到更一般的关于共变微商的讨论)．

89 虽然这种表达多少有些怪异，但只需记住共变微商只是把普通的方向导数应用到 U 的坐标函数上，可以表示为

$$\begin{aligned} \nabla_v U &\overset{\text{def}}{=} (v[u^1], v[u^2], v[u^3]) \\ &= \sum_{i=1}^{3} v[u^i]e_i. \end{aligned}$$

事实上，定义的是$\mathbb{R}^3$ 上的共变微商．要得到 M 上某一点的共变微商，必须把$\mathbb{R}^3$ 上的共变微商投影到 M 在该点的切平面上(见 2.2 节)．引理 2.2.10 表明，对于单位法向量场最后一步是不必要的．

练习 2.2.9 假设 $Z=\sum_k z^k(x_1,\ x_2,\ x_3)e_k$ 是曲面 M：$x(u,\ v)=(x_1(u,\ v),\ x_2(u,\ v),\ x_3(u,\ v))$的向量场．先证明

$$\nabla_{x_u} Z = \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial z^k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)e_k$$

和

$$\nabla_{x_v} Z = \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial z^k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)e_k.$$

然后证明二次共变微商可变换．也就是说，用链式法则(和练习 2.2.7)得到

$$\nabla_{x_v}\nabla_{x_u}Z=\sum_k\left\{\sum_i\left[\left(\sum_j\frac{\partial^2 z^k}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v}\right)+\frac{\partial z^k}{\partial x_i}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\partial v}\right]\right\}e_k$$
$$=\nabla_{x_u}\nabla_{x_v}Z.$$

现在回到单位法向量场 U 的情形. 从 $\boldsymbol{v}[\cdot]$ 的定义看出

$$\nabla_{\boldsymbol{v}}U=\sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^i(\alpha(t)))|_{t=0}e_i$$

其中 $\alpha(0)=p$, $\alpha'(0)=\boldsymbol{v}$. 注意如果 $U(t)$ 是沿曲线 $\alpha(t)$ 定义的，对每个坐标用链式法则，可以写成 $U_t=\mathrm{d}U/\mathrm{d}t=\nabla_{\alpha'(t)}U$. 由上述讨论知道，$\nabla_{\boldsymbol{v}}U$ 告诉我们在 $\boldsymbol{v}$ 方向 M 是如何弯曲的. 也就是说，$\nabla_{(\cdot)}U$ 确定了曲线的形状. 因而定义

$$S_p(\boldsymbol{v})=-\nabla_{\boldsymbol{v}}U$$

为 M 在 p 点的形状算子(shape operator)(或外恩加滕映射). S_p 定义中的负号是个简单约定，它给出“正”“负”曲率适当的含义. 同样注意，如果选择 $-U$ 作为法向量，S 的符号也作相应的 90
改变. S 称为算子是因为下述引理.

引理 2.2.10 *S_p 是 T_pM 的线性变换.*

证明 回忆 T: $V\to V$ 是向量空间 V 到自身的线性变换，如果它满足两个性质：(1) $T(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=T(\boldsymbol{v}_1)+T(\boldsymbol{v}_2)$；(2) $T(c\cdot\boldsymbol{v})=c\cdot T(\boldsymbol{v})$，其中 c 是任意常数. 要证明引理，首先要说明 $S_p(\boldsymbol{v})$ 是 T_pM 中的向量. 证明这点只需证明 $S_p(\boldsymbol{v})$ 垂直于 U(因为 T_pM 由在 p 点垂直于向量 U 的向量组成). 由于 U 是单位向量场，$U\cdot U=(u^1)^2+(u^2)^2+(u^3)^2=1$. 又由通常的莱布尼茨法则，$\boldsymbol{v}[U\cdot U]=2\nabla_{\boldsymbol{v}}U\cdot U$(需证明). 这样对任意 $\boldsymbol{v}$，$0=\boldsymbol{v}[1]=\boldsymbol{v}[U\cdot U]=2\nabla_{\boldsymbol{v}}U\cdot U$，即 $\nabla_{\boldsymbol{v}}U\cdot U=0$. 也就是说 $\nabla_{\boldsymbol{v}}U$ 垂直于 U.

为证明 S_p 是线性的，必须证明(1)对任意 $a\in\mathbb{R}$，$S_p(a\boldsymbol{v})=aS_p(\boldsymbol{v})$，且(2) $S_p(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=S_p(\boldsymbol{v})+S_p(\boldsymbol{w})$. (1)由 $\nabla_{\boldsymbol{v}}U$ 的定义立即可知. 只要对任意函数 f，$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})[f]=\boldsymbol{v}[f]+\boldsymbol{w}[f]$，那么(2)成立. 根据下面练习完成证明. ■

练习 2.2.11 设 $\alpha(t)=\boldsymbol{x}(u(t),v(t))$，$\beta(t)=\boldsymbol{x}(\bar{u}(t),\bar{v}(t))$ 且 $\alpha(0)=p=\beta(0)$ 又 $\alpha'(0)=\boldsymbol{v}$，$\beta'(0)=\boldsymbol{w}$，证明对于 $\gamma(t)=\boldsymbol{x}((u(2t)+\bar{u}(2t))/2,(v(2t)+\bar{v}(2t))/2)$，$\gamma'(0)=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$. 利用梯度公式证明 $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})[f]=\boldsymbol{v}[f]+\boldsymbol{w}[f]$.

因为 S_p: $T_p(M)\to T_p(M)$ 是线性变换，所以可以用线性代数的所有工具. 特别地，S_p 具有矩阵形式(以下我们将讨论)，且诸如行列式、迹、特征值这些标准的不变量都有着深刻的几何意义. 因此形状算子是我们研究嵌入 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面的几何性质的所有工具中最基本的.

练习 2.2.12(M 是 $\mathbb{R}^3$ 中的平面) 已知 $U=\sum u^ie_i$ 是常量. 因为 u^i 是常量，所以，对任意 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}[u^i]=0$. 所以，对任意 $\boldsymbol{v}$，$S_p(\boldsymbol{v})=-\nabla_{\boldsymbol{v}}U=-\sum\boldsymbol{v}[u^i]e_i=0$. 这样，就有一种直观的印象，平面是平的——形状算子表明平面没有“形状”.

例 2.2.13($S^2(R)$ 是半径为 R 的球面) 利用半径为 R 的球的标准参数方程 $\boldsymbol{x}(u,v)=(R\cos u\cos v,R\sin u\cos v,R\sin v)$ 且切向量的一组基为

$$\boldsymbol{x}_u=(-R\sin u\cos v,R\cos u\cos v,0),$$
$$\boldsymbol{x}_v=(-R\cos u\sin v,-R\sin u\sin v,R\cos v).$$

同样单位法向量是 $U=(\cos u\cos v,\ \sin u\cos v,\ \sin v)$. 为弄清 $S^2(R)$上的形状算子 S，只需要知
91 道 S 在基$\{x_u,\ x_v\}$上的作用. 由上述讨论知 $x_u[f]=\frac{\partial f}{\partial u}=f_u$，对 v 也有类似结论. 因而

$$\begin{aligned}S(x_u)&=-\nabla_{x_u}U\\&=-(x_u[\cos u\cos v],x_u[\sin u\cos v],x_u[\sin v])\\&=-(-\sin u\cos v,\cos u\cos v,0)\\&=-\frac{x_u}{R}.\end{aligned}$$

类似的计算可得 $S(x_v)=-\frac{x_v}{R}$，故形状算子是每个切向量的$-\frac{1}{R}$倍，对应矩阵为$-\frac{1}{R}I$，其中 I 是 2×2 单位矩阵.

练习 2.2.14 M 为圆柱面$x^2+y^2=R^2$，参数方程 $x(u,\ v)=(R\cos u,\ R\sin u,\ v)$，证明 M 的形状算子在基上的作用是 $S(x_u)=-\frac{1}{R}x_u$，$S(x_v)=0$. 因此，在 u-方向圆柱类似球面，在 v-方向类似平面. 显然，直觉上这是完全正确的，为什么呢?

练习 2.2.15 对于环面 $x(u,\ v)=((R+r\cos u)\cos v,\ (R+r\cos u)\sin v,\ r\sin u)$，形状算子在基上的作用是 $S(x_u)=-x_u/r$，$S(x_v)=(-\cos u)/(R+r\cos u)x_v$.

练习 2.2.16 马鞍面 $z=xy$ 的参数方程是 $x(u,\ v)=(u,\ v,\ uv)$. 形状算子 S 在给定基上的作用为

$$S(x_u)=\frac{-uv}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}x_u+\frac{1+v^2}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}x_v$$

$$S(x_v)=\frac{1+u^2}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}x_u-\frac{uv}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}x_v.$$

我们已经看到，平面的形状算子为 0. 直观上，因为形状算子刻画了曲面在单位法线 U 上的变化，所以曲面 M 的形状算子为 0 意味着 M 是平面. 这由下述结论证实. 注意形状算子的代数条件必能转化成 M 上几何性质的限制——一个刻画平面的限制. 由于平面是由点 p 和法向量 U 决定的，那么平面就是满足$(q-p)\cdot U=0$ 的点 q 的集合.

定理 2.2.17 *如果对任意 $p\in M$ 都有 $S_p=0$，则 M 包含在平面内.*

证明 固定 $p\in M$ 及单位法向量$U(p)$，并取任意点 $q\in M$. 只需证明 q 在 p 和 $U(p)$确定
92 的平面内，也即$(q-p)\cdot U(p)=0$. 由 q 的任意性知，M 在平面内. 取 M 上满足 $\alpha(0)=q$，$\alpha(1)=p$ 的曲线 α，定义函数

$$f(t)=(q-\alpha(t))\cdot U(\alpha(t)).$$

根据乘积法则及$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\nabla_{\alpha'(t)}U$，计算这个函数的导数. 因为$\alpha'(t)\in T_{\alpha(t)}M$垂直于$U(\alpha(t))$，又根据假设，$\nabla_{\alpha'(t)}U(\alpha(t))=-S_{\alpha(t)}(\alpha'(t))=0$，故

$$\begin{aligned}f'(t)&=-\alpha'(t)\cdot U(\alpha(t))+(q-\alpha(t))\cdot\nabla_{\alpha'(t)}U(\alpha(t))\\&=0.\end{aligned}$$

由于 f 的导数是 0，故函数 $f(t)$是常数. 只需计算 f 在 0 点的值，就可以确定这个常数. 因为

$\alpha(0)=q$，故此常数是 0. 故对任意的 t，有 $(q-\alpha(t))\cdot U(\alpha(t))=0$. 特别地，当 $t=1$ 时，$(q-p)\cdot U(p)=0$，这就完成了证明. ■

2.3 曲面的线性代数

要得到 S 在曲面 M 上的精确整体描述可能比较困难，即使是稍微复杂一点的例子. 而且，即使可以得到形状算子(在基上)的精确表示，也无法给出更多的信息(如上面的马鞍面). 无论如何，根据形状算子的计算可以得到一些 M 的几何性质. 因此形状算子的作用并非在于计算，而是体现在可以用线性代数的理论来描述几何性质. 利用这一思想，可以得到关于形状算子理论上的结果. 证明过程中的计算在以后都很有用. 首先有必要回忆以下线性代数的知识.

假设 $T: V\to V$ 是向量空间 V 的线性变换. 给定 V 的一组基 $\mathcal{B}=\{x_1, \cdots, x_n\}$，则 T 可以表示成矩阵 A，该矩阵用如下方法可以得到：首先，因为 $\mathcal{B}$ 为基，故 $T(x_i)=\sum_{j=1}^{n} a^{ji}x_j$. 其次，对于固定的 i 可以将 a^{ji} 归结为 A 的第 i 列. 这样对每个 i 做下去得到 $A=(a^{ji})$ 为 $n\times n$ 矩阵. 这个矩阵作用在 $e_i=(0, \cdots, 0, 1^i, 0, \cdots, 0)$(作为列向量，用这组基表示 x_i)上得到 $a=(a^{1i}, a^{2i}, \cdots, a^{ni})$. 这里向量 x_i 和 $T(x_i)$ 分别等同于 e_i 和 a 相对于基 $\mathcal{B}$ 的系数矩阵. 注意，不论线性变换 T 是否依赖于基的选取，表示矩阵 A 依赖于基的选取. 若选择 V 中不同的基，那么 $T(x_i)$ 表达式中的系数也就相应变换产生了新的矩阵. 对线性变换 T，如果存在非零的向量 v 和实数 λ 满足

$$T(v)=\lambda v,$$

此时 λ 称为 T 的对应于特征向量(eigenvector) v 的特征值(eigenvalue). 如果 V 是 n 维的，且存在 n 个线性无关的特征向量 $v_1, \cdots, v_n$ 及与其对应的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则在 V 的此组基下 93
T 的矩阵是对角矩阵(相当简洁)

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

因此 $\det(T)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$，$\mathrm{tr}(T)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. 一般地，矩阵的行列式是它特征值的积，迹是特征值的和.

例 2.3.1 设 $T: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是满足 $T(1, 0)=(4, 3)$，$T(0, 1)=(-2, -1)$ 的线性变换，则 T 对基 $\{(1, 0), (0, 1)\}$ 的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

假设

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

得到

$$\begin{bmatrix}4-\lambda & -2\\ 3 & -1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

仅当 $\det(T)=0$ 时，矩阵才能把非零向量变为零. 令

$$\det\begin{bmatrix}4-\lambda & -2\\ 3 & -1-\lambda\end{bmatrix}=0,$$

即$(4-\lambda)(-1-\lambda)+6=0$，$\lambda^2-3\lambda+2=0=(\lambda-1)(\lambda-2)$，所以 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$，它们就是 T 的特征值. 为求特征向量，将 λ 的值代回矩阵方程，得到

$$\text{对于 } \lambda=1:\quad \begin{bmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\quad \text{或者}\quad 3a-2b=0\quad \text{或者}\quad \frac{3}{2}a=b.$$

这意味着，对任意形如$\left(a,\ \frac{3a}{2}\right)=\boldsymbol{v}$ 的向量，都满足 $T(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$（因为 $\lambda=1$）. 如取(2，3)，则

$$\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}.$$

练习 2.3.2 证明另一个特征向量为$(a，a)$

94 **练习 2.3.3** 证明若选定$\mathbb{R}^2$ 的一组基为(2，3)和(1，1)，那么 T 相对这组基的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

最后注意，$\lambda_1\lambda_2=2$，$\lambda_1+\lambda_2=3$，且由原始矩阵计算，它们等于

$$\det\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}=-4+6=2\quad \operatorname{tr}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}=4-1=3.$$

线性变换 T：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 称为对称的(symmetric)，如果对任意的$\mathbb{R}^2$ 中的$\boldsymbol{v}$，w 有 $T(\boldsymbol{v})\cdot w=\boldsymbol{v}\cdot T(w)$.（当使用更一般的内积时，这一关系有时也记为$\langle T(\boldsymbol{v})\cdot w\rangle=\langle \boldsymbol{v}，T(w)\rangle$.）

练习 2.3.4

1. 证明相对于标准正交基，若 2×2 矩阵$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$表示对称线性变换，则 $b=c$，此时该矩阵称为对称矩阵(symmetric matrix). 回忆标准正交(orthonormal)基，即是由互相垂直的单位向量组成的基.

2. 证明任意 2×2 对称矩阵有实特征值.

定理 2.3.5 形状算子为对称线性变换，而且 $S(\boldsymbol{x}_u)\cdot\boldsymbol{x}_u=\boldsymbol{x}_{uu}\cdot U$，$S(\boldsymbol{x}_u)\cdot\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{x}_{uv}\cdot U$，$S(\boldsymbol{x}_v)\cdot\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{x}_{vv}\cdot U$.

证明 因为$\{\boldsymbol{x}_u，\boldsymbol{x}_v\}$是 $T_p(M)$ 的基，我们仅需找出关于 $\boldsymbol{x}_u$，$\boldsymbol{x}_v$ 的方程. 注意 U 是 $T_p(M)$的法向量，故 $U\cdot\boldsymbol{x}_u=0=U\cdot\boldsymbol{x}_v$. 观在 $U\cdot\boldsymbol{x}_u$，$U\cdot\boldsymbol{x}_v$ 为函数，故切向量可以作用在它们上面，则

$$\begin{aligned}0&=\boldsymbol{x}_u[0]=\boldsymbol{x}_u[U\cdot\boldsymbol{x}_v]\\ &=\boldsymbol{x}_u\left[\sum_i u^i\frac{\partial x^i}{\partial v}\right]\end{aligned}$$

$$= \sum_i \left(x_u[u^i] \frac{\partial x^i}{\partial v} + u^i x_u \left[\frac{\partial x^i}{\partial v} \right] \right) \qquad \text{由莱布尼茨法则}$$

$$= \sum_i \left(x_u[u^i] e_i \cdot x_v + u^i \frac{\partial^2 x^i}{\partial u \partial v} \right)$$

$$= \nabla_{x_u} U \cdot x_v + U \cdot x_{vu}.$$

因此，$S_p(x_u) \cdot x_v = -\nabla_{x_u} U \cdot x_v = U \cdot x_{vu}$．类似计算，有

$$S_p(x_v) \cdot x_u = -\nabla_{x_v} U \cdot x_u = U \cdot x_{uv}.$$

又 $x_{uv} = x_{vu}$，故结论成立．相同的计算可得 $S(x_u) \cdot x_u = x_{uu} \cdot U$，$S(x_v) \cdot x_v = x_{vv} \cdot U$． ■

推论 2.3.6　*形状控制算子有实特征值．*

由引理 2.2.10 可知，曲面 M：$x(u, v)$的形状控制算子 S 将 M 的切向量变成 M 的其他切向量．特别地，$S(x_u)$，$S(x_v)$都是切向量．因为$\{x_u, x_v\}$是(M 在任一点处)切平面的基，由此可知，$S(x_u) = ax_u + bx_v$，$S(x_v) = cx_u + dx_v$．如果我们定义 95

$$E = x_u \cdot x_u, \quad F = x_u \cdot x_v, \quad G = x_v \cdot x_v;$$

$$l = S(x_u) \cdot x_u, \quad m = S(x_u) \cdot x_v = S(x_v) \cdot x_u, \quad n = S(x_v) \cdot x_v,$$

则可得下述方程：

$$l = aE + bF, \quad m = cE + dF, \quad m = aF + bG, \quad n = cF + dG.$$

由此解得 a，b，c，d 的值(见 2.5 节或手工求解)

$$a = -\frac{Fm - Gl}{EG - F^2}, \quad b = \frac{-Fl + Em}{EG - F^2}, \quad d = \frac{En - Fm}{EG - F^2}, \quad c = -\frac{-mG + Fn}{EG - F^2}. \tag{2.3.1}$$

在 2.5 节我们将用这些公式计算形状算子．

线性代数应用于微分几何还有另外的途径．给定一个曲面映射 F：$M \to N$，可以将其导数定义为任意切平面上的一个线性变换 F_{*p}：$T_p(M) \to T_{F(p)}(N)$．对于任一切向量 v，取曲线 α：$I \to M$，满足 $\alpha(0) = p$，$\alpha'(0) = v$，则这一线性变换(简记为)F_*的定义是

$$F_*(\alpha'(0)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(\alpha(t)))|_{t=0}.$$

现在 $\beta(t) = F(\alpha(t))$是 N 上的简单曲线，且 F_*定义的右边即为 β 在 $F(p)$的速度向量，该定义的几何性质由此可见．为研究 F，用切平面 $T_p(M)$线性逼近 M 上 p 点附近的一部分．对于 $T_p(M)$中的每一个向量，都存在一条曲线，此曲线在此点的速度向量就是该向量，故利用 F 的复合将曲线映射到 N 上，那么该曲线和它在 F 中的像分别充满了 p 和 $F(p)$的邻域．为看出这个局部映射的几何性质，可以用 N 中像曲线的导数再次作线性逼近．由定义，像曲线的速度向量是 M 中原曲线速度向量的像．

我们在曲面映射及其导数上大费周折，不止是因为它比较费解，也是因为它在下面的工作中起着重要作用．特别地，稍后将看到，曲面映射及其导数是比较曲面和其几何性质一个很好的工具．当然，线性变换是它作用在相应基上的结果．所以，对给出的曲面参数 M：$x(u, v)$，F_*也由 $F_*(x_u)$、$F_*(x_v)$完全决定．

例 2.3.7　设 F：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是平面到自身的映射，用坐标形式表出 $F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$．为计算 $F_*(x_u)$，取 u-参数曲线(u, v_0)和 F 的合成，$F(u, v_0) = (f(u, v_0)$， 96

$g(u, v_0)$)并对 u 微分，得(f_u, g_u). 类似计算 v-曲线，有

$$F_*(x_u)=(f_u,g_u) \quad 和 \quad F_*(x_v)=(f_v,g_v).$$

回忆线性变换和矩阵间的关系，对基$\{x_u, x_v\}$，F_* 的矩阵为

$$J(F)=\begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix}.$$

这是多变量微分的雅可比矩阵.

这样曲面映射的导数映射就是$\mathbb{R}^n$ 中映射的雅可比曲面到其自身映射的自然推广. 回忆，如果 f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 且 $f'(a)\neq 0$，则由连续性可知，存在 $\varepsilon>0$，对于任意的 $x\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，有 $f'(x)\neq 0$. 即对其中任意的 x 都有 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$. 因此，f 在这一区间严格单调递增或严格单调递减，故存在反函数. 对映射 F: $M\to N$ 也有类似结论，这就是*反函数定理*(inverse function theorem).

定理 2.3.8(反函数定理) *如果曲面映射 F: $M\to N$ 的导数变换 F_{*p}: $T_p(M)\to T_{F(p)}(N)$. 满足 $\det(F_{*p})\neq 0$，则在 $F(p)\in N$ 的一个开邻域内存在光滑的反函数 F^{-1}.*

反函数定理说明 F 在一点的线性代数决定 M、N 在这一点附近是否相同.

形状算子是切平面上的线性变换，那么就有一个问题，是否存在曲面映射，使它的微分映射是 $\pm S$? 回答是肯定的. 这个微分映射为 $\pm S$ 的映射称为*高斯映射*. 它使我们可以从几何的角度理解形状算子. 高斯映射 G: $M\to S^2$ 是曲面 M 到单位球 S^2 的映射，满足 $G(p)=U(p)$，其中 $U(p)$是 M 在 p 点的单位法向量. 因为 $U(p)$是$\mathbb{R}^3$ 中的单位向量，可以理解为 S^2 中的点，故这个定义是有意义的. 这样，高斯映射的微分映射 G_*: $T_pM\to T_{G(p)}S^2$ 即是

$$\begin{aligned} G_*(v) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G(\alpha(t)))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U(\alpha(t)))\Big|_{t=0} \\ &= \nabla_{\alpha'(0)}U \\ &= \nabla_v U \\ &= -S(v), \end{aligned}$$

其中 $\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=v$. 还有一点需要说明. 高斯映射的微分映射的值域是 $T_{G(p)}S^2$，而形状
97 算子的值域是 $T_p(M)$，那么怎么会有 $G_*=-S$ 呢? 不论切平面与曲面在何处相交，它都是向量空间，因而经过原点. 平面 $T_p(M)$是一个经过原点且垂直于$U(p)$的平面. 对任意一点 $q\in S^2$，切平面 $T_q(S^2)$有一个很好的性质，即它垂直于 q 本身(q 作为$\mathbb{R}^3$ 中的向量). 根据定义$G(p)=U(p)$，平面 $T_{G(p)}(S^2)$是经过原点垂直于 $U(p)$的平面，也就是说 $T_p(M)=T_{G(p)}(S^2)$. 稍后，将看到高斯映射有很多的应用. 首先试做下列练习.

练习 2.3.9 计算圆锥面 $x(u, v)=(v\cos u, v\sin u, v)$的高斯映射及其微分映射，估计高斯映射在球面上像集的面积.

练习 2.3.10 计算圆柱 $x(u, v)=(R\cos u, R\sin u, v)$的高斯映射及其微分映射，估计它在球面上像集的面积.

练习 2.3.11 计算悬链面 $x(u, v)=(u, \cosh u\cos v, \cosh u\sin v)$的高斯映射及其微分映

射，证明高斯映射是从悬链面到球面的一一映射．提示：关键在于第一个坐标．

练习 2.3.12　计算 Eenneper 曲面 $x(u, v)=(u-u^3/3+uv^2, v-v^3/3+vu^2, u^2-v^2)$ 的高斯映射及其微分映射，并证明它是从 Eenneper 到球面的一一映射．再证明圆盘 $\{(u, v)\mid u^2+v^2\leqslant 3\}$ 在 G 中的像大于半球．提示：首先用极坐标表示 U，其中 $u=r\cos\theta$，$v=r\sin\theta$，然后注意第三个坐标．

2.4　法曲率

下面要用形状算子得到曲面曲率的概念，之后将对法曲率(normal curvature)进行几何上的研究，并将证明一个定理，这个定理揭示 S 的几何性质与线性代数的联系．首先我们有

引理 2.4.1　如果 α 是 M 上的曲线，则 $\alpha''\cdot U=S(\alpha')\cdot\alpha'$.

证明　我们将给出这个结论的三种证明．第一种强化上述计算，第二种是在考虑测地线时需要用到的计算，第三种是从现在开始要用到的标准证明． 98

(1)因为 U 正交于 $T_p(M)$，故 $\alpha'\cdot U=0$，则

$$\begin{aligned}0&=\alpha'[\alpha'\cdot U]\\&=\alpha'\Big[\sum_i \alpha^{i\prime}u^i\Big]\\&=\sum_i\alpha'[\alpha^{i\prime}]u^i+\sum_i\alpha^{i\prime}\alpha'[u^i] \qquad \text{由莱布尼茨法则}\\&=\sum_i\frac{\mathrm{d}^2\alpha^i}{\mathrm{d}t^2}u^i+\sum_i\alpha'[u^i]e_i\cdot\alpha' \qquad \text{因为 } \alpha^{i\prime}(\alpha(t))=\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}(t)\\&=\alpha''\cdot U+\nabla_{\alpha'}U\cdot\alpha'.\end{aligned}$$

因此，$S(\alpha')\cdot\alpha'=-\nabla_{\alpha'}U\cdot\alpha'=\alpha''\cdot U$.

(2)根据引理 2.1.3，记 $\alpha(t)=x(u(t), v(t))$，由链式法则 $\alpha'=u'x_u+v'x_v$，再次利用链式法则，得

$$\alpha''=u'^2x_{uu}+2u'v'x_{uv}+v'^2x_{vv}+u''x_u+v''x_v.$$

由于 $x_u\cdot U=0$ 和 $x_v\cdot U=0$，故

$$\alpha''\cdot U=(u'^2x_{uu}+2u'v'x_{uv}+v'^2x_{vv})\cdot U.$$

因为 S 是线性变换，所以

$$\begin{aligned}S(\alpha')\cdot\alpha'&=S(u'x_u+v'x_v)\cdot(u'x_u+v'x_v)\\&=(u'S(x_u)+v'S(x_v))\cdot(u'x_u+v'x_v)\\&=u'^2S(x_u)\cdot x_u+u'v'S(x_u)\cdot x_v+u'v'S(x_v)\cdot x_u+v'^2S(x_v)\cdot x_v\\&=u'^2x_{uu}\cdot U+u'v'x_{uv}\cdot U+u'v'x_{uv}\cdot U+v'^2x_{vv}\cdot U\\&=(u'^2x_{uu}+2u'v'x_{uv}+v'^2x_{vv})\cdot U\\&=\alpha''\cdot U.\end{aligned}$$

(3)取 $0=\alpha'\cdot U$ 的导数，得

$$\begin{aligned}0&=(\alpha'\cdot U)'\\&=\alpha''\cdot U+\alpha'\cdot U' \qquad \text{其中 } U'=\nabla_{\alpha'}U=-S(\alpha')\end{aligned}$$

$$\alpha''\cdot U=-\alpha''\cdot(-S(\alpha'))$$

$$\alpha'' \cdot U = \alpha'' \cdot S(\alpha').$$ ■

我们把 $\alpha'' \cdot U$ 看成是 M 弯曲的加速度. 而且假设 α 具有单位速度，这样 α' 的大小就不会
99 影响计算结果. 由此有如下定义. 对于单位向量 $u \in T_p(M)$，其在 u-方向的法曲率(normal curvature)

$$k(u) = S_p(u) \cdot u.$$

设 α 是单位速度曲线，且 $\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=u$，则

$$\begin{aligned} k(u) &= S_p(u) \cdot u \\ &= S_p(\alpha'(0)) \cdot \alpha'(0) \\ &= \alpha''(0) \cdot U(p) \\ &= \kappa(0) N(0) \cdot U(p) \\ &= \kappa(0) \cos\theta, \end{aligned}$$

其中 N 是曲线 α 的 Frenet 法向量，κ 是 α 的曲率，θ 为 $N(0)$ 与 $U(p)$ 间的夹角(如图 2-16 所示).

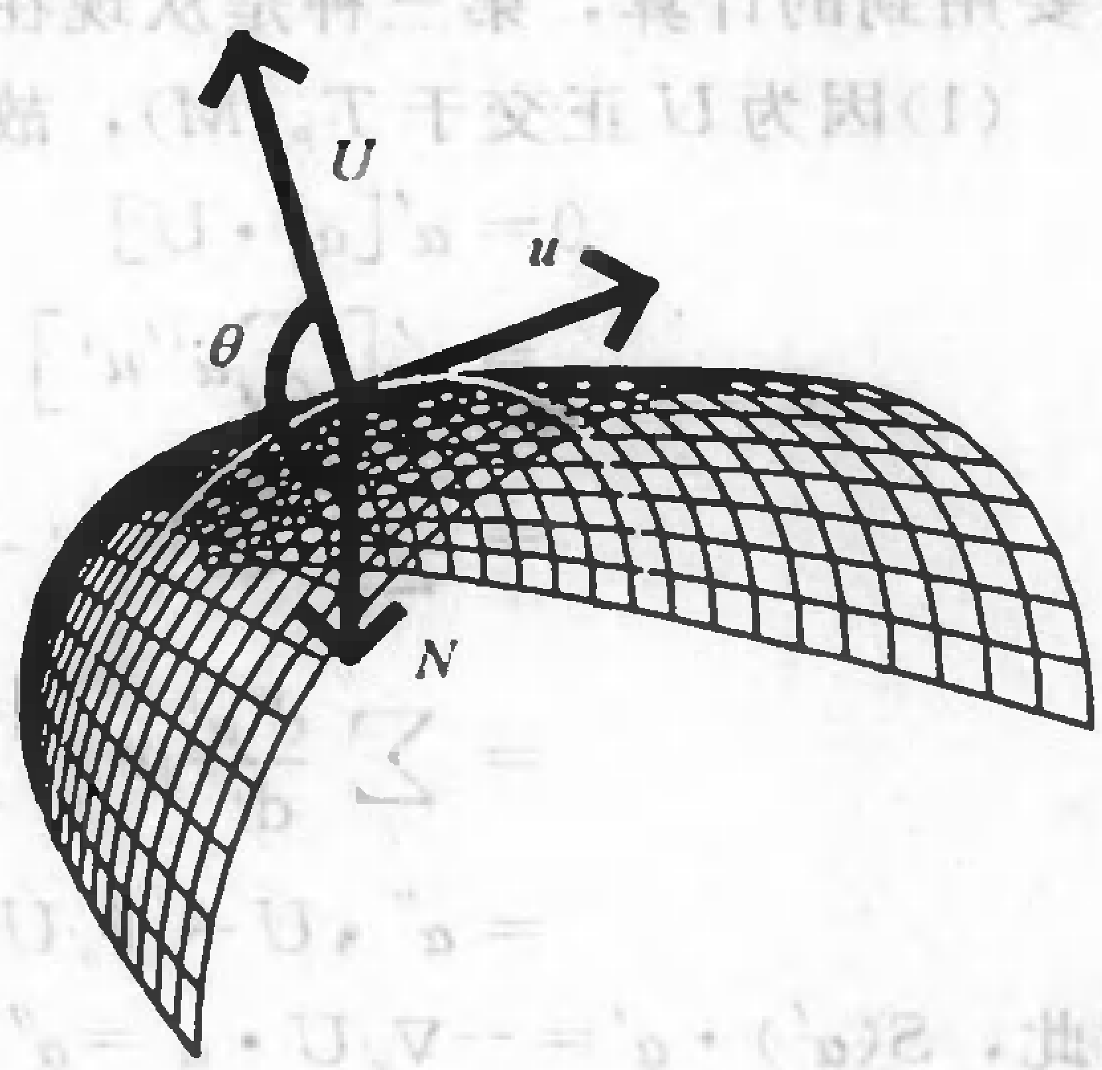


图 2-16 法曲率

练习 2.4.2 单位速度曲线 α: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ 的总挠率(total torsion)为 $\int_a^b \tau dt$. 证明 R 球面上的闭合曲线总挠率是 0. 提示：利用上述公式 $k(T)=\kappa_\alpha \cos\theta$，其中对单位速度曲线 α，$T=\alpha'$，可利用球面形状算子及对 $\cos\theta = N \cdot U$ 微分.

当 α 的法曲率是曲率的倍数时，或许会问是否存在曲
100 线 σ 使得它的曲率正好等于法曲率 $k(u)$，回答是肯定的.

命题 2.4.3 P 表示由 $U(p)$ 和 u(点 $p \in M$)决定的平面，并令 σ 表示 $P \cap M$ 形成的单位速度曲线且 $\sigma(0)=p$，则 $k(u) = \pm\kappa_\sigma(0)$.

证明 首先证明 $\sigma'(0)=u$. 因为 u 和 $\sigma'(0)$ 是单位切向量，且 u，$\sigma'(0)$，$U(p)$ 在一个平面上，所以要使 u 和 $\sigma'(0)$ 都在 P 上，且都垂直于 $U(p)$，只能有 $\sigma'(0)=\pm u$. 取参数方程，满足 $\sigma'(0)=u$，这样，σ 的法向量 $N_\sigma(0)$ 垂直于 $T_\sigma(0)=\sigma'(0)=u$，并且因为 σ 是平面曲线，$N_\sigma(0)$ 在平面 P 上，所以 $N_\sigma(0)=\pm U(p)$. 又 $\theta=0$ 或 π 时 $\cos\theta=\pm 1$. 因此 $k(u)=\pm\kappa_\sigma(0)$. ■

那么法曲率告诉我们什么呢？如果 $k(u)>0$，则法向量 $N_\sigma(0)$ 等于 $U(p)$(即 $\theta=0°$)且 σ 弯向 $U(p)$，故 M 沿 σ 的变化也是如此. 如果 $k(u)<0$，则法线 $N_\sigma(0)$ 等于 $-U(p)$，M 沿 σ 背离 $U(p)$ 变化. 如果 $k(u)=0$，则 $\kappa_\sigma(t)=0$，这不能说明曲线是直线，因为我们还不清楚是否对所有的 t 都有 $\kappa_\sigma(t)=0$. 这只说明在 p 点附近的弯曲率很小.

因此法曲率的符号告诉我们 M 的弯曲是朝向还是背离给定的法向量方向. 注意，可以将法向量变成 $-U(p)$，这时 $k(u)$ 的符号改变. 因此为避免混淆，我们必须对法向量作个规定. 例如，如果曲面 M 围出一个体积，就总是取向外为法向量的方向，也就是说，法向量方向背离围成的体积. 如果曲面是一个双变量函数 x 和 y 的图像，那就取正的 z 坐标方向为法向量的方向.

法曲率是由平面上单位向量(即半径为 1 的圆)而来的函数——对实数而言. 事实上，可以

证明法曲率函数是连续的．正如，任意连续函数都能在闭区间上取得最大值和最小值，任意紧集(即闭有界)如圆上的连续函数也有这样的性质．因此，存在单位向量 u_1 和 u_2 使得

$$k(u_1)=k_1=\max_u k(u),\quad k(u_2)=k_2=\min_u k(u).$$

这样的单位向量 u_1 和 u_2 称为主向量(principal vector)，k_1 和 k_2 称为主曲率(principal curvatures)．

练习 2.4.4　曲线 $\alpha: I\to M$ 是曲率线(line of curvature)，如果对任意 $t\in I$，$\alpha'(t)$都是形状算子 S 的特征向量．这等价于单位切向量 T_α 总是 u_1 或 u_2．证明 α 是曲率线当且仅当 α'沿 α 平行于 $U'=\nabla_{\alpha'}U$．进一步，假设 α 是平面曲线．即对某平面 P，$\alpha=M\cap P$．然后证明，如果沿 α 方向 M 和 P 夹角为定值，则 α 为曲率线． 101

例 2.4.5　设 M 是马鞍面 $z=x^2-y^2$，利用 $g(x,y,z)=z-x^2+y^2=0$ 的梯度给出法向量

$$U=\frac{\nabla g}{|\nabla g|}=\frac{(-2x,2y,1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

设 $p=(0,0,0)$，则 $U(p)=(0,0,1)$．取 $u=(1,0,0)$，那么曲线 σ 就由$(0,0,1)$和$(1,0,0)$生成的平面与 M 的交线决定，也就是弯向法线的抛物线 $z=x^2$．因此，可以证明 $k(u)>0$．具体计算如下：

经过 u 和 $U(p)$的平面 P 是 xz 平面，且 $u\times U(p)=(0,-1,0)$，因此 P 的方程为 $y=0$，σ 是抛物线 $z=x^2$，可参数化为 $\sigma(t)=(t,0,t^2)$，则 $\sigma'(t)=(1,0,2t)$，$\sigma''(t)=(0,0,2)$，取 $k(1,0,0)=+\kappa_\sigma(0)=\dfrac{|\sigma'(0)\times\sigma''(0)|}{|\sigma'(0)|^3}=2/1=2>0$，正是我们所要的．注意，可以求出全部的 Frenet 标架，$T=\dfrac{\sigma'}{|\sigma'|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+4t^2}},0,\dfrac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$，$T(0)=(1,0,0)$；$B=\dfrac{\sigma'\times\sigma''}{|\sigma'\times\sigma''|}=(0,-1,0)$；$N=B\times T=(0,0,1)=U$．这就证明了 $k(1,0,0)=+\kappa_\sigma(0)$．

练习 2.4.6　求 $p=(0,0,0)$处的 $k(u)$，其中 $u=(0,1,0)$．答案取什么符号？

练习 2.4.7　求 $p=(0,0,0)$处的 $k(u)$，其中 $u=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$．

例 2.4.8　圆柱 M：$x^2+y^2=1$，$p=(1,0,0)$和 $U(p)=(1,0,0)$．单位向量 $u\in T_p(M)$可写成 $u=(0,u^1,u^2)$，其中$(u^1)^2+(u^2)^2=1$，u 和 $U(p)$所在平面的一个法向量是$(0,-u^2,u^1)$，故平面方程为 $z=(u^2/u^1)y$．对任意 y，这个平面和 M 的交为集合 $\{(\sqrt{1-y^2},y,(u^2/u^1)y)\}$，$\sigma$ 的参数方程为$\sigma(t)=(\sqrt{1-t^2},t,(u^2/u^1)t)$且

$$\sigma'(t)=(-t/\sqrt{1-t^2},1,u^2/u^1)\quad 和\quad \sigma''(t)=(-1/(1-t^2)^{3/2},0,0).$$ 102

那么

$$\begin{aligned}T(0)&=(0,1,u^2/u^1)/\sqrt{1+(u^2/u^1)^2},\\ B(0)&=\sigma'(0)\times\sigma''(0)/|\sigma'(0)\times\sigma''(0)|\\ &=(0,-u^2/u^1,1)/\sqrt{1+(u^2/u^1)^2}\end{aligned}$$

$$N(0)=((-(u^2/u^1)^2-1)/(1+(u^2/u^1)^2),0,0)$$
$$=(-1,0,0).$$

所以 $N(0)=-U(p)$，故 $k(\boldsymbol{u})=-\kappa_\sigma(0)$，取“$-$”号. 而且因为 $(u^1)^2+(u^2)^2=1$，所以

$$\kappa_\sigma(0)=\frac{|\sigma'(0)\times\sigma''(0)|}{|\sigma'(0)|^3}=\frac{((u^2/u^1)^2+1)^{1/2}}{(1+(u^2/u^1)^2)^{3/2}}=(u^1)^2.$$

因此 $k(\boldsymbol{u})=-(u^1)^2$，它是负数或 0. 又 $\boldsymbol{u}=(0,\ u^1,\ u^2)$ 在 yz 平面的单位圆上，当 $u^1=0$ 时，$\max k(\boldsymbol{u})=0$；当 $u^1=1$ 时，$\min k(\boldsymbol{u})=-1$. 相应的几何意义是显然的：圆柱 M 在母线方向是平的，在准线方向弯离法向量. 事实上，这一弯曲可看成是圆，如图 2-17 和图 2-18 所示.

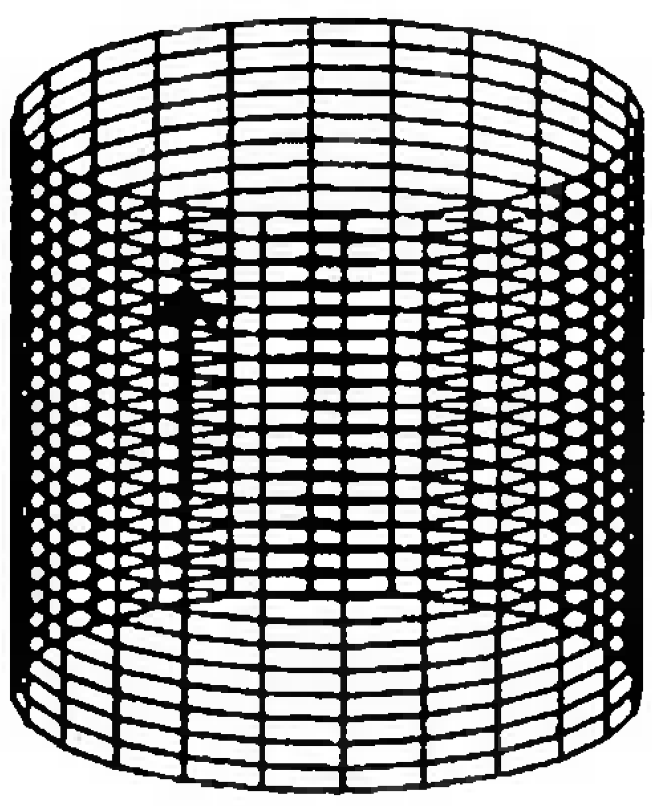


图 2-17 极大；$k(\boldsymbol{u})=0$；$u^1=0$；$\boldsymbol{u}=(0,\ 0,\ 1)$ 在母线方向

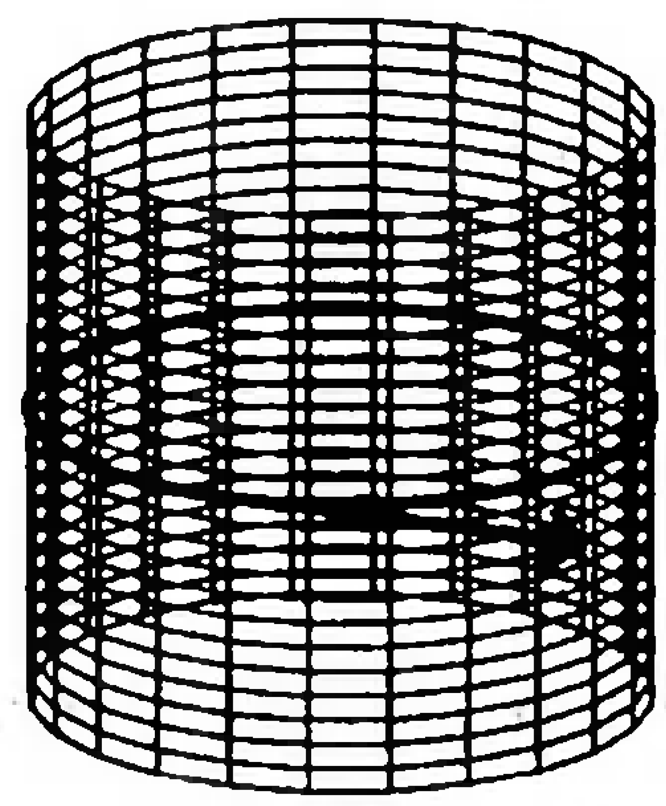


图 2-18 极小；$k(\boldsymbol{u})=-1$；$u^1=1$；$\boldsymbol{u}=(0,\ 1,\ 0)$ 在准线的速度向量方向上

练习 2.4.9 完成上例.

虽然开始是用形状算子定义的，但是法曲率有一个完全几何上的描述. 它可以看作是曲面和某个特殊平面交线的曲率. 下面将给出一个联系法曲率几何性质和形状算子线性代数性质的基本定理. 点 $p\in M$ 称为脐点(umbilic point)，如果 p 点的主曲率相等(即 $k_1(p)=k_2(p)$). 注意这表明 p 点的法曲率为定值. 例如，球面上的点都是脐点.

定理 2.4.10

1. 如果 $p\in M$ 是脐点，则 $S_p(\boldsymbol{u})=k\boldsymbol{u}$，其中 $k=k_1=k_2$.

2. 如果 $p\in M$ 是非脐点，则有两个 S_p 的互相垂直的单位特征向量，且它们对应的特征值是 p 点的主曲率.

证明 我们将从另一个方向证明这个定理. 考虑形状算子的特征值，并证明它们就是 k_1 和 k_2. 设 $\boldsymbol{u}_1$ 是 S 属于 λ_1 的特征向量，$S(\boldsymbol{u}_1)=\lambda_1\boldsymbol{u}_1$. 设 $\boldsymbol{u}_2$ 为 $\boldsymbol{u}_1$ 逆时针旋转 90°得到的单位切向量，即 $\boldsymbol{u}_2=U\times\boldsymbol{u}_1$，则 $S(\boldsymbol{u}_2)=a\boldsymbol{u}_1+b\boldsymbol{u}_2$. 而 $a=S(\boldsymbol{u}_2)\cdot\boldsymbol{u}_1=S(\boldsymbol{u}_1)\cdot\boldsymbol{u}_2=\lambda_1\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=0$，故 $S(\boldsymbol{u}_2)=\lambda_2\boldsymbol{u}_2$，其中 $b=\lambda_2$. 于是，$\boldsymbol{u}_2$ 就是我们所构造的垂直于 $\boldsymbol{u}_1$ 的形状算子 S 的另一个特征向量. 而且 $k(\boldsymbol{u}_i)=S(\boldsymbol{u}_i)\cdot\boldsymbol{u}_i=\lambda_i\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_i=\lambda_i$，所以 λ_1 和 λ_2 是 p 点的法曲率.

103~104 注意，如果 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，则对任意的 $\boldsymbol{u}$，$S(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}$，即 p 为脐点. 不失一般性，假设 $\lambda_2<\lambda_1$，取单位向量 $\boldsymbol{u}=\cos\theta\boldsymbol{u}_1+\sin\theta\boldsymbol{u}_2$，其中 θ 是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}_1$ 的夹角. 计算 $\boldsymbol{u}$ 的法曲率 $k(\theta)$，它依赖于 $\boldsymbol{u}$ 和 θ.

$$
\begin{aligned}
k(\theta) &= S(\boldsymbol{u})\cdot \boldsymbol{u}\\
&= S(\cos\theta \boldsymbol{u}_1+\sin\theta \boldsymbol{u}_2)\cdot(\cos\theta \boldsymbol{u}_1+\sin\theta \boldsymbol{u}_2)\\
&= (\cos\theta S(\boldsymbol{u}_1)+\sin\theta S(\boldsymbol{u}_2))\cdot(\cos\theta \boldsymbol{u}_1+\sin\theta \boldsymbol{u}_2)\\
&= \cos^2\theta S(\boldsymbol{u}_1)\cdot \boldsymbol{u}_1+\sin\theta\cos\theta S(\boldsymbol{u}_1)\cdot \boldsymbol{u}_2\sin\theta\cos\theta S(\boldsymbol{u}_2)\cdot \boldsymbol{u}_1\\
&\quad +\sin^2\theta S(\boldsymbol{u}_2)\cdot \boldsymbol{u}_2\\
&= \cos^2\theta\lambda_1+\sin^2\theta\lambda_2.
\end{aligned}
$$

利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 可得 $k(\theta)=\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)\sin^2\theta$. 因为 $\lambda_2<\lambda_1$，所以当 $\theta=0$，即 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1$ 时，$k(\theta)$取最大值. 因此，$k_1=k_{\max}(\theta)=k(\boldsymbol{u}_1)=\lambda_1$.

同理可得 $k(\theta)=(\lambda_1-\lambda_2)\cos^2\theta+\lambda_2$，因为 $\lambda_2<\lambda_1$，所以当 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_2$ 时，$k(\theta)$取最小值，因此 $k_2=k_{\min}(\theta)=k(\boldsymbol{u}_2)=\lambda_2$. ■

推论 2.4.11 对于上述 $\boldsymbol{u}=\cos\theta \boldsymbol{u}_1+\sin\theta \boldsymbol{u}_2$，法曲率由欧拉公式给出：

$$k(\boldsymbol{u})=\cos^2\theta k_1+\sin^2\theta k_2.$$

2.5 曲面和 Maple

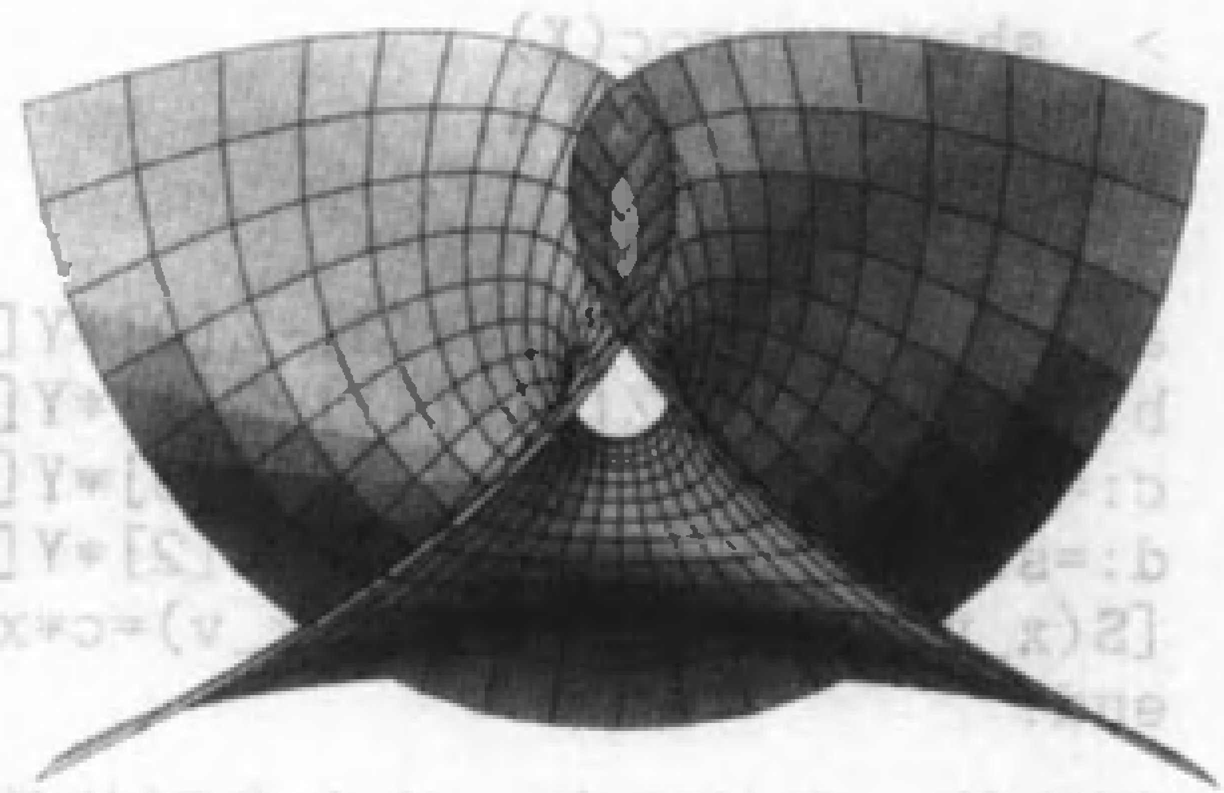
本节将讲述如何利用 Maple 由参数方程求形状算子、法曲率及画图. 首先开始于

```
> with(LinearAlgebra):with(plots):
```

先看 Enneper 曲面. 在 Maple 中曲面以向量形式给出，其分量为二元函数. Enneper 曲面的参数方程为

```
> Ennep:=<u-u^3/3+u*v^2|v-v^3/3+v*u^2|u^2-v^2>;
```

$$Ennep := \left[u-\frac{1}{3}u^3+uv^2, v-\frac{1}{3}v^3+vu^2, u^2-v^2\right]$$


图 2-19　Enneper 曲面

现在就可以画出 Enneper 曲面(见图 2-19 所示). Maple 的 plot3d 命令有多个选项，其部分选项要列入命令中. 例如，“shading＝zhue”是指定某颜色作图，可以选择“XY”、“XYZ”和“Z”指定颜色；选项“lightmodel＝light1”控制曲面图的光照方向；“orientation”可选择绘图者观察的角度. 最后“scaling＝constrained”改变所绘制的图形宽、高的比例，便于观察.

```
> plot3d(Ennep,u=-2..2,v=-2..2,scaling= constrained,shading
=zhue,lightmodel=light1,orientation=[89,54]);
```

练习 2.5.1 用练习 2.1.22 和练习 2.1.3 给出的参数方程画出单叶双曲线，练习使用不同的参数限制和画图选项.

下面给出计算曲面基本量的程序，包括系数 E，F，G、单位法向量，及系数 l，m、n.

```
> EFG := proc(X)
local Xu,Xv,E,F,G;
Xu := <diff(X[1],u),diff(X[2],u),diff(X[3],u)>;
Xv := <diff(X[1],v),diff(X[2],v),diff(X[3],v)>;
E := DotProduct(Xu,Xu,conjugate=false);
F := DotProduct(Xu,Xv,conjugate=false);
G := DotProduct(Xv,Xv,conjugate=false);
simplify([E,F,G]);
end:
```

```
> UN := proc(X)
local Xu,Xv,Z,s;
Xu := <diff(X[1],u),diff(X[2],u),diff(X[3],u)>;
Xv := <diff(X[1],v),diff(X[2],v),diff(X[3],v)>;
Z := CrossProduct(Xu,Xv);
s:=VectorNorm(Z,Euclidean,conjugate=false);
simplify(<Z[1]/s|Z[2]/s|Z[3]/s>,sqrt,trig,symbolic);
end:
```

105 ≀ 106

```
> lmn := proc(X)
local Xu,Xv,Xuu,Xuv,Xvv,U,l,m,n;
Xu := <diff(X[1],u),diff(X[2],u),diff(X[3],u)>;
Xv := <diff(X[1],v),diff(X[2],v),diff(X[3],v)>;
Xuu := <diff(Xu[1],u),diff(Xu[2],u),diff(Xu[3],u)>;
Xuv := <diff(Xu[1],v),diff(Xu[2],v),diff(Xu[3],v)>;
Xvv := <diff(Xv[1],v),diff(Xv[2],v),diff(Xv[3],v)>;
U := UN(X);
l := DotProduct(U,Xuu,conjugate=false);
m := DotProduct(U,Xuv,conjugate=false);
n := DotProduct(U,Xvv,conjugate=false);
simplify([l,m,n],sqrt,trig,symbolic);
end:
```

有了这些基本量，我们就可以编写计算形状算子及法曲率的程序(见(2.3.1)).

```
> shape:=proc(X)
local Y,Z,a,b,c,d;
Y:=EFG(X);
Z:=lmn(X);
a:=simplify((Z[1]*Y[3]-Z[2]*Y[2])/(Y[1]*Y[3]-Y[2]^2));
b:=simplify((Z[2]*Y[1]-Z[1]*Y[2])/(Y[1]*Y[3]-Y[2]^2));
c:=simplify((Z[2]*Y[3]-Z[3]*Y[2])/(Y[1]*Y[3]-Y[2]^2));
d:=simplify((Z[3]*Y[1]-Z[2]*Y[2])/(Y[1]*Y[3]-Y[2]^2));
[S(x_u)=a*x_u+b*x_v,S(x_v)=c*x_u+d*x_v];
end:
```

作为第 3 章的准备，给出求形状算子在基$\{x_u, x_v\}$下矩阵的程序.

```
> shape_matrix:=proc(X)
local Y,Z,a,b,c,d;
Y:=EFG(X);
Z:=lmn(X);
a:=simplify((Z[1]*Y[3]-Z[2]*Y[2])/(Y[1]*Y[3]-Y[2]^2));
b:=simplify((Z[2]*Y[1]-Z[1]*Y[2])/(Y[1]*Y[3]-Y[2]^2));
c:=simplify((Z[2]*Y[3]-Z[3]*Y[2])/(Y[1]*Y[3]-Y[2]^2));
d:=simplify((Z[3]*Y[1]-Z[2]*Y[2])/(Y[1]*Y[3]-Y[2]^2));
Matrix([[a,c],[b,d]]);
end:
```

下面具体计算几个例子. 我们要计算形状算子在基 x_u 和 x_v 下的取值、对应的矩阵(相对于这组基), 有时包含此矩阵的线性代数的特定的不变量. 首先验证 R 球面上的形状算子就是 $-1/R$ 的倍数.

```
> shape(<R*cos(u)*cos(v)|R*sin(u)*cos(v)|R*sin(v)>);
```

$$\left[S(x_u)=-\frac{x_u}{R},S(x_v)=-\frac{x_v}{R}\right]$$

再看旋转环面和 Enneper 曲面.

```
> shape(<(R+r*cos(u))*cos(v),(R+r*cos(u))*sin(v),
r*sin(u)>);
```

$$\left[S(x_u)=\frac{x_u}{r},S(x_v)=\frac{\cos(u)x_v}{R+r\cos(u)}\right]$$
107

```
> shape(Ennep);
```

$$\left[S(x_u)=\frac{2x_u}{1+2u^2+2v^2+u^4+2u^2v^2+v^4},\right.$$
$$\left.S(x_v)=-\frac{2x_v}{1+2u^2+2v^2+u^4+2u^2v^2+v^4}\right]$$

练习 2.5.2 指出球面和 Enneper 曲面形状算子的相似之处. 提示：参见命题 4.8.28 和练习 4.8.30.

现在考虑圆柱曲面, 注意 $S(x_v)=0$, 这意味着 U 沿母线不变. 因此, 圆柱面是可展(developable)曲面, 见练习 3.2.20.

```
> cylinder:=<R*cos(u)|R*sin(u)|v>;
```

$$cylinder:=[R\cos(u),R\sin(u),v]$$

```
> shape(cylinder);
```

$$\left[S(x_u)=-\frac{x_u}{R},S(x_v)=0\right]$$

```
> plot3d(subs(R=2,cylinder),u=0..2*Pi, v=0..3,shading=XY,
lightmodel=light1,grid=[25,10], orientation=[-46,61]);
```

以上几个例子中, 形状算子矩阵是对角矩阵. 这并非一般情况, 马鞍面就是一个例子. 对于对角矩阵, 它的特征值就是对角元, 它的行列式为对角元的积. 而对于一般矩阵, 求这些量比较麻烦. 但 Maple 做起来总是很简单.

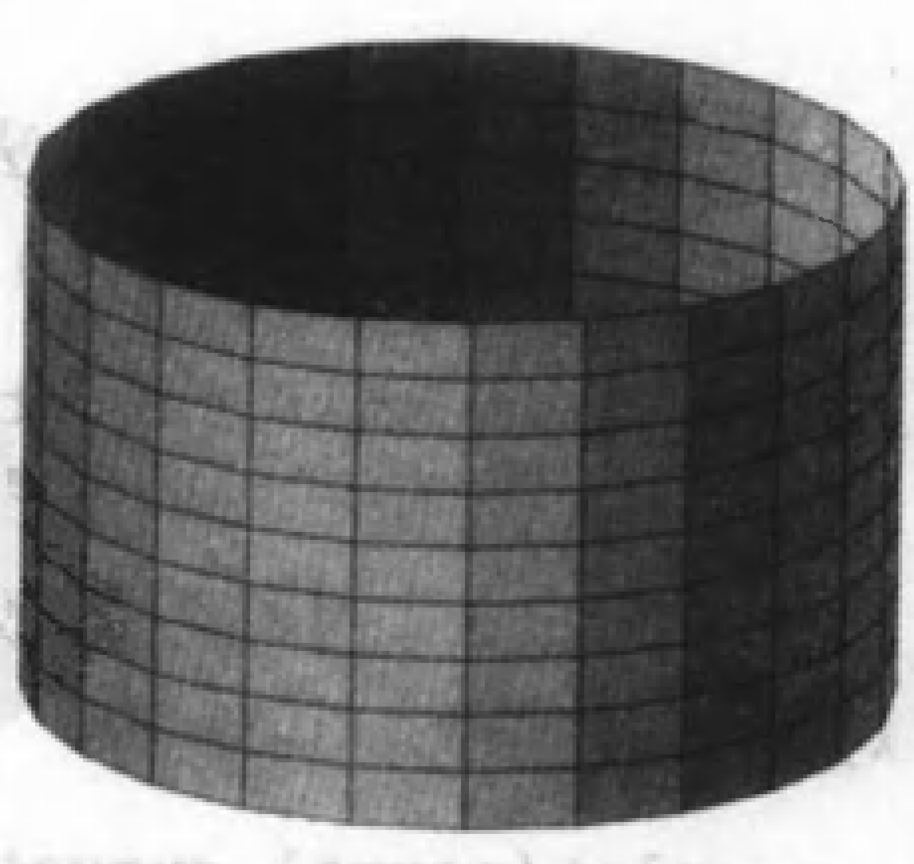


图 2-20　圆柱面

```
> shape(<u,v,u*v>);
```

$$\left[\begin{array}{l}S(x_u)=-\dfrac{uvx_u}{(1+u^2+v^2)^{(3/2)}}+\dfrac{(1+v^2)x_v}{(1+u^2+v^2)^{(3/2)}},\\ S(x_v)=\dfrac{(1+u^2)x_u}{(1+u^2+v^2)^{(3/2)}}-\dfrac{uvx_v}{(1+u^2+v^2)^{(3/2)}}\end{array}\right]$$

```
> Eigenvalues(shape_matrix(<u,v,u*v>));
```

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-2\sqrt{1+u^2+v^2}\,uv+2\sqrt{3u^2v^2+u^4v^2+u^2v^4+1+2u^2+2v^2+u^4+v^4}}{2(1+2u^2+2v^2+u^4+2u^2v^2+v^4)} \\ \dfrac{-2\sqrt{1+u^2+v^2}\,uv-2\sqrt{3u^2v^2+u^4v^2+u^2v^4+1+2u^2+2v^2+u^4+v^4}}{2(1+2u^2+2v^2+u^4+2u^2v^2+v^4)} \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(shape_matrix(<u,v,u*v>));
```

$$-\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}$$

将结果与练习 3.2.16 和练习 3.2.18 进行比较.

练习 2.5.3 运行下列 Maple 程序，并与 Enneper 的形状算子相比较，何处相似?

```
> shape(<cosh(u)*cos(v)|cosh(u)*sin(v)|u>);
```

练习 2.5.4 运行下列 Maple 命令，并与练习 3.3.5 比较.

```
> surfrev:=<g(u)|h(u)*cos(v)|h(u)*sin(v)>;
> shape(surfrev);
> shape_matrix(surfrev);
> Determinant(shape_matrix(surfrev));
```

下面利用定义 $k(u)=S(u)\cdot u$，编写求法曲率的程序，然后给出特定的例子. 注意，为求法曲率必须输入具体点(即 $u0$ 和 $v0$)及具体的角度(即 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$). 注意，S. (cos(t), sin(t)) 在 Maple 程序中表示矩阵 S 作用于(单位)向量(cos(t), sin(t)).

```
> normal_curvature:=proc(X,u0,v0,t)
local S;
S:=subs({u=u0,v=v0},shape_matrix(X));
DotProduct(S.<cos(t),sin(t)>,<cos(t),sin(t)>,conjugate=
false);
end:
> normal_curvature(<(R+r*cos(u))*cos(v),
(R+r*cos(u))*sin(v),r*sin(u)>,0,0,t);
```

108~109

$$\frac{\cos^2(t)}{r}+\frac{\cos(0)\sin^2(t)}{R+r\cos(0)}$$

注意环面最外面的点，法曲率在 $t=0$ 和 $t=\pi/2$ 处分别取到最大值和最小值. 可以画出该点的法曲率(如图 2-21 所示)，注意观察在什么地方取到最大最小值.

```
> plot(normal_curvature(subs({R=5,r=1}, <(R+r*cos(u))*
cos(v),(R+r*cos(u))*sin(v),r*sin(u)>),0,0,t),t=0..2*Pi);
```

练习 2.5.5 对马鞍面做同样的工作，观察在什么地方取到最大最小值(如图 2-22 所示)，并对此作出解释.

```
> plot(normal_curvature(<u,v,u*v>,0,0,t), t=0..2*Pi);
> evalf(Pi/4);
```

0.7853981635

```
> maximize(normal_curvature(<u,v,u*v>,0,0,t), t=0..Pi,
location=true);
```

$$1,\left\{\left[\left\{t=\frac{\pi}{4}\right\},1\right]\right\}$$

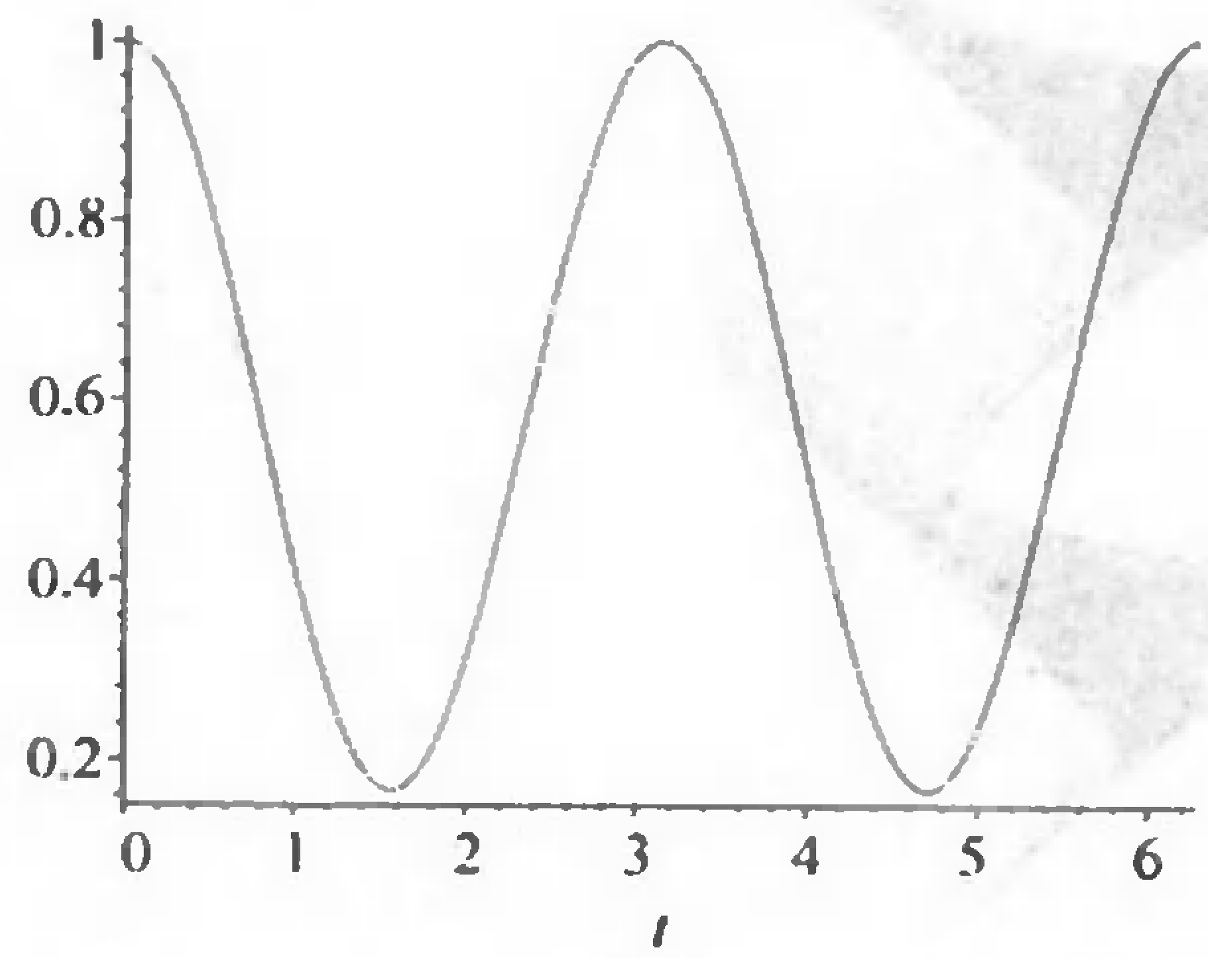


图 2-21　环面在 $u=0$, $v=0$ 处的法曲率

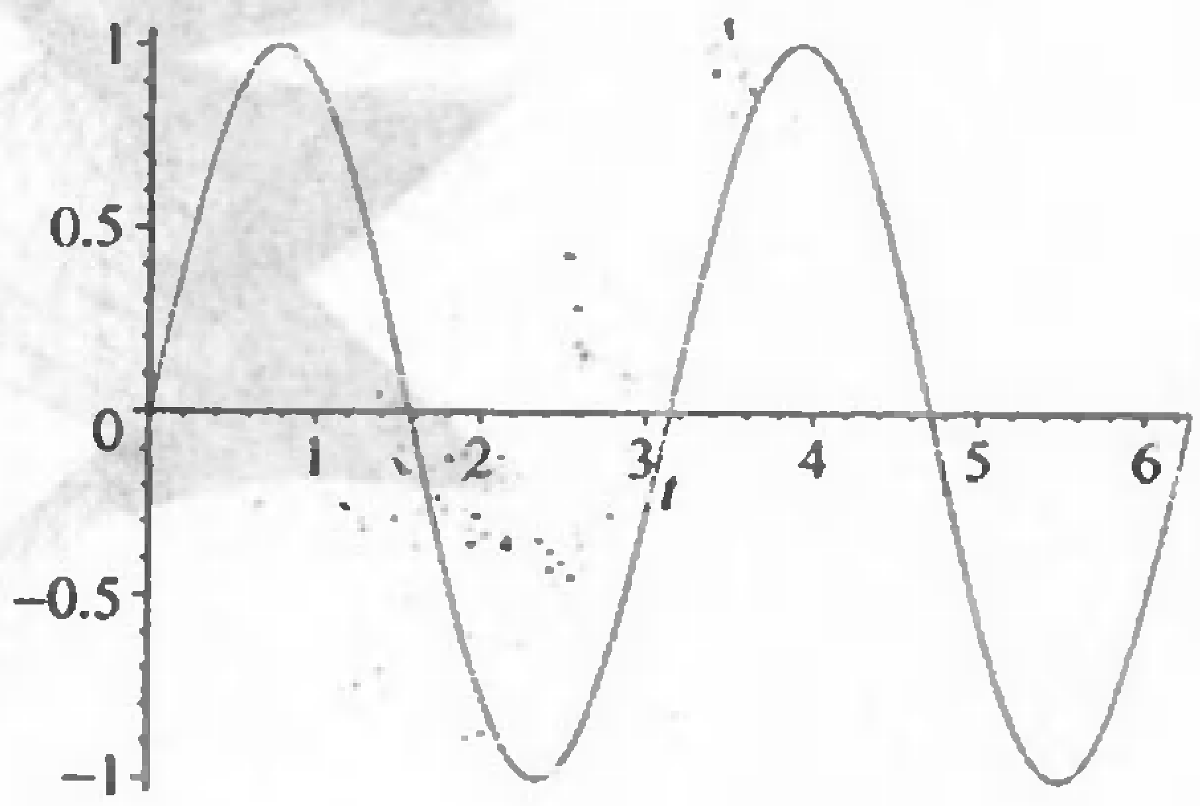


图 2-22　马鞍面在 $u=0$, $v=0$ 处的法曲率　110

利用 Maple 可以通过输入两条曲线 $\beta(u)$ 和 $\delta(u)$ 得到直纹面的参数方程. 以下是具体的程序和例子(如图 2-23 及图 2-24 所示).

```
> rule_surf:=proc(beta,delta)
simplify(beta+v*delta,symbolic);
end:
> rule_surf(<cos(u)|sin(u)|0>,<0|1|1>);
```

$$[\cos(u),\sin(u)+v,v]$$

```
> plot3d(rule_surf(<cos(u)|sin(u)|0>, <0|1|1>),u=0..2*Pi,
v=-1..1,scaling=constrained,shading=XY,orientation=
[-24,63]);

> plot3d(rule_surf(<u|0|0>,<0|1|u>), u=-1..1,v=-1..1,
scaling=constrained,shading=XY,lightmodel=light2,
orientation=[-74,71]);
```

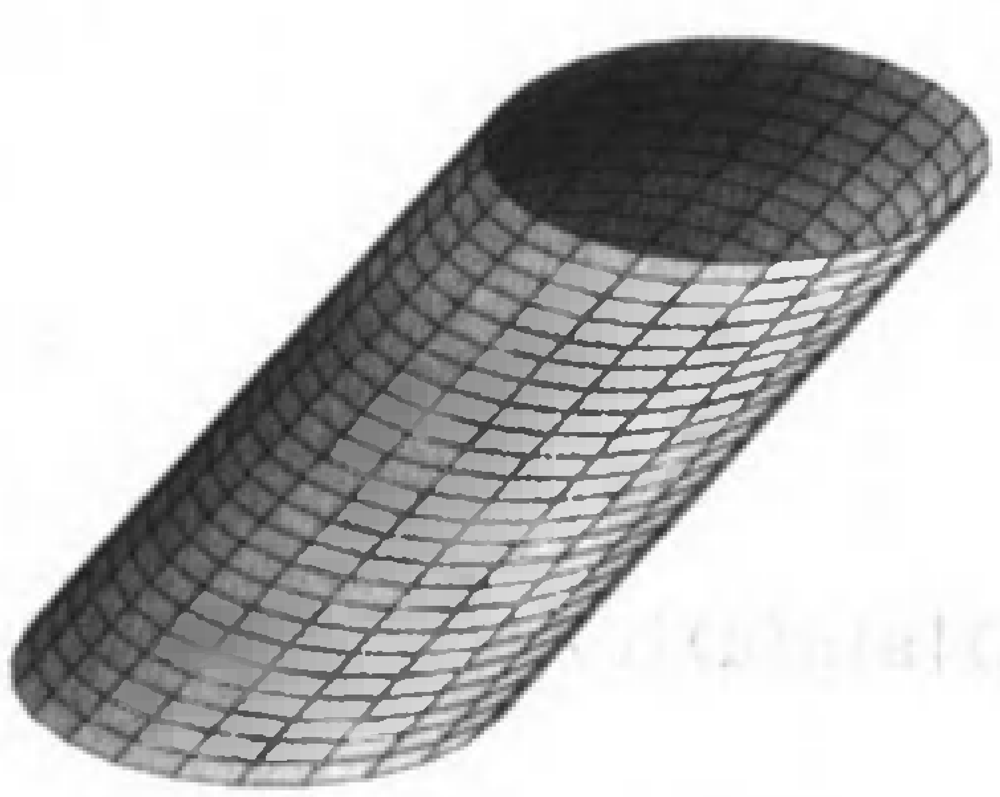


图 2-23　广义圆柱

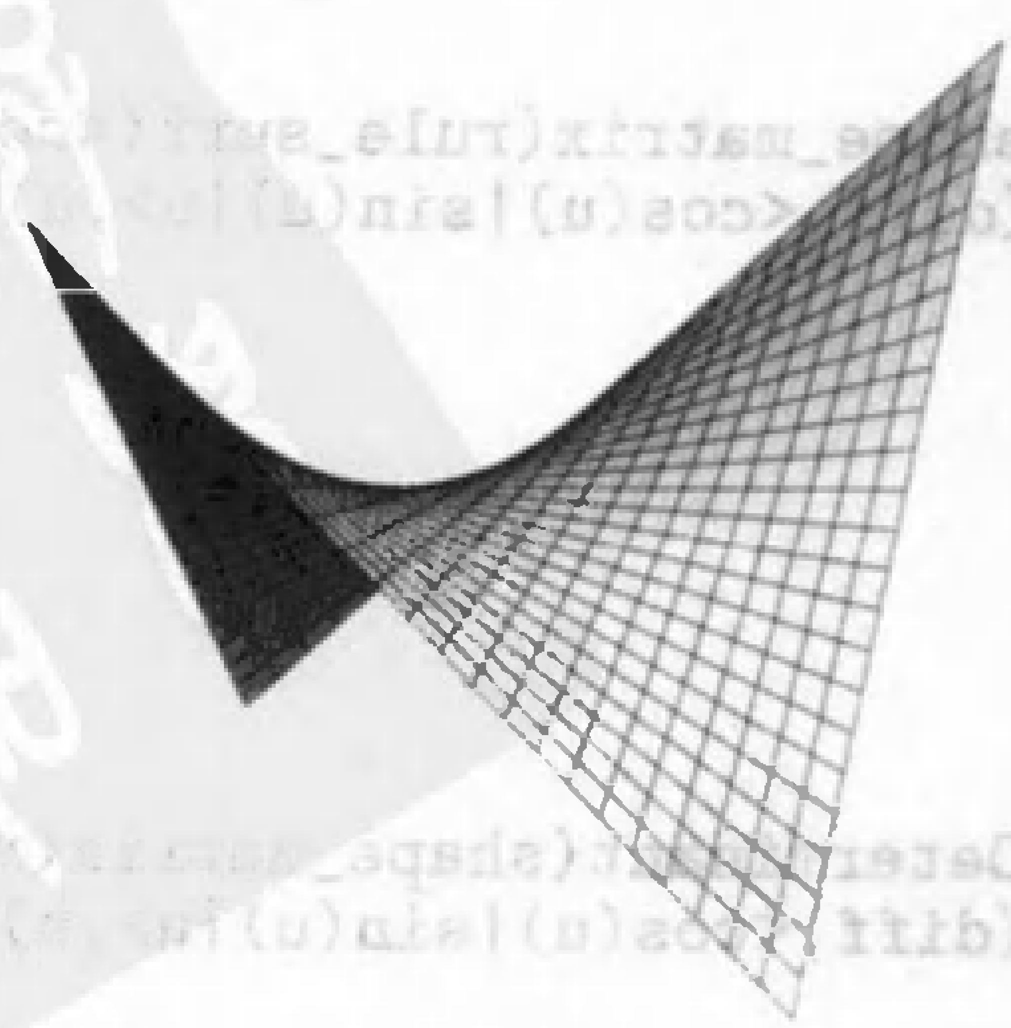


图 2-24　作为直纹曲面的马鞍面

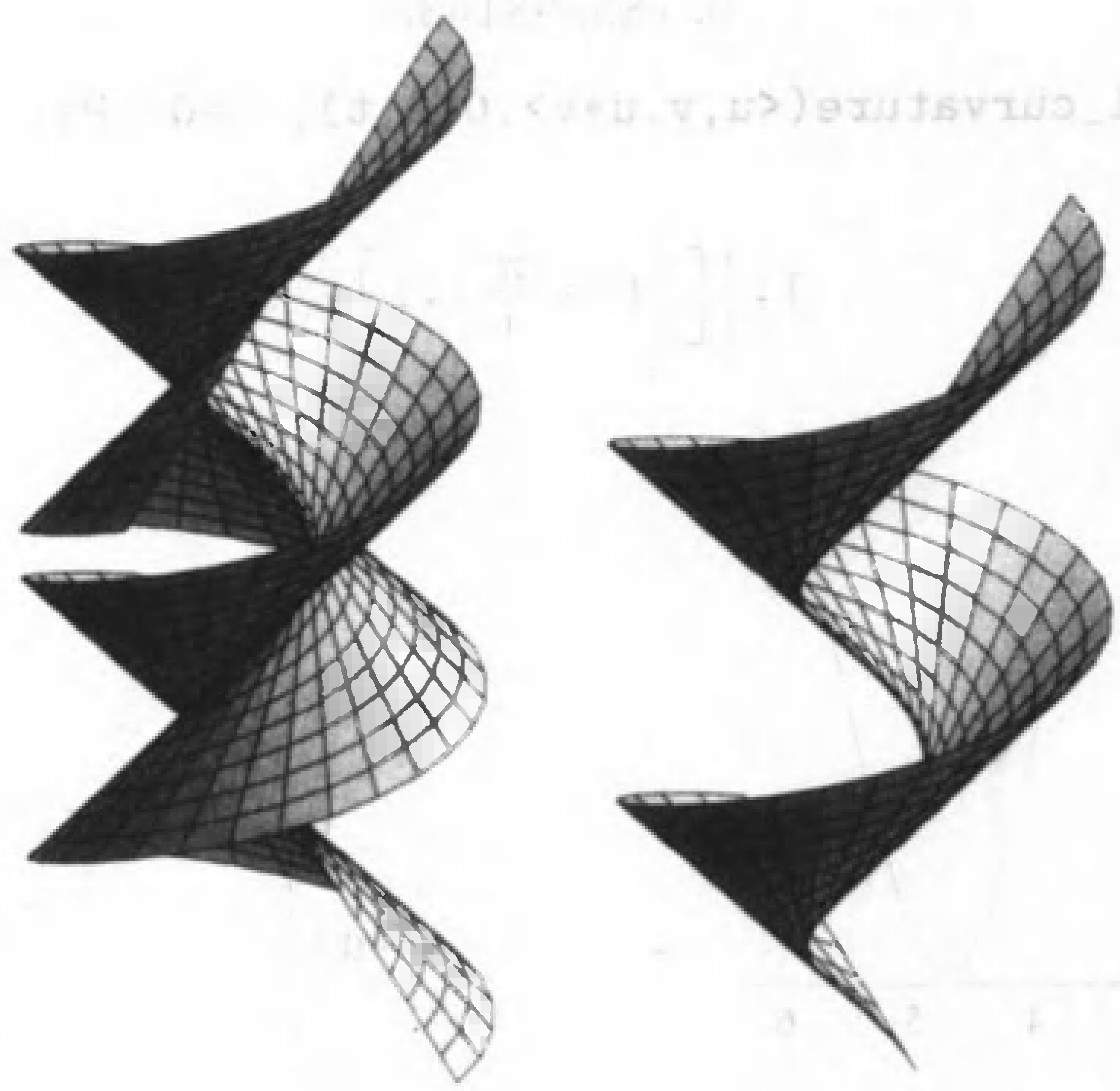


图 2-25 螺旋线的切可展曲面及其一半

一类特殊的直纹面是**切可展曲面**(tangent developable). 曲线 $\beta(u)$的切可展曲面的参数方程为 $x(u, v)=\beta(u)+v\beta'(u)$. 建立并画出螺旋线(例如)$\beta(u)=(\cos u, \sin u, u)$的切可展曲面，如图 2-25 所示，也见练习 3.2.22.

```
> plot3d(rule_surf(<cos(u)|sin(u)|u>, map(diff,<cos(u)|
sin(u)|u>,u)),u=0..3.5*Pi,v=-4..4,scaling=constrained,shading
=XY,lightmodel=light2,orientation=[-133,73],grid=[50,20]);
> plot3d(rule_surf(<cos(u)|sin(u)|u>,map(diff,<cos(u)|
sin(u)|u>,u)),u=0..3.5*Pi,v=0..4,scaling=constrained,shading
=XY,lightmodel=light2,orientation=[-133,73],grid=[50,10]);
> shape(rule_surf(<cos(u)|sin(u)|u>, map(diff,<cos(u)|
sin(u)|u>,u)));
```

$$\left[S(x_u)=-\frac{\sqrt{2}x_u}{2v}+\frac{\sqrt{2}x_v}{2v}, S(x_v)=0\right]$$

111~112

```
> shape_matrix(rule_surf(<cos(u)|sin(u)|u>,
map(diff,<cos(u)|sin(u)|u>,u)));
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2v} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2v} & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(shape_matrix(rule_surf( <cos(u)|sin(u)|u>,
map(diff,<cos(u)|sin(u)|u>,u))));
```

$$0$$

练习 2.5.6　用 $\beta(u)=(0, 0, \sin(ku))$ 和 $\delta(u)=(\cos u, \sin u, 0)$ 建立直纹面，对不同的 k 画出相应的曲面．看到什么现象？对 $k=1$，如图 2-26 所示．

```
> plot3d(rule_surf(<0|0|sin(u)>, <cos(u)|sin(u)|0>),u=0..
2*Pi,v=-1..1,scaling=constrained,shading=XY,lightmodel
=light2,orientation=[-27,54]);
```

下面是切可展曲面的例子(如图 2-27 所示)．其余命令展示这条特定的曲线(见图 2-28)．

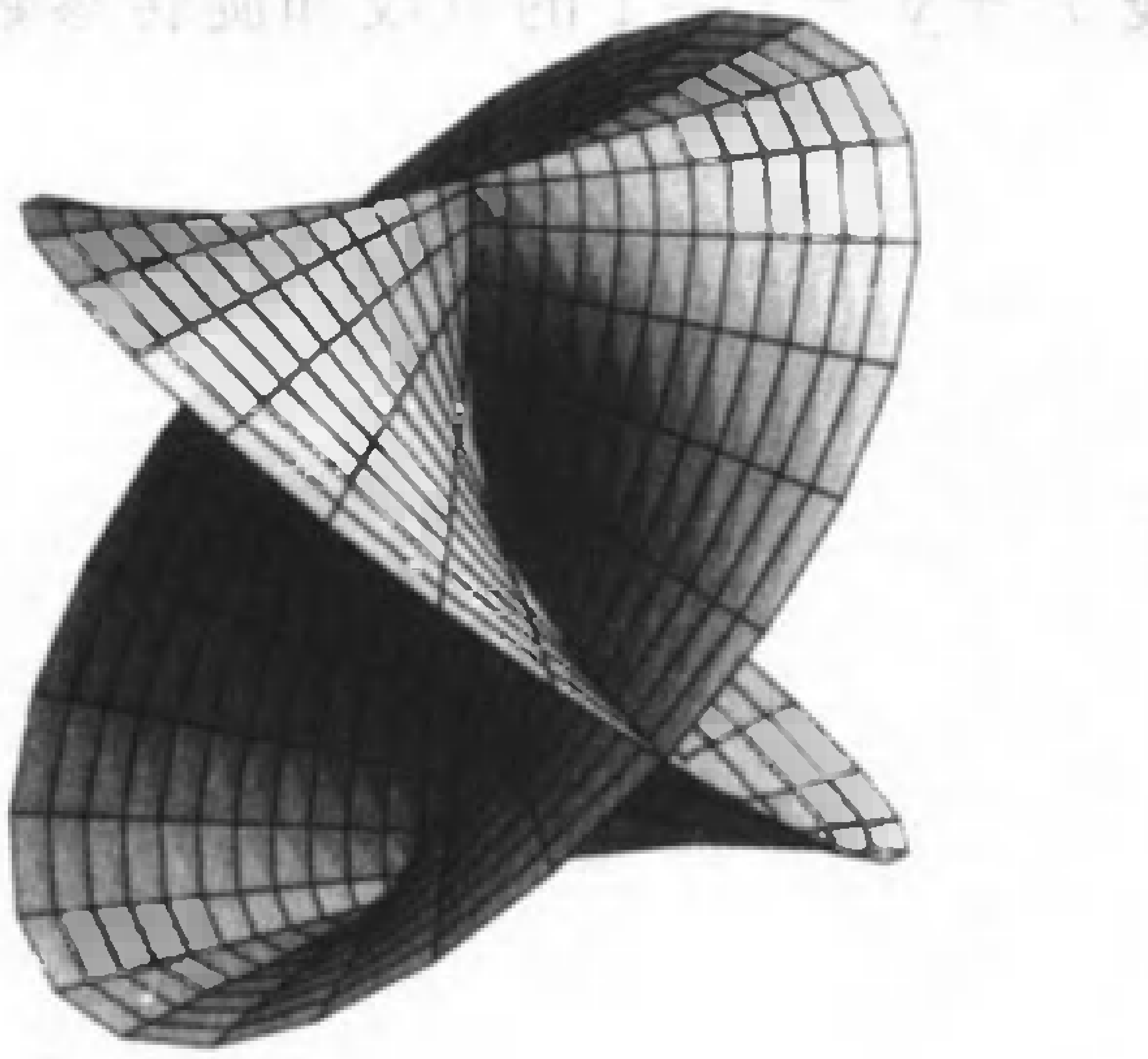


图 2-26　直纹曲 $(v\cos(u), v\sin(u), \sin(u))$

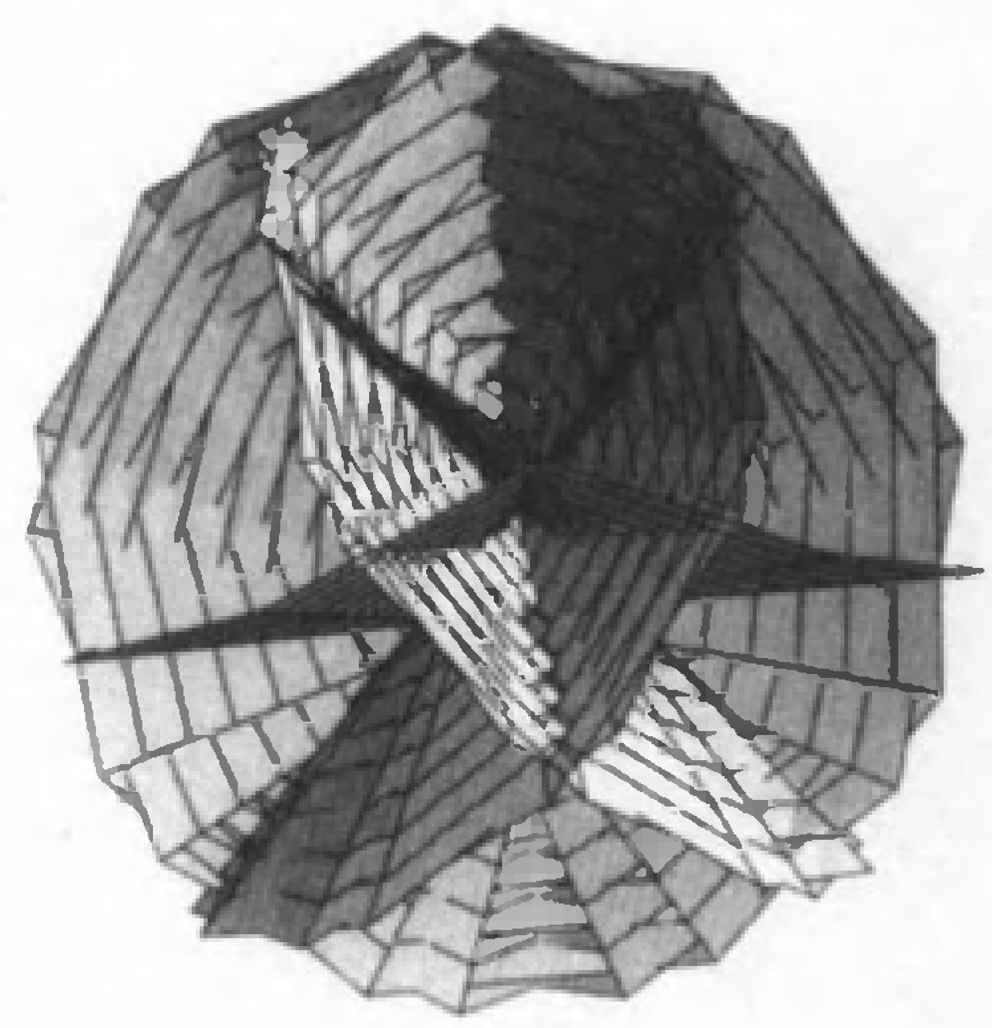


图 2-27　球面曲线的切可展曲面

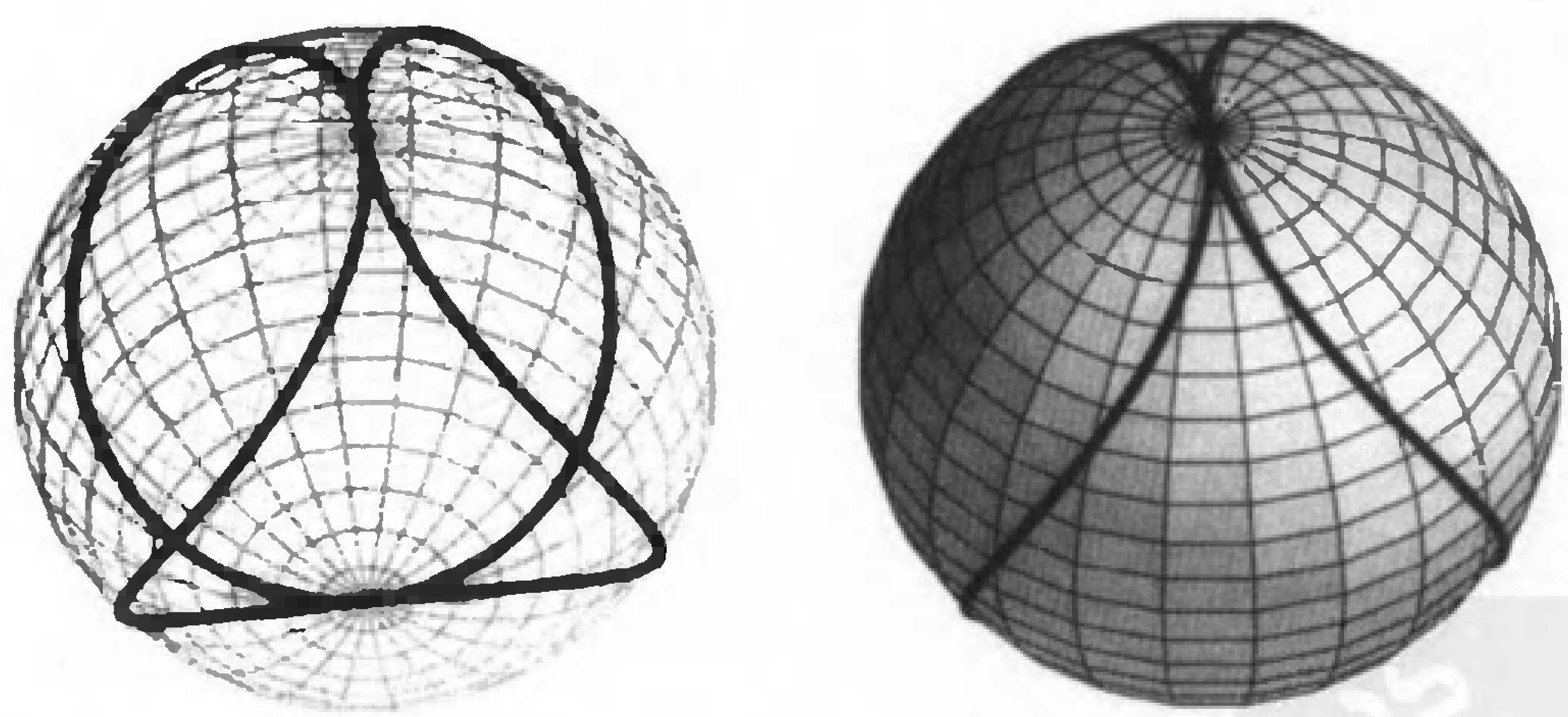


图 2-28　球面曲线

```
> plot3d(rule_surf(<cos(u)*cos(2*u)| sin(u)*cos(2*u)|
sin(2*u)>,map(diff,<cos(u)*cos(2*u)|sin(u)*cos(2*u)
|sin(2*u)>,u)),u=0..3.5*Pi,v=-2..2,scaling=constrained,
shading=XY,lightmodel=light2,orientation=[38,43],
grid=[40,20]);

> cu:=tubeplot(convert(<cos(u)*cos(2*u) |sin(u)*cos(2*u)|
sin(2*u)>,list), u=0..2*Pi,radius=0.015,color=black,
numpoints=200,scaling=constrained):

> sphere1:=plot3d(<cos(u)*cos(v)| sin(u)*cos(v)|sin(v)>,
u=0..2*Pi,v=-Pi/2..Pi/2):
```

```
> display({cu,sphere1},style=wireframe, scaling=
constrained,shading=XYZ,lightmodel=light3,
orientation=[38,43]);
> display({cu,sphere1},scaling=constrained,
shading=XYZ,lightmodel=light3,orientation=[38,43]);
```

113~114 **练习 2.5.7** 对平面曲线 $\alpha(u)=(g(u),\ h(u))$，编写 Maple 程序，建立旋转曲面的参数方程，再用该程序绘制悬链面和环面等旋转曲面.

练习 2.5.8 用上述两个程序建立单叶双曲线 $x^2+y^2-z^2=1$ 的直纹和旋转参数方程.

第3章 曲　　率

3.1 引言

众所周知，形状算子和主曲率为我们提供了大量的曲面几何信息，但是我们也知道要精确计算出它们是很困难的，有时候根本不可行．本章我们将介绍曲面两个可计算的“不变量”，由线性代数可知，它们和形状算子密切相关．下一章我们将考虑这些不变量为我们提供的研究对象的信息．

线性变换两个最基本的不变量是它的行列式和迹．由于一点 p 处的形状算子就是一个线性变换，我们可以用它的行列式和迹定义两个几何量．

定义 3.1.1 *设 S 为曲面 M 的形状算子，M 在点 $p\in M$ 的高斯曲率 $K(p)=\det(S_p)$．M 在点 $p\in M$ 的平均曲率 $H(p)=\dfrac{1}{2}\operatorname{trace}(S_p)$．*

这两个量是研究曲面几何性质的基本量．虽然 K 和 H 是用形状算子定义的，但是可以通过单纯的微积分计算得到它们．因此，要借助一个前提，那就是线性代数是通过微积分研究几何问题的桥梁．已知形状算子相对于一组主向量构成的基的矩阵为

$$\begin{bmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{bmatrix},$$

行列式和迹分别为 k_1k_2 和 k_1+k_2，因此

$$K=k_1k_2,\quad H=\frac{k_1+k_2}{2}.$$ 115

回忆若用 $-U$ 代替 U 作为法向量，则 $k(u)$ 的符号也随之改变．由于高斯曲率是这样两个改变量的乘积，故它的符号不改变．但是，当单位法向量改变符号时，H 改变符号．由于 K 的符号是有意义的，这些结论就显得尤为重要．

假设 $K(p)>0$，因为 $K=k_1k_2$，所以，k_1 和 k_2 必须同号．但是 $k_1=\max k(u)$，$k_2=\min k(u)$，所以对任意的 u，$k(u)$ 符号相同．如果对任意的 u，$k(u)>0$，那么 M 在任意方向都弯向 U．如果对任意 $k(u)<0$，那么 M 在任意方向都弯离 U．

练习 3.1.2 解释 $K(p)<0$ 和 $K(p)=0$．此时图形是什么样的？

例 3.1.3

1. 对 $K(p)>0$，在 $p=(0,0,0)$ 点考察椭圆抛物面 $z=x^2+y^2$．抛物线在 p 点处与 xy 面相切．显然，无论如何选定垂直的法向量，两个 $k(u)$ 或者都是正的，或者都是负的．

2. 对 $K(p)<0$，在 $p=(0,0,0)$ 点考察双曲抛物面 $z=x^2-y^2$．同样，该曲面在 p 点与 xy 平面相切，但是无论如何，曲面对选定的法向量既有弯离也有弯向．

练习 3.1.4 $K(p)=0$，对应的曲面有两种情形(1)平面，(2)圆柱面 $x^2+y^2=1$．利用法曲率来讨论．

下面的主要工作是直接利用微积分和线性代数计算曲率．设 v 和 w 是 $p\in M$ 处的两个线性

无关的切向量. 因此其中任一个不是另一个的倍数. 因为它们是线性无关的，所以$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{w}$构成$T_p(M)$的一组基，任何向量都是这组基的线性组合. 因此，形状算子在它上面的作用可以表示为

$$S(\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w},\quad S(\boldsymbol{w})=c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}.$$

即S相对于基$\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$的矩阵为

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

116 由此可知$\det(S)=ad-bc=K$，$\operatorname{tr}(S)=a+d=2H$，所以

$$\begin{aligned}
S(\boldsymbol{v})\times S(\boldsymbol{w}) &= (a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w})\times(c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}) \\
&= ac(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v})+ad(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+bc(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v})+bd(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{w}) \\
&= 0+(ad-bc)(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+0 \\
&= \det(S)\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} \\
&= K\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}, \\
S(\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\times S(\boldsymbol{w}) &= (a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w})\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\times(c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}) \\
&= a(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+d(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) \\
&= (a+d)(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) \\
&= \operatorname{tr}(S)\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} \\
&= 2H\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}.
\end{aligned}$$

练习 3.1.5(拉格朗日恒等式) 证明对任意向量$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$有

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a}).$$

提示：用坐标$(v^1, v^2, v^3)=\boldsymbol{v}$表示向量，结合练习 3.1.5 和上述公式，可得

$$(S(\boldsymbol{v})\times S(\boldsymbol{w}))\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=K(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$$

$$(S(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v})(S(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{w})-(S(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w})(S(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v})=K((\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}))$$

$$K=\frac{(S(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v})(S(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{w})-(S(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w})(S(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v})},$$

以及

$$\begin{aligned}
&(S(\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\times S(\boldsymbol{w}))\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) \\
&=2H(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) \\
&=(S(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})-(S(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})(S(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{w})-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})(S(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v}) \\
&=2H((\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}))
\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned}
H=&((S(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})-(S(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})(S(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{w}) \\
&-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})(S(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v}))/(2((\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}))).
\end{aligned}$$

117 **练习 3.1.6** 利用欧拉公式(推论 2.4.11)证明：

(1)一点的平均法曲率H是法曲率的平均值

$$H=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

(2)对任意两个互相垂直的单位向量$\boldsymbol{v}_1$ 和$\boldsymbol{v}_2$，有 $H=\dfrac{k(\boldsymbol{v}_1)+k(\boldsymbol{v}_2)}{2}$. 提示：如果从$\boldsymbol{v}_1$ 到 $\boldsymbol{u}_1$ 的角为 ϕ，则从$\boldsymbol{v}_2$ 到 $\boldsymbol{u}_1$ 的角为 $\phi+\dfrac{\pi}{2}$.

练习 3.1.7 证明主曲率可用 K 和 H 表示：

$$k_1=H+\sqrt{H^2-K}\quad 和\quad k_2=H-\sqrt{H^2-K}.$$

提示：k_1 和 k_2 是 S 的特征值. 对于 $S=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$，令特征多项式 $\lambda^2-\mathrm{tr}(S)\lambda+\det(S)=0$，利用二次求根公式求解.

另外有一个几何的办法，就是用高斯映射 G：$M\to S^2$ 观察高斯曲率. 由第 2 章知道，高斯映射的导数等于负的形状算子，即 $G_*(\boldsymbol{v})=-S(\boldsymbol{v})$. 取一组基$\{\boldsymbol{x}_u,\ \boldsymbol{x}_v\}$，考虑

$$\begin{aligned}G_*(\boldsymbol{x}_u)\times G_*(\boldsymbol{x}_v)&=(-S(\boldsymbol{x}_u))\times(-S(\boldsymbol{x}_v))\\&=K\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v.\end{aligned}$$

现在$|G_*(\boldsymbol{x}_u)\times G_*(\boldsymbol{x}_v)|$和$|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|$可看成是高斯映射分别在 S^2 和 M 上像的无穷小面积. 上述公式说明这些无穷小面积的比值恰为$|K|$. 还有一个方法是，设$\mathcal{U}$是 $p\in M$ 的一个小开邻域，令$\mathcal{U}$缩小直到变为一个点 p，那么

$$|K|=\lim_{\mathcal{U}\to p}\frac{G(\mathcal{U})\text{ 的面积}}{\mathcal{U}\text{的面积}}.$$

上述表达式意味着高斯曲率的大小度量了单位法向量对面积的影响——或扩大或缩小. 我们也可以用高斯映射的像确定这个面积，如下所示.

命题 3.1.8 *对于 M：$\boldsymbol{x}(u,\ v)$，$G(M)$的面积等于 M 的总高斯曲率 $\int_M K\,\mathrm{d}A$.* 118

证明 计算

$$\begin{aligned}G(M)\text{ 的面积}&=\int_M|G_*(\boldsymbol{x}_u)\times G_*(\boldsymbol{x}_v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_M|(-S(\boldsymbol{x}_u))\times(-S(\boldsymbol{x}_v))|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_M K\,|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_M K\,\mathrm{d}A.\end{aligned}$$

■

当我们在第 4 章中用复分析的方法处理极小曲面时，高斯映射将更为重要. 因此，先介绍一些术语. 如果对任意 $p\in M$，$K(p)=0$，则称曲面 M 为*平坦的*. 如果对任意 $p\in M$，$H(p)=0$，就称曲面是*极小的*(minimal). 我们将在下面两章中研究极小曲面，并详细叙述"极小"的由来. 而"平坦的"这一说法来源于平面是"平坦的"曲面的一个首要的例子. 我们已经看到平面的形状算子是零，所以它的行列式也就是高斯曲率为零. 但是并不是所有平坦的曲面都满足这一点.

练习 3.1.9 利用形状算子的知识证明正圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 是平的，但不是极小的.

练习 3.1.10　证明如果 M 是极小的，则在 M 上总有 $K\leqslant 0$. 提示：考察主曲率.

练习 3.1.11　证明对于 R 球面 $S^2(R)$ 有 $K=1/R^2$. 首先考虑 R 球面形状算子的行列式，然后考虑 R 球面的高斯映射和面积是如何改变的.

3.2　曲率的计算

当 x 是 M 的坐标补片时，K 和 H 公式中的 v 和 w 可以具体指定为 x_u 和 x_v，由此引出了下述惯用记号：

$$E=x_u\cdot x_u,\quad F=x_u\cdot x_v,\quad G=x_v\cdot x_v;$$

119 $$l=S(x_u)\cdot x_u,\quad m=S(x_u)\cdot x_v=S(x_v)\cdot x_u,\quad n=S(x_v)\cdot x_v.$$

用 x_u 和 x_v 替换一般的 v，w，得到如下两个曲率公式：

$$K=\frac{(S(x_u)\cdot x_u)(S(x_v)\cdot x_v)-(S(x_u)\cdot x_v)(S(x_v)\cdot x_u)}{(x_u\cdot x_u)(x_v\cdot x_v)-(x_u\cdot x_v)(x_v\cdot x_u)}$$

$$=\frac{ln-m^2}{EG-F^2}.$$

$$H=[(S(x_u)\cdot x_u)(x_v\cdot x_v)-(S(x_u)\cdot x_v)(x_v\cdot x_u)+(x_u\cdot x_u)(S(x_v)\cdot x_v)$$
$$-(x_u\cdot x_v)(S(x_v)\cdot x_u)]/2((x_u\cdot x_u)(x_v\cdot x_v)-(x_u\cdot x_v)(x_v\cdot x_u))$$

$$H=\frac{Gl+En-2Fm}{2(EG-F^2)}.$$

注记 3.2.1　利用练习 1.3.5(拉格朗日恒等式)可知，$EG-F^2=|x_u\times x_v|^2$.

现在不用形状算子 S，直接由定理 2.3.5 也能得到关于 K 和 H 的基本结果.

引理 3.2.2　$l=U\cdot x_{uu}$，$m=U\cdot x_{uv}$，$n=U\cdot x_{vv}$.

练习 3.2.3　证明引理 3.2.2 的公式.

练习 3.2.4　假设 $x(u,v)$，$y(r,s)$ 是同一曲面 M 的两个坐标补片，对 $y^{-1}\circ x(u,v)=(r(u,v),s(u,v))$，证明

$$E_xG_x-F_x^2=[r_us_v-r_vs_u]^2(E_yG_y-F_y^2),$$
$$l_xn_x-m_x^2=[r_us_v-r_vs_u]^2(l_yn_y-m_y^2),$$

因此有 $K_x=K_y$.

练习 3.2.5　假设 $x(u,v)$ 是坐标补片，由 $y(u,v)=cx(u,v)$ 定义一个新的坐标补片，其中 c 为常数，证明

$$K_y=\frac{1}{c^2}K_x.$$

特别当 $x(u,v)$ 是 R 球面的标准参数方程时，结果有何意义？

练习 3.2.6　由曲面 M：$x(u,v)$ 构造平行曲面 M^t：$x^t(u,v)=x(u,v)+tU(u,v)$. 首先证明高斯曲率和平均曲率的公式分别是

120 $$K^t=\frac{K}{1-2Ht+Kt^2},\quad H^t=\frac{H-Kt}{1-2Ht+Kt^2},$$

其中 K 和 H 分别是 M 的高斯曲率和平均曲率. 其次证明下面的结论：(1)若 M 有常平均曲率

$H=c\neq 0$，则 $M^{1/(2c)}$ 有常高斯曲率 $K^{1/(2c)}=4c^2$。(2)如果 M 有常高斯曲率 $K=c^2>0$(并且无脐点)，则 $M^{1/c}$ 有常平均曲率 $H^{1/c}=-\frac{c}{2}$. 提示：由 $x^t(u,v)$ 的定义直接计算 $E^tG^t-F^{t^2}=|x_u^t\times x_v^t|^2=[1-2Ht+Kt^2]^2(EG-F^2)$，然后比较. 在第 4 章讨论极小曲面和有常平均曲率的曲面时，将用到平行曲面.

练习 3.2.7　设 M：$x(u,v)$为曲面，回忆如果对任意的 t，切向量 $\alpha'(t)$是形状算子的特征向量时，曲线 α：$I\to M$ 为曲率线. 证明 u，v-参数曲线(在非脐点区域)是曲率线当且仅当 $F=0$且 $m=0$. 提示：对一个方向，利用曲率线的假设，用两种方式计算 $x_u\cdot x_v$. 证明或者 M 上的点都是脐点(因此为球面)或 $F=x_u\cdot x_v=(E/l)m=0$. 对另一方向，记 $S(x_u)=ax_u+bx_v$，$S(x_v)=cx_u+dx_v$. 取其与 x_u，x_v 的点积，计算系数.

现在我们集中精力计算以前所提到的各类曲面的高斯曲率和平均曲率.

例 3.2.8(Enneper 曲面)　设 M 表示具有标准参数方程为

$$x(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,v-\frac{v^3}{3}+vu^2,u^2-v^2\right)$$

的 Enneper 曲面. 由参数方程可以计算度量系数. 首先，$x_u=(1-u^2+v^2,\ 2uv,\ 2u)$，$x_v=$
$(2uv,\ 1-v^2+u^2,\ -2v)$，于是 121

$$\begin{aligned}E&=x_u\cdot x_u\\&=1+2u^2+2v^2+u^4+2u^2v^2+v^4\\&=(1+u^2+v^2)^2,\\F&=x_u\cdot x_v\\&=2uv-2u^3v+2uv^3+2uv-2uv^3+2u^3v-4uv\\&=0,\\G&=x_v\cdot x_v\\&=4u^2v^2+1-v^2+u^2-v^2+v^4-v^2u^2+u^2-u^2v^2+u^4+4v^2\\&=1+2u^2+2v^2+u^4+2u^2v^2+v^4\\&=(1+u^2+v^2)^2.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}x_u\times x_v&=(-4uv^2-2u+2uv^2-2u^3,2v-2u^2v+2v^3+4u^2v,1-(u^2-v^2)^2-4u^2v^2)\\&=(-2u(1+u^2+v^2),2v(1+u^2+v^2),1-(u^2+v^2)^2),\end{aligned}$$

它的长度平方为

$$\begin{aligned}|x_u\times x_v|^2&=4u^2(1+u^2+v^2)^2+4v^2(1+u^2+v^2)^2+(u^2+v^2)^4-2(u^2+v^2)^2+1\\&=4(u^2+v^2)+8(u^2+v^2)^2+4(u^2+v^2)^3+(u^2+v^2)^4-2(u^2+v^2)^2+1\\&=(u^2+v^2)^4+4(u^2+v^2)^3+6(u^2+v^2)^2+4(u^2+v^2)+1\\&=(u^2+v^2+1)^4.\end{aligned}$$

当然也可以通过等式 $|x_u \times x_v| = \sqrt{EG-F^2}$ 计算，得

122 $$U = \left(\frac{-2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{1-(u^2+v^2)^2}{(u^2+v^2+1)^2}\right).$$

二阶偏导数 $x_{uu}=(-2u,\ 2v,\ 2)$，$x_{uv}=(2v,\ 2u,\ 0)$，$x_{vv}=(2u,\ -2v,\ -2)$，则

$$\begin{aligned} l &= x_{uu} \cdot U \\ &= \frac{4u^2}{u^2+v^2+1} + \frac{4v^2}{u^2+v^2+1} + \frac{2-2(u^2+v^2)^2}{(u^2+v^2+1)^2} \\ &= \frac{2(u^2+v^2+1)^2}{(u^2+v^2+1)^2} \\ &= 2. \end{aligned}$$

类似地，$n = x_{vv} \cdot U = -2$. 显然，$m = x_{uv} \cdot U = 0$. 那么 Enneper 曲面的高斯曲率

$$K = \frac{ln-m^2}{EG-F^2} = \frac{-4}{(u^2+v^2+1)^4},$$

平均曲率

$$\begin{aligned} H &= \frac{Gl+En-2Fm}{2(EG-F^2)} \\ &= \frac{(u^2+v^2+1)^2(2)+(u^2+v^2+1)^2(-2)-0}{2(u^2+v^2+1)^4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

故 Enneper 曲面为极小曲面. 我们将在第 4 章研究如何得到它的参数方程.

练习 3.2.9 证明悬链面和 Enneper 曲面的 u 和 v-参数曲线是曲率线且是平面曲线(提示：计算挠率). 最后证明下述参数曲面的参数曲线也是平面曲率线：

$$x(u,v) = \left(\frac{cu \pm \sin u \cosh v}{\sqrt{1-c^2}}, \frac{v \pm c\cos u \sinh v}{\sqrt{1-c^2}}, \pm \cos u \cosh v\right).$$

提示：利用 Maple. Enneper 曲面、悬链曲面和上述曲面是仅有的曲率线为平面曲线的极小曲面.

练习 3.2.10 利用 $K=\frac{ln-m^2}{EG-F^2}$，证明 R 球面 $S^2(R)$ 的高斯曲率为 $1/R^2$.

例 3.2.11 双叶双曲面

123 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

可以参数化为 $x(u,\ v)=(a\sinh u\cos v,\ b\sinh u\sin v,\ c\cosh u)$，则

$$x_u = (a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u),$$

$$x_v = (-a\sinh u\sin v, b\sinh u\cos v, 0),$$

以及 $x_u \times x_v = (-bc\sinh^2 u\cos v,\ -ac\sinh^2 \sin v,\ ab\sinh u\cosh u)$，除以 $|x_u \times x_v|$，得

$$U = \frac{x_u \times x_v}{W},$$

其中

$$W=\sqrt{b^2c^2\sinh^4u\cos^2v+a^2c^2\sinh^4\sin^2v+a^2b^2\sinh^2u\cosh^2u}.$$

于是有

$$E=a^2\cosh^2u\cos^2v+b^2\cosh^2u\sin^2v+c^2\sinh^2u,$$
$$F=-a^2\sinh u\cosh u\sin v\cos v+b^2\sinh u\cosh u\sin v\cos v,$$
$$G=a^2\sinh^2u\sin^2v+b^2\sinh^2u\cos^2v,$$

且

$$EG-F^2=b^2c^2\sinh^4u\cos^2v+a^2c^2\sinh^4\sin^2v+a^2b^2\sinh^2u\cosh^2u=W^2.$$

下面计算二阶导数以及 l，m 和 n.

$$x_{uu}=(a\sinh u\cos v,b\sinh u\sin v,c\cosh u),$$
$$x_{uv}=(-a\cosh u\sin v,b\cosh u\cos v,0),$$
$$x_{vv}=(-a\sinh u\cos v,-b\sinh u\sin v,0);$$

$$l=x_{uu}\cdot U=\frac{-abc\sinh^3u\cos^2v-abc\sinh^3u\sin^2v+abc\sinh u\cosh^2u}{W}=\frac{abc\sinh u}{W},\quad 利用\ 1+\sinh^2u=\cosh^2u$$

$$m=x_{uv}\cdot U=\frac{abc\sinh^2u\cosh u\sin v\cos v-abc\sinh^2u\cosh u\sin v\cos v}{W}=0,$$

$$n=x_{vv}\cdot U=\frac{abc\sinh^3u\cos^2v+abc\sinh^3u\sin^2v}{W}=\frac{abc\sinh^3u}{W}.$$ [124]

于是高斯曲率

$$K=\frac{ln-m^2}{EG-F^2}=\frac{a^2b^2c^2\sinh^4u}{W^4},$$

可以写成

$$K=1\Big/\left(\frac{W^2}{abc\sinh^2u}\right)^2,$$

其中

$$\frac{W^2}{abc\sinh^2u}=\frac{bc}{a}\sinh^2u\cos^2v+\frac{ac}{b}\sinh^2u\sin^2v+\frac{ab}{c}\cosh^2u.$$

因为参数方程的坐标函数为 $x=a\sinh u\cos v$，$y=b\sinh u\sin v$，$z=c\cosh u$，读者可以验证高斯曲率可用 x，y，z 表示：

$$K=\frac{1}{a^2b^2c^2\left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right]^2}.$$

练习 3.2.12 证明单叶双曲面

$$x(u,v)=(a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u)$$

的高斯曲率可用笛卡儿坐标表示：

$$K=-\frac{1}{a^2b^2c^2\left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right]^2}.$$

提示：这里也许 Maple 有用.

练习 3.2.13 证明椭圆抛物面

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

的高斯曲率可用笛卡儿坐标表示：

$$K=\frac{1}{4a^2b^2\left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{1}{4}\right]^2}.$$

练习 3.2.14 证明双曲抛物面

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

的高斯曲率可用笛卡儿坐标表示：

125

$$K=-\frac{1}{4a^2b^2\left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{1}{4}\right]^2}.$$

练习 3.2.15 求螺旋面 $x(u, v)=(u\cos v, u\sin v, bv)$ 的高斯曲率和平均曲率.

练习 3.2.16 求马鞍面 M：$z=xy$ 的高斯曲率和平均曲率，取蒙日片 $x(u, v)=(u, v, uv)$.

练习 3.2.17 计算 Kuen 曲面的高斯曲率，该曲面的参数方程为

$$x(u,v)=\left(\frac{2(\cos u+u\sin u)\sin v}{1+u^2\sin^2 v},\frac{2(\sin u-u\cos u)\sin v}{1+u^2\sin^2 v},\ln\left(\tan\frac{v}{2}\right)+\frac{2\cos v}{1+u^2\sin^2 v}\right).$$

练习 3.2.18 计算下列直纹曲面的高斯曲率.

(a)证明直纹面 $x(u, v)=\beta(u)+v\delta(u)$ 的高斯曲率

$$K=-\frac{m^2}{EG-F^2}=\frac{-(\beta'\cdot\delta\times\delta')^2}{W^4},$$

其中 $W=|\beta'\times\delta+v\delta'\times\delta|$.

(b)M：$z=xy$.

(c)锥面 $x(u, v)=p+v\delta(u)$.

(d)柱面 $x(u, v)=\beta(u)+vq$.

(e)螺旋面.

(f)单叶双曲面.

(g)双曲抛物面.

用曲面的几何性质解释计算结果，并与前面的计算比较．提示：回忆利用练习 1.3.5 得到的等式 $EG-F^2=|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|^2$.

练习 3.2.19　锥面(除去顶点)是一个曲面．利用下面两个坐标补片计算标准锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的 K 及 H.

(a)$\boldsymbol{x}(u,\ v)=(u,\ v,\ \sqrt{u^2+v^2})$(蒙日补片).

(b)$\boldsymbol{x}(u,\ v)=v(\cos u,\ \sin u,\ 1)$(直纹补片).

练习 3.2.20　直纹面 M：$\boldsymbol{x}(u,\ v)=\beta(u)+v\delta(u)$是可展的，如果它的单位法向量 U 沿母线为定值．因此 U 不依赖于 v，故 $U_v=0$，证明直纹面是可展的当且仅当高斯曲率为零(实际上，不假定“直纹”也有同样结果)，见 5.7 节在工业上的应用．提示：关键在于 m．对一个方 126
向考虑$(\boldsymbol{x}_u\cdot U)_v$，另一个方向考虑$(\boldsymbol{x}_v\cdot U)_v$.

练习 3.2.21　直接证明锥面和柱面沿母线有固定的法向量，因此是可展的.

练习 3.2.22　除了锥面和柱面之外，较有代表性的可展曲面的例子是源于切线的切可展曲面．给定曲线 $\beta(u)$，它的切可展曲面由参数方程 $\boldsymbol{x}(u,\ v)=\beta(u)+v\beta'(u)$定义．证明这一曲面确实为可展的．画出螺旋线 $\beta(u)=(\cos u,\ \sin u,\ u)$的切可展曲面．如图 3-1 及第 2 章的图 2-25所示.

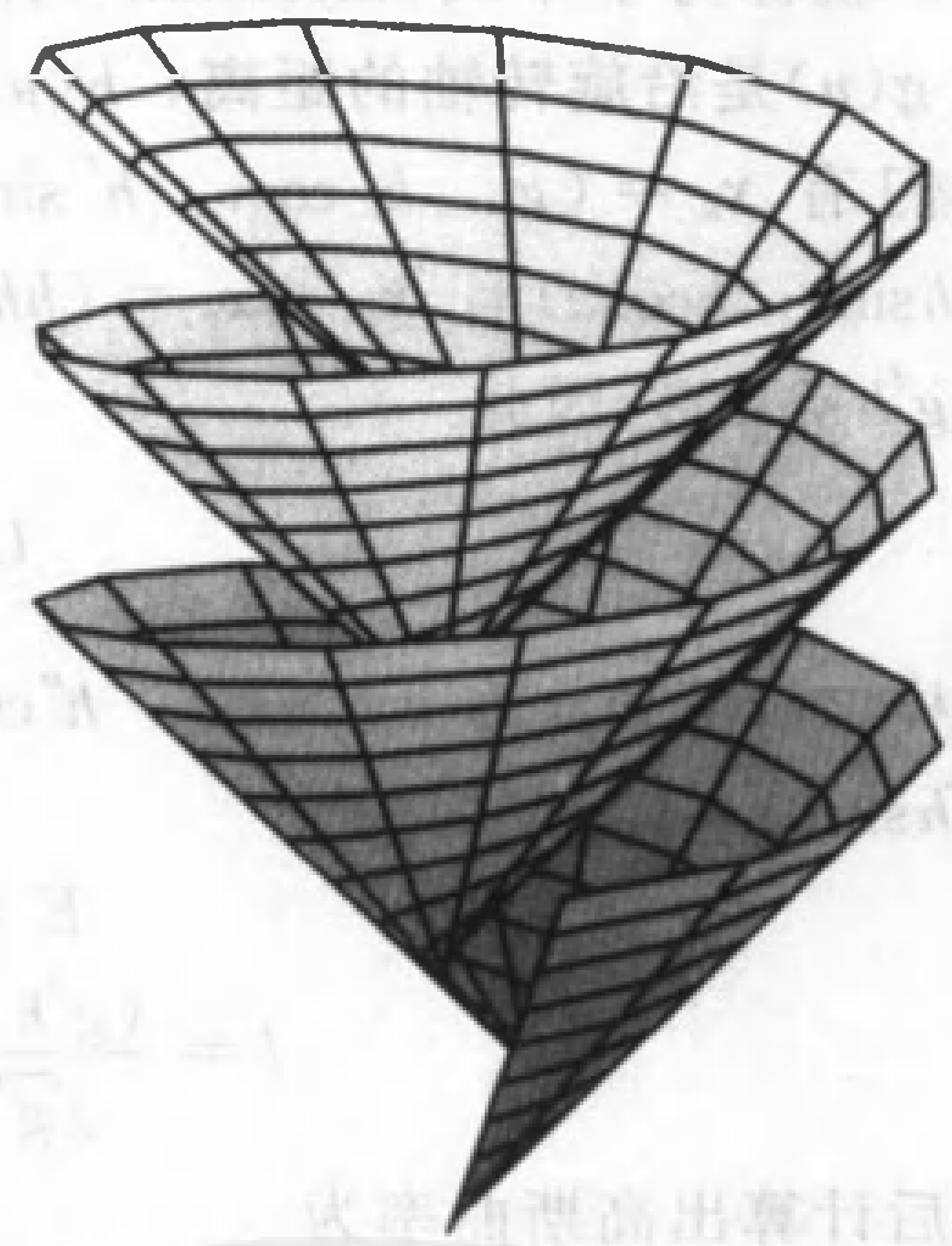


图 3-1　螺旋线的切可展曲面(一半)

练习 3.2.23　设 β：$I\to M$ 为曲面 M 上单位法向量是 U 的曲线．证明 β 是 M 上的曲率线当且仅当由 $\boldsymbol{y}(u,\ v)=\beta(u)+vU(u)$定义的曲面为可展的．这里 $U(u)$表示沿 β 的 M 的法向量.

练习 3.2.24　设 M 是无脐点的可展曲面，且 α 是 M 上对应于非零主曲率的单位速度曲率线．证明 α 与每条母线都垂直．提示：证明 $\delta\cdot U=0$，并微分.

练习 3.2.25　设 α 和 M 分别为练习 3.2.24 中的曲率线和可展曲面，M 存在参数方程 $\boldsymbol{x}(s,\ t)=\alpha(s)+t\beta(s)$，且
$|\beta(s)|=1$．证明对某个函数 $\lambda(s)$，有 $\beta'(s)=\lambda(s)\alpha'(s)$. 127

练习 3.2.26　对于 M：$z=f(x,\ y)$：

(a)给出这个曲面的蒙日片.

(b)计算 E，F，G，l，m，n.

(c)求 K 和 H 的公式.

(d)回忆 f 的临界点$(u_0,\ v_0)$是满足 $f_u(u_0,\ v_0)=0$ 且 $f_v(u_0,\ v_0)=0$ 的点．临界点$(u_0,\ v_0)$可能是极大点、极小点或马鞍点．二阶导数可以确定临界点究竟是哪种类型的点．步骤如下：首先，计算 $D=f_{uu}(u_0,\ v_0)f_{vv}(u_0,\ v_0)-(f_{uv}(u_0,\ v_0))^2$．若 $D=0$，则无法确定；若 $D<0$，$(u_0,\ v_0)$为马鞍点；若 $D>0$，有两种情况：

(Ⅰ)若 $f_{uu}(u_0,\ v_0)>0$，则$(u_0,\ v_0)$是极小点.

(Ⅱ)若 $f_{uu}(u_0, v_0)<0$，则(u_0, v_0)是极大点.

(也可以利用 f_{vv} 做上述工作.)提示：(1)K 与 D 是怎样的关系?(2)考虑 $K>0$，$K<0$，$K=0$.(3)对于上面几种情形，法向量和主曲率都是什么样的?(4)回忆对单位向量$\boldsymbol{v}$，$k(\boldsymbol{v})=S(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}$.如果 $\boldsymbol{w}$ 是非单位向量，那么取 $\boldsymbol{w}/|\boldsymbol{w}|$. 因此

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{w} &= (S(\boldsymbol{w}/|\boldsymbol{w}|)\cdot\boldsymbol{w}/|\boldsymbol{w}|)|\boldsymbol{w}|^2 \quad \text{为什么?} \\ &= k(\boldsymbol{w}/|\boldsymbol{w}|)|\boldsymbol{w}|^2. \end{aligned}$$

(5)$f_{uu}(u_0, v_0)=U(u_0, v_0)\cdot\boldsymbol{x}_{uu}(u_0, v_0)$，其中$(u_0, v_0)$是临界点.

3.3 旋转曲面

我们已经看到曲线绕轴转动可以得到许多有趣的曲面. 这些旋转曲面(如图 3-2 所示)有形如 $\boldsymbol{x}(u, v)=(g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v)$的坐标补片. 曲面上的一条曲线，如果它是由单点绕轴旋转而成的，就称它是平行的(parallel)(用 π 表示). (旋转出的)曲线正好跟原曲线一样，就称为子午线(meridian)(用 μ 表示). 回忆 $g(u)$是沿旋转轴的距离，$h(u)$是平行半径.
128 我们有 $\boldsymbol{x}_u=(g', h'\cos v, h'\sin v)$，$\boldsymbol{x}_v=(0, -h\sin v, h\cos v)$且 $\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v=(hh', -g'h\cos v, -g'h\sin v)$，因此

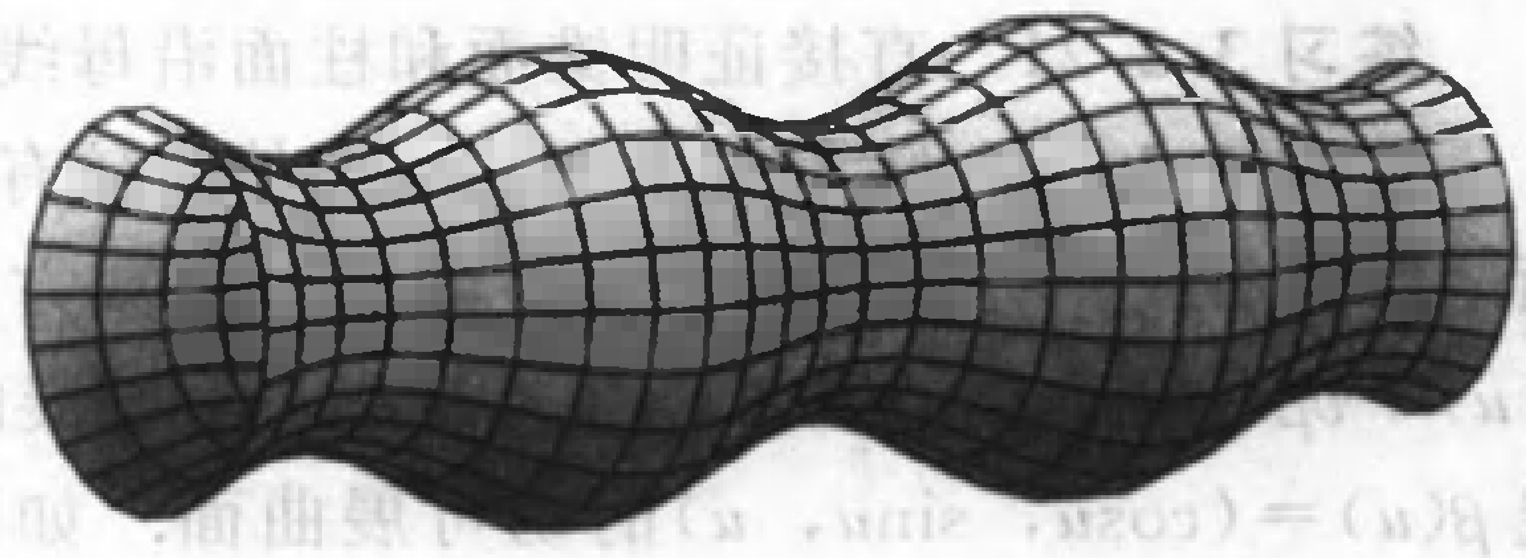


图 3-2 旋转曲面

$$U=\frac{(h', -g'\cos v, -g'\sin v)}{\sqrt{g'^2+h'^2}}.$$

同样二阶偏导数为 $\boldsymbol{x}_{uu}=(g'', h''\cos v, h''\sin v)$，$\boldsymbol{x}_{uv}=(0, -h'\sin v, h'\cos v)$，$\boldsymbol{x}_{vv}=(0, -h\cos v, -h\sin v)$，因而

$$E=g'^2+h'^2,\quad F=0,\quad G=h^2;$$

$$l=\frac{(g''h'-h''g')}{\sqrt{g'^2+h'^2}},\quad m=0,\quad n=\frac{hg'}{\sqrt{g'^2+h'^2}}.$$

最后计算出高斯曲率为

$$K=\frac{g'(g''h'-h''g')}{h(g'^2+h'^2)^2}.$$

练习 3.3.1 证明上述计算结果.

如果对任意的 t，原始曲线 $\alpha(t)=(g(t), h(t), 0)$满足 $g'(t)\neq 0$，则 g 严格递增. 所以它为一一映射，且有可微的反函数 g^{-1}. 由这个反函数我们可以给出曲线 α 的另一个参数方程. 定义 $f=h\circ g^{-1}$，可得

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(u) &= \alpha\circ g^{-1}(u)=(gg^{-1}(u), hg^{-1}(u), 0) \\ &= (u, f(u), 0). \end{aligned}$$

这样我们的计算就简单了. 例如，高斯曲率的公式变为 $K=-\dfrac{f''}{f(1+f'^2)^2}$. 为避免混淆，依然记$\alpha(u)=(u, h(u), 0)$，$K=-\dfrac{h''}{h(1+h'^2)^2}$.

例 3.3.2(环面)

$$x(u,v)=(\underbrace{(R+r\cos u)}_{h(u)}\cos v,(R+r\cos u)\sin v,\underbrace{r\sin u}_{g(u)})$$

$$K=\frac{\cos u}{r(R+r\cos u)}.$$

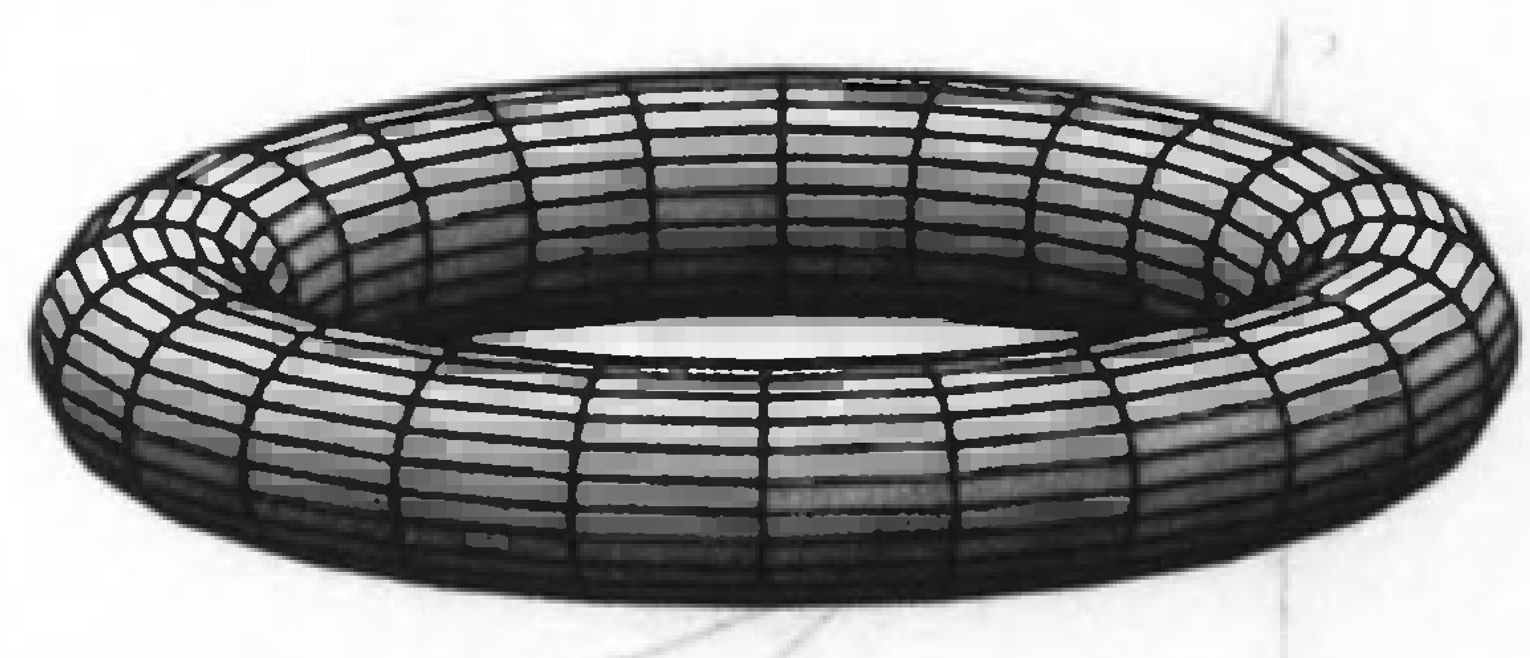


图 3-3 环面

当 $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos u>0$，因此在外半环上 $K>0$. 对于 $u=-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$，有 $\cos u=0$，故在环顶与环底 $K=0$. 最后，对于 $\frac{\pi}{2}<u<\frac{3\pi}{2}$，有 $\cos u<0$，因此在内半环上 $K<0$. 注意在 $u=0$ 处即在最外圆上可得 K 的最大值

$$K(0)=\frac{1}{r(R+r)}.$$

当 $u=\pi$ 时，在最内圆上 K 有最小值

$$K(\pi)=-\frac{1}{r(R-r)}.$$

练习 3.3.3 验证上述 K 的公式.

练习 3.3.4 旋转曲面可如上参数化. v-参数曲线是平行的，u-参数曲线是子午线. x_v 和 x_u 方向的法曲率分别记为 k_π 和 k_μ. 通过计算 S 分别对应于特征值 l/E，n/G 的特征向量 x_u 和 x_v，证明 $k_\mu=l/E$ 和 $k_\pi=n/G$. 这就是说子午线和平行线是曲率线. 提示：$S(x_u)=ax_u+bx_v$. 利用 $F=0$，$m=0$.

练习 3.3.5 对一般旋转曲面，证明

$$k_\mu=\frac{g''h'-g'h''}{(g'^2+h'^2)^{3/2}},\quad k_\pi=\frac{g'}{h(g'^2+h'^2)^{1/2}},$$

并给出 K 和 H 的公式. 在环面上 k_μ 是什么？对此几何解释是什么？

练习 3.3.6 绕 x 轴旋转悬链线 $y=c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$，得到悬链面. 证明公式

$$k_\mu=-\frac{1}{c\cosh^2\frac{u}{c}},\quad k_\pi=-k_\mu,\quad K=-\frac{1}{c^2\cosh^4\frac{u}{c}},\quad H=0.$$

能想到另一个极小旋转曲面吗？

练习 3.3.7 对下述旋转曲面求 K，并描述 $K>0$，$K<0$，$K=0$ 的情形.

(a)绕 x 轴旋转 $\alpha(u)=(u,\ e^{-u^2/2},\ 0)$.

(b)椭圆环面，绕 y 轴旋转椭圆 $\frac{(x-R)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

练习 3.3.8 如果曲面由单位速度曲线 $\alpha(u)=(g(u),\ h(u),\ 0)$ 旋转生成，则(a)$E=1$，$F=0$，$G=h^2$；(b)$K=-h''/h$. 129 ~ 130

例 3.3.9 展示计算技巧的另一个例子. 我们考虑类似于球面——有常高斯曲率的旋转曲

面. 这种曲面称为伪球面(pseudosphere)(如图 3-5 所示). 而且它是对生成曲线加上限制条件生成的. 也就是说, 设 α 是一条从(0, c)开始的曲线, 且其上任一点的切线到达 x 轴时的距离恰为 c, 这意味着 α 必须是递减且平坦的. 这样的曲线 α 称为曳物线(tractrix). 在物理上它表示船从(0, c)出发, 被一条沿 x 轴运动的拖船拖着走的轨迹(如图 3-4 所示).

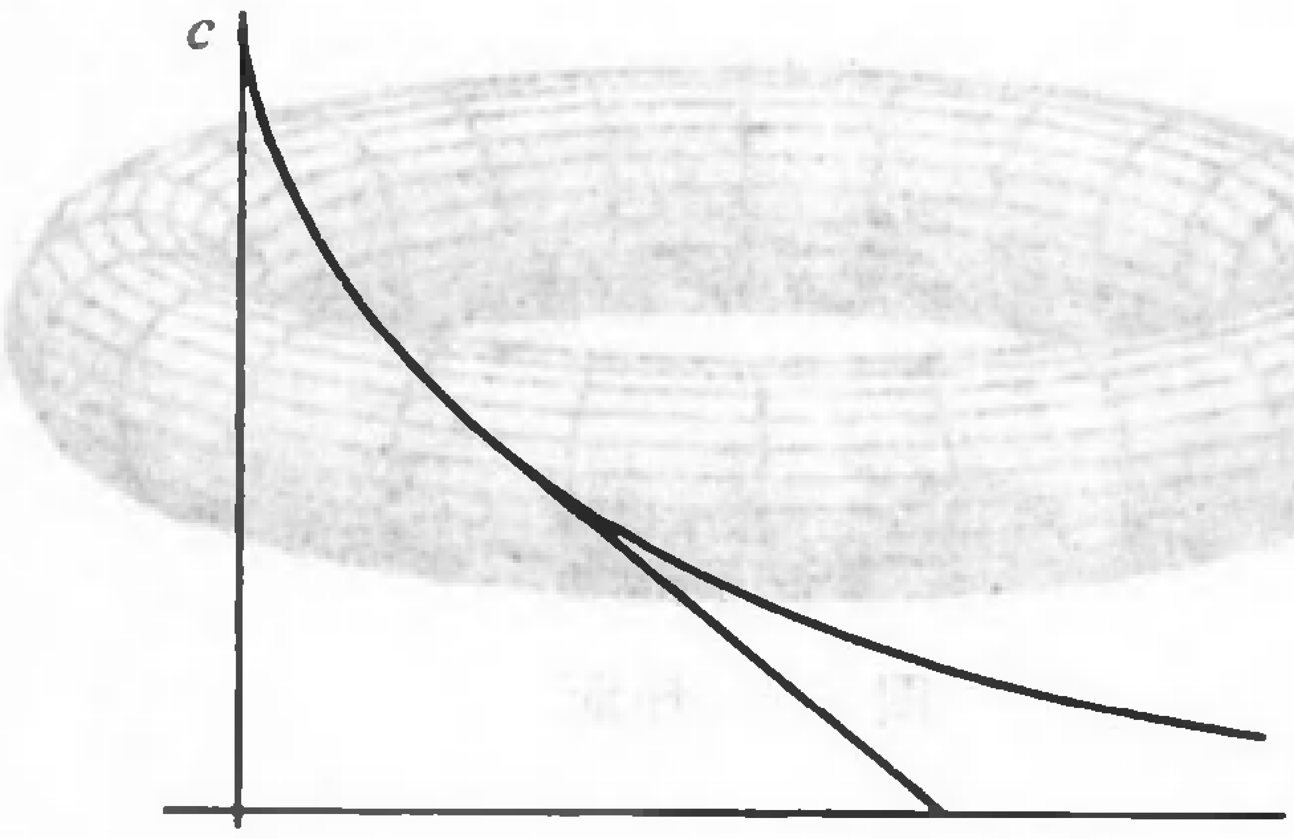


图 3-4　长为 c 的切线段

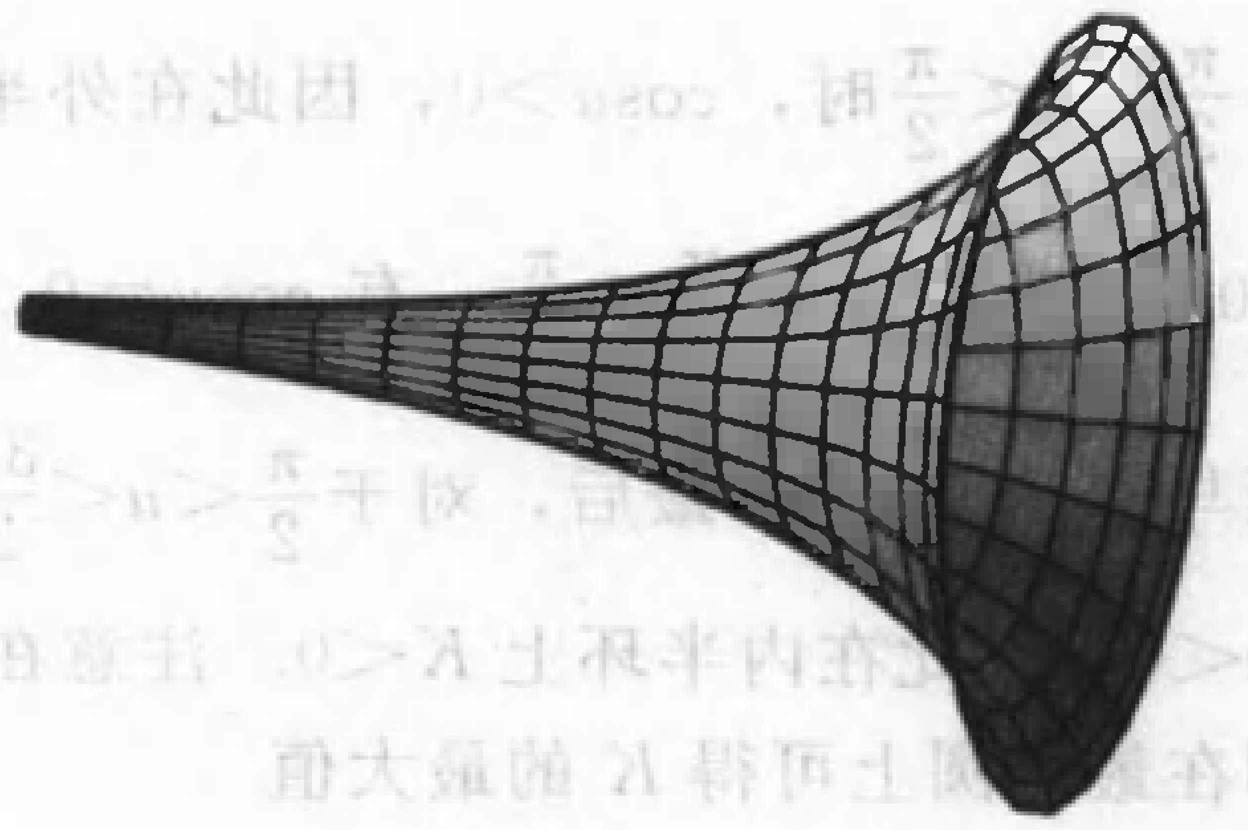


图 3-5　伪球面

记 $\alpha(u)=(u, h(u))$, 注意 $h'<0$ 以及 $g(u)=u$. $\alpha'(u)=(1, h'(u))$, 在$(u, h(u))$处的切线方程为

$$l(t)=\alpha(u)+t\alpha'(u).$$

$l(t)$的 y 坐标为 $h+th'$, 故 $t=0$ 时点在 $\alpha(u)$上, $t=-h/h'$时点在 x 轴上. 我们希望这条线段的长度为 c, 故有

$$c=\left|\alpha(u)-\left(\alpha(u)-\frac{h}{h'}\alpha'(u)\right)\right|$$

$$=\frac{h}{|h'|}|\alpha'(u)|$$

$$=\frac{h}{|h'|}\sqrt{1+h'^2}.$$

那么 $c^2=\frac{h^2}{h'^2}(1+h'^2)=\frac{h^2}{h'^2}+h^2$. 解出 h', 再取一次导数, 得

$$h'=-\frac{h}{\sqrt{c^2-h^2}},\quad h''=-\frac{h'c^2}{(c^2-h^2)^{3/2}}.$$

练习 3.3.10　证明对于绕 x 轴旋转 α 而得到的旋转曲面, 有(a)$k_\mu=h'/c$ (b)$k_\pi=-1/ch'$ 且(c)$K=-1/c^2$.

注意伪球面的高斯曲率为常数, 但相对于球面的正常数曲率伪球面的曲率为负值. 对 $c=1$, 我们得到的曲面每点的高斯曲率都为-1. 以后我们还会遇到许多这种几何上很自然的曲面.

练习 3.3.11　解下述可分离变量的微分方程:

$$h'=-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}.$$

可以用两种方法得到(1)$u=\ln\left|\frac{\sqrt{1-h^2}}{h}+\frac{1}{h}\right|-\sqrt{1-h^2}$; (2)$h(u)=\operatorname{sech}w$, $u=w-\tanh w$. 对

于(1)，翻转图形，绕 z 轴旋转曳物线，则($c=1$)伪球面位于半径为 1 的圆盘上. 如果改用柱面坐标(r, θ, z)，则 u 变成 z，h 变成 r. 由上述代换，我们得到

$$z=-\sqrt{1-r^2}-\ln(r)+\ln(1+\sqrt{1-r^2}).$$

当然，可用 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 导出矩形坐标. 利用这一公式，再用 Maple 画出伪球面图. 对于(2)，可得伪球面的坐标补片为

$$\mathbf{x}(w,v)=(w-\tanh w,\operatorname{sech} w\cos v,\operatorname{sech} w\sin v).$$

同样用 Maple 作图. 比较两个图形. 提示：对第一个用 $h=\cos w$ 的三角代换. 对第二个用双 131~132
曲三角代换.

伪球面实际上由常曲率和一定的初始条件决定. 假设旋转曲面 M 有常高斯曲率 $K=-1$，其参数方程为 $\mathbf{x}(u,v)=(g(u),h(u)\cos v,h(u)\sin v)$，其中 $g'(u)^2+h'(u)^2=1$(即曲线为单位速度). 则如我们所见，高斯曲率可化简为 $K=-h''/h$，所以由常曲率 $K=-1$ 得到一个线性微分方程：

$$h''=h.$$

解这个微分方程很简单. 得

$$h(u)=Ae^u+Be^{-u}.$$

然后将 $h(u)$ 代入单位速度关系式 $g'(u)^2+h'(u)^2=1$ 求解 $g(u)$，得

$$g(u)=\pm\int_{u_0}^{u}\sqrt{1-(Ae^t-Be^{-t})^2}\,dt.$$

选定 A 和 B 即可得到高斯曲率 $K=-1$ 的曲面，如图 3-6 所示.

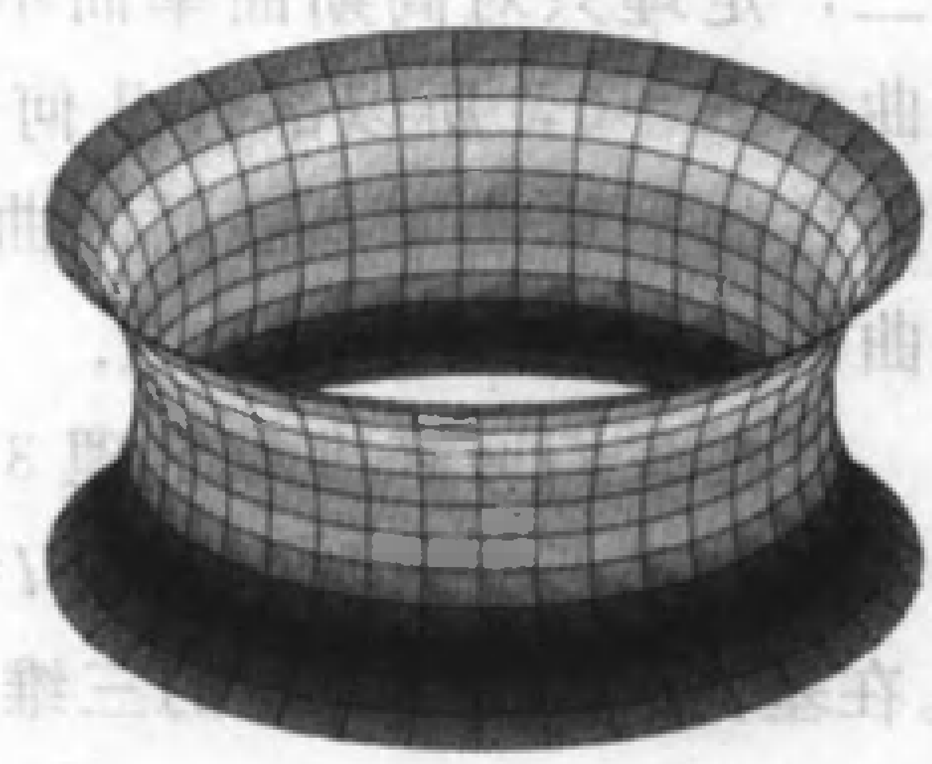


图 3-6　负常曲率的旋转曲面

练习 3.3.12　设 $A=1$，$B=0$. 证明这个高斯曲率 $K=-1$ 的曲面是 $c=1$ 的伪球面. 提示：设 $e^t=\operatorname{sech} w$.

练习 3.3.13　运用相同的方法研究高斯曲率 $K=+1$ 的情形. 如何选取 A 和 B 才能得到一个单位球面？见 3.8 节和练习 3.7.8.

3.4 高斯曲率公式

迄今为止，高斯曲率已经告诉了我们许多有关曲面的几何信息，但我们计算 K 时要用到单位法向量 U，在保证基本几何性质不变的时候，$\mathbb{R}^3$ 中曲面的 K 可能发生变化. 这意味着可能高 133
斯曲率并非曲面的几何不变量. 下面我们将给出一个 K 不依赖于 U 的公式，并证明 K 由 E，F 和 G——称之为曲面的度量决定. 实际上，虽然还有更一般的公式(见下面的练习 3.4.7)，但我们只考虑 $F=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=0$ 这一情形. 也就是 u，v-参数曲线总是相交为直角. 可以证明

定理 3.4.1　高斯曲率仅依赖它的度量 E，F 和 G. 当 $F=0$ 时，高斯曲率公式为

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right).\qquad(*)$$

这里的记号如下：

$$E_v = \frac{\partial}{\partial v}E = \frac{\partial}{\partial v}(x_u \cdot x_u) \quad 和 \quad G_u = \frac{\partial}{\partial u}G = \frac{\partial}{\partial u}(x_v \cdot x_v).$$

当然为证明该定理，我们只要将通常的公式 $K=\frac{ln-m^2}{EG-F^2}$ 化简为上式即可．注意，定理中的公式不依赖于具体的坐标补片，而只与系数度量 E，G(及隐含的 F)相关．在以后讨论曲面的等距时，再详细地研究．不过若满足这些，直观上说，曲面可以“弯曲”但不能有拉伸，且有相同的高斯曲率．这一现象的典型例子就是直圆柱．如果将圆柱沿其母线剪开，它就可以放在平面上．这意味着，圆柱和平面在局部上有相同的几何性质．这进一步从几何上说明圆柱的高斯曲率为零．这种 K 只与度量相关的性质就是著名的高斯 Egregium 定理(意为“高斯绝好”定理)．

这里我们要指出两点：第一，这一结果并不是说具有相同高斯曲率的曲面就有相同的几何性质．曲面可能有相同的高斯曲率，同时有各自不同的度量决定的基本的不同的几何性质．为明确这一点，我们需要等距的概念．故给出下面练习．

练习 3.4.2 证明下述两个坐标补片，有相同的高斯曲率：

$$x(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v), \quad y(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \ln u).$$

练习 5.5.2 将证明这两个曲面不是等距的．

第二，定理只对高斯曲率而不对平均曲率成立．例如，我们提过的圆柱面和平面，因为都是高
134 斯曲率 $K=0$，所以部分几何性质相同，但它们的平均曲率相差很大．平面的平均曲率是零，而圆柱的平均曲率是底面圆曲率的一半．因此，平均曲率不是曲面本身真正的不变量，它依赖于曲面存在于 $\mathbb{R}^3$ 中的方式．

现在我们回来推导定理 3.4.1 中的公式，计算过程相当冗长乏味．因此我们仅仅找出向量在特定的基下的系数．因为 $l=x_{uu}\cdot U$，$m=x_{uv}\cdot U$ 且 $n=x_{vv}\cdot U$，我们需要找出 x_{uu}，x_{uv} 和 x_{vv} 在基为 $\{x_u, x_v, U\}$ 的三维空间中的表达式，令

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \Gamma^u_{uu}x_u + \Gamma^v_{uu}x_v + lU \qquad (因为\ x_{uu}\cdot U = l\ 等等) \\ x_{uv} &= \Gamma^u_{uv}x_u + \Gamma^v_{uv}x_v + mU \\ x_{vv} &= \Gamma^u_{vv}x_u + \Gamma^v_{vv}x_v + nU. \end{aligned} \tag{**}$$

我们的工作就是求出 Γ 的值——相对于这组基的系数，也就是著名的克利斯朵夫符号(Christoffel symbol)．下面利用点积的运算确定 Γ.

$$\begin{aligned} x_{uu}\cdot x_u &= \Gamma^u_{uu}x_u\cdot x_u + 0 + 0 \\ &= \Gamma^u_{uu}E, \qquad 由\ E\ 的定义 \end{aligned}$$

计算出 $x_{uu}\cdot x_u$ 即可知 Γ^u_{uu}．这只需利用乘积法则.

$$E = x_u\cdot x_u, \quad 因此\ E_u = x_{uu}\cdot x_u + x_u\cdot x_{uu} = 2x_{uu}\cdot x_u.$$

于是

$$x_{uu}\cdot x_u = \frac{E_u}{2} \quad 和 \quad \Gamma^u_{uu} = \frac{E_u}{2E}.$$

由 $x_u\cdot x_v=0$，对 u 取偏导，得

$$0 = x_{uv}\cdot x_v + x_u\cdot x_{uv} \quad 或 \quad x_{uu}\cdot x_v = -x_u\cdot x_{uv}.$$

由 $E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u$，对 v 取偏导，得 $E_v=2\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_{uv}$，$E_v/2=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_{uv}=-\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{x}_v$. 而且，

$$\Gamma_{uu}^{v}=(\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{x}_v)/G=-E_v/2G \quad 和 \quad \Gamma_{uv}^{u}=\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{x}_u/E=E_v/2E.$$

由 $G=\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v$，故 $G_u/2=\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{x}_v$，又因 $0=\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_u$，有

$$-\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_{uv}=\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{x}_u.$$

因此

$$\Gamma_{uv}^{v}=\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{x}_v/G=G_u/2G \quad 和 \quad \Gamma_{vv}^{u}=\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{x}_u/E=-G_u/2E.$$

最后，$\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v=G$，故 $\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{x}_v=G_v/2$，$\Gamma_{vv}^{v}=\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{x}_v/G=G_v/2G$. 这样我们就完成了证明，并且有如下公式. 135

公式 3.4.3（基本加速度公式）

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{uu}&=\frac{E_u}{2E}\boldsymbol{x}_u-\frac{E_v}{2G}\boldsymbol{x}_v+lU\\
\boldsymbol{x}_{uv}&=\frac{E_v}{2E}\boldsymbol{x}_u+\frac{G_u}{2G}\boldsymbol{x}_v+mU\\
\boldsymbol{x}_{vv}&=-\frac{G_u}{2E}\boldsymbol{x}_u+\frac{G_v}{2G}\boldsymbol{x}_v+nU\\
U_u&=-\frac{l}{E}\boldsymbol{x}_u-\frac{m}{G}\boldsymbol{x}_v\\
U_v&=-\frac{m}{E}\boldsymbol{x}_u-\frac{n}{G}\boldsymbol{x}_v.
\end{aligned}$$

练习 3.4.4　如上计算 U_u 和 U_v. 提示：$U_u\overset{\text{def}}{=}\nabla_{\boldsymbol{x}_u}U=A\boldsymbol{x}_u+B\boldsymbol{x}_v$. 利用$\nabla_{\boldsymbol{x}_u}U\cdot\boldsymbol{x}_u=A\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u=AE$ 及 $0=\boldsymbol{x}_u(U\cdot\boldsymbol{x}_u)=\nabla_{\boldsymbol{x}_u}U\cdot\boldsymbol{x}_u+U\cdot\boldsymbol{x}_{uu}$ 计算 A.

我们知道混合偏导数与微分顺序无关且相等，故 $\boldsymbol{x}_{uuv}=\boldsymbol{x}_{uvu}$，或 $\boldsymbol{x}_{uuv}-\boldsymbol{x}_{uvu}=0$. 这意味着把 $\boldsymbol{x}_{uuv}-\boldsymbol{x}_{uvu}$ 用这组基表出时，$\boldsymbol{x}_u$，$\boldsymbol{x}_v$ 和 U 的系数都为零. 我们集中考虑 $\boldsymbol{x}_v$ 项.（对它们再次重复使用乘积法则.）

$$\boldsymbol{x}_{uuv}=\left(\frac{E_u}{2E}\right)_v\boldsymbol{x}_u+\frac{E_u}{2E}\boldsymbol{x}_{uv}-\left(\frac{E_v}{2G}\right)_v\boldsymbol{x}_v-\frac{E_v}{2G}\boldsymbol{x}_{vv}+l_vU+lU_v.$$

用基表示 $\boldsymbol{x}_{uv}$，$\boldsymbol{x}_{vv}$ 和 U_v 得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{uuv}&=[\,]\boldsymbol{x}_u+\left[\frac{E_uG_u}{4EG}-\left(\frac{E_v}{2G}\right)_v-\frac{E_vG_v}{4G^2}-\frac{ln}{G}\right]\boldsymbol{x}_v+[\,]U\\
\boldsymbol{x}_{uvu}&=\left(\frac{E_v}{2E}\right)_u\boldsymbol{x}_u+\frac{E_v}{2E}\boldsymbol{x}_{uu}+\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u\boldsymbol{x}_v+\frac{G_u}{2G}\boldsymbol{x}_{uv}+m_uU+mU_u\\
\boldsymbol{x}_{uvu}&=[\,]\boldsymbol{x}_u+\left[-\frac{E_vE_v}{4EG}+\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u+\frac{G_uG_u}{4G^2}-\frac{m^2}{G}\right]\boldsymbol{x}_v+[\,]U.
\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{x}_{uuv}-\boldsymbol{x}_{uvu}$ 的 $\boldsymbol{x}_v$ 的系数是零，得到

$$0=\frac{E_uG_u}{4EG}-\left(\frac{E_v}{2G}\right)_v-\frac{E_vG_v}{4G^2}+\frac{E_vE_v}{4EG}-\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u-\frac{G_uG_u}{4G^2}-\frac{ln-m^2}{G}.$$

注意，最后一项除以 E 得

$$\frac{ln-m^2}{EG}=\frac{E_uG_u}{4E^2G}-\frac{1}{E}\left(\frac{E_v}{2G}\right)_v-\frac{E_vG_v}{4EG^2}+\frac{E_vE_v}{4E^2G}-\frac{1}{E}\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u-\frac{G_uG_u}{4EG^2}.$$

显然，左边是 K(因为 $F=0$)，右边仅依赖于 E 和 G. 因此，就有 K 的与法向量 U 无关的表
136 达式.

练习 3.4.5 证明上述右边为

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right).$$

练习 3.4.6 利用上述公式计算半径为 R 的球面的曲率. 它和形状算子计算的结果一样么?

练习 3.4.7 用相似的讨论证明，若 $F\neq 0$，则下面公式成立：

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\begin{vmatrix}-\frac{E_{vv}}{2}+F_{uv}-\frac{G_{uu}}{2} & \frac{E_u}{2} & F_u-\frac{E_v}{2}\\ F_v-\frac{G_u}{2} & E & F\\ \frac{G_v}{2} & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2}\\ \frac{E_v}{2} & E & F\\ \frac{G_u}{2} & F & G\end{vmatrix}\right).$$

练习 3.4.8 证明 $x_{uuv}-x_{uvu}=0$ 和 $x_{vvu}-x_{uvv}=0$ 的 U 项为

$$\begin{aligned}l_v-m_u&=m\left(\frac{G_u}{2G}-\frac{E_u}{2E}\right)+E_vH\\&=l\frac{E_v}{2E}+m\left(\frac{G_u}{2G}-\frac{E_u}{2E}\right)+n\frac{E_v}{2G}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}n_u-m_v&=m\left(\frac{E_v}{2E}-\frac{G_v}{2G}\right)+G_uH\\&=l\frac{G_u}{2E}+m\left(\frac{E_v}{2E}-\frac{G_v}{2G}\right)+n\frac{G_u}{2G},\end{aligned}$$

其中 H 为平均曲率(假设 F 为零). 这是 Codazzi-Mainardi 方程. 当参数方程满足 $E=G$，$F=0$ 且曲面是极小曲面(即 $H=0$)时，这些方程又是什么样的?

3.5 曲率的一些结果

本节我们将得到高斯和平均曲率的一些几何上的结论. 当然所有的讨论都将表明，迄今为止所有计算 K 和 H 的研究并不是浪费时间，这些量将如实反映曲面的几何性质. 下一章重点讲平均曲率，考察它与自然界中特定结构的内在关系. 总之我们的目标是利用 K 和 H 表示的线性代数和微积分来反映几何性质.

首先让我们考虑一个完全不切实际的情形. 假设曲面上的任一点都是脐点，这意味着每点
137 的主曲率都相等. 但并不能推断为主曲率在曲面上为常函数. 下面将要证明这一点. 虽然这一假设的直接验证已经超越了问题本身，但后面将看到它是十分有用的. 首先试做以下练习.

练习 3.5.1 假设 $p\in M$ 是脐点(即在 p 点处 $k_1=k_2=k$)，证明在 p 点处

$$k=\frac{l}{E}=\frac{n}{G}.$$

而且，若 $F\neq 0$，则 $k=\frac{m}{F}$. 提示：由定理 2.4.10，因 p 为脐点，记 $S(x_u)=Ax_u+Bx_v=$

kx_u. 在

$$l = S(x_u)\cdot x_u = AE + BF,\quad m = S(x_u)\cdot x_v = AF + BG$$

中利用 $B=0$ 解出 A，同样处理 $S(x_v)$.

定理 3.5.2 *曲面 M 的任意点都是脐点，则此曲面是平面或球面的一部分.*

证明 虽然我们知道对任意 $p\in M$，$k_1=k_2=k$，但在 M 上 k 仍有可能在一点和另一点上取值不同. 根据定理 2.4.10，可得

$$\nabla_{x_u}U = -S(x_u) = -kx_u \quad 和 \quad \nabla_{x_v}U = -S(x_v) = -kx_v.$$

利用练习 2.2.9 关于混合共变微分的计算，得

$$\nabla_{x_v}\nabla_{x_u}U = \sum_k\left\{\sum_i\left[\left(\sum_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v}\right) + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\partial v}\right]\right\}e_k$$
$$= \nabla_{x_u}\nabla_{x_v}U.$$

求 $-kx_u$ 关于 v 的微分，$-kx_v$ 关于 u 的微分，得 $-k_vx_u - kx_{uv} = -k_ux_v - kx_{vu}$，所以 $k_vx_u = k_ux_v$，又 x_u 和 x_v 线性无关，故必有 $k_v=0=k_u$，这意味着 k 是常函数.

情形 1：假设 $k=0$，则形状算子处处为零. 由定理 2.2.17，M 在平面内.

情形 2：假设 $k\neq 0$，观察 $x(u, v)+\frac{1}{k}U$，并计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left[x(u,v)+\frac{1}{k}U\right] &= x_u + \frac{1}{k}U_u\\ &= x_u + \frac{1}{k}[-kx_u] \qquad 由上面结果\\ &= x_u - x_u\\ &= 0.\end{aligned}$$

同理，得 138

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[x(u,v)+\frac{1}{k}U\right] = 0.$$

因此，$x(u, v)+\frac{1}{k}U=p$ 为常值，则 $|x(u, v)-p| = \left|-\frac{1}{k}\right| = \frac{1}{|k|}$，故 $x(u, v)$ 的点和 p 距离都是 $1/|k|$. 所以 $x(u, v)$ 在半径为 $1/|k|$ 的球面上.

注意证明的结果仅对单个坐标补片成立. 但是因为 M 是连通的，任意坐标补片必和其他坐标补片有重叠的部分. 对与 $x(u, v)$ 重叠的坐标补片，其上的点也和上面一样位于平面或球面上. 因为上述讨论产生了在新坐标补片上的常值 k，它必须跟 $x(u, v)$ 处的 k 相同. 所以，$x(u, v)$ 的几何性质可以推广到重叠坐标补片上. 这样继续下去，就可以覆盖整个曲面，且每个坐标补片都再现了它相邻曲面的几何性质. ■

注意对全由脐点构成的曲面，由练习 3.5.1 得

$$K = \frac{ln-m^2}{EG-F^2} = \frac{\frac{l}{E}\frac{n}{G}(EG) - \frac{m^2}{F^2}F^2}{EG-F^2} = \frac{\frac{l^2}{E^2}(EG-F^2)}{EG-F^2} = \frac{l^2}{E^2} = k^2,$$

所以 $|k| = \sqrt{K}$，且球的半径为 $1/\sqrt{K}$. 下一结果是对$\mathbb{R}^3$ 中的曲面可能取到的高斯曲率进行限

制．回忆$\mathbb{R}^3$中的曲面是紧的，如果它是有界闭的．“有界”意味着曲面可以被一个足够大的球包住；“闭”意味着曲面上任一收敛到$\mathbb{R}^3$的点列，实际都收敛到曲面上某点．在下面结论中，“紧致性”的假设是为了保证该函数有最大最小值．

定理 3.5.3 *每个紧曲面$M\subseteq\mathbb{R}^3$上都存在点p，使得$K(p)>0$.*

证明 设$f: M\to\mathbb{R}$，定义为$f(p)=|p|^2$，这个函数是连续的，(又M是紧的)所以f可以取得最大最小值．令p_0是使得f取最大值的点．$f(p_0)=|p_0|^2$，则p_0是M上离原点最远的点，若$r=|p_0|$，则M就在半径为r的球内，如图 3-7 所示．

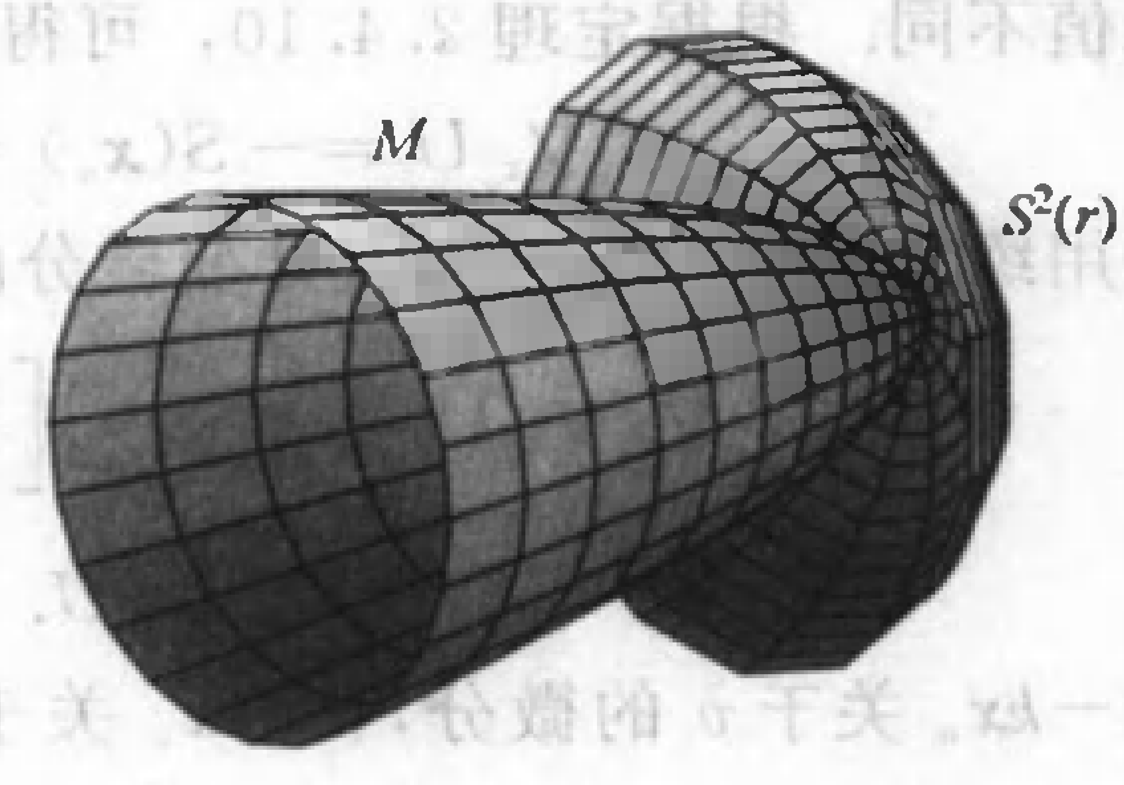


图 3-7 最远点 p_0 处的曲面

因此，有可能$K(p_0)\geqslant\frac{1}{r^2}$，其中$\frac{1}{r^2}$是$r$球$S^2(r)$的曲率．证明了这一点也就证明了定理．考虑单位切向量$u\in T_{p_0}(M)$，并取M上的曲线α满足$\alpha(0)=p_0$，$\alpha'(0)=u$．显然复合函数$f\circ\alpha$仍在p_0处取最大值(因为α在M上)，所以，由通常的微分结论

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\alpha)\bigg|_{t=0}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(f\circ\alpha)\bigg|_{t=0}\leqslant 0.$$

因为$f\circ\alpha(t)=|\alpha(t)|^2=\alpha(t)\cdot\alpha(t)$，所以$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\alpha)=2\alpha\cdot\alpha'$．$t=0$时，有

$$0=2\alpha(0)\cdot\alpha'(0)=2p_0\cdot u.$$

而u是$T_{p_0}M$的任意单位切向量，所以对任意$u\in T_{p_0}M$都有$p_0\cdot u=0$．因此，p_0是M在p_0处的法向量．同样，$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(f\circ\alpha)=2\alpha'\cdot\alpha'+2\alpha\cdot\alpha''$，在$t=0$时，有

$$\begin{aligned}0\geqslant\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(f\circ\alpha)&=2\alpha'(0)\cdot\alpha'(0)+2\alpha(0)\cdot\alpha''(0)\\&=2u\cdot u+2p_0\cdot\alpha''(0)\\&=2+2p_0\cdot\alpha''(0)\\-2&\geqslant 2p_0\cdot\alpha''(0)\\-1&\geqslant p_0\cdot\alpha''(0).\end{aligned}$$

以下计算p_0点的法曲率．因为$p_0/r=p_0/|p_0|$是M在p_0点的单位法向量，由上面的计算得

$$\begin{aligned}k(u)&=S(u)\cdot u\\&=S(\alpha')\cdot\alpha'\\&=U(p_0)\cdot\alpha''\\&=\frac{p_0}{r}\cdot\alpha''\\&\leqslant-\frac{1}{r}.\end{aligned}$$

特别地，k_1，k_2同时小于或等于$-1/r$，所以

$$K(p_0)=k_1(p_0)k_2(p_0)\geqslant\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}=\frac{1}{r^2}>0.$$ ■ 139~140

推论 3.5.4 $\mathbb{R}^3$ 中存在 $K\leqslant 0$ 的非紧曲面，特别地，不存在嵌入到$\mathbb{R}^3$ 的紧的极小曲面.

现在我们来看一个主要的结论，它将展示曲率在几何上的重要作用. 在此之前，我们知道全为脐点的曲面或者是平面($K=0$)或者是球面($K>0$ 且为常值). 这里有一个更强的结论，它只取决于高斯曲率 K，而与它的因子 k_1，k_2 无关. 这个结果是以下定理.

定理 3.5.5(H. Liebmann)　*如果 M 是常高斯曲率 K 的紧曲面，则 M 是半径为 $1/\sqrt{K}$的球面.*

证明　根据定理 3.5.3，存在 $p\in M$ 使 $K(p)>0$，因为 K 是常值，所以在 M 上处处都有 $K>0$. 又因为 K 是常值，且 $K=k_1k_2$. 其中 k_1，k_2 是主曲率，如果 p 是函数 k_1 取最大值的点，则 p 是k_2 取最小值的点. 因为 M 紧且 k_1，k_2 是连续函数，这样的 p 是存在的. 我们考虑两种情形.

情形 1：假设 p 点处 $k_1=k_2$，因为在 p 点处 k_1 最大，k_2 最小，所以 M 的所有法曲率都必在这两个值之间. 因为在 p 点处 $k_1=k_2$，则 M 上点的法曲率 k 就为常值. M 全由脐点构成，且 $K>0$，它是半径为 $1/\sqrt{K}$的球面(这就是我们为什么说定理 3.5.2 的证明很有用). 接下来要证明下面的情形 2 是不可能的，所以该定理只有这一情形.

情形 2：假设 p 点处 $k_1>k_2$，则存在 M 中 p 点的一个小开邻域，仍有 $k_1>k_2$. 如果不存在，可选取关于 p 点的一个递减的开球序列，并且在球中选取点 a_i 满足 $k_1(a_i)=k_2(a_i)$，且 $a_i\to p$. 则由连续性有 $k_1(p)=k_2(p)$，这与假设相矛盾，所以必然存在这样的邻域. 在这一邻域里可以选取两个主方向，它们在每点都互相垂直(证明略去). 由它们确定的坐标补片满足 $x_u\cdot x_u=E$，$x_u\cdot x_v=0$，$x_v\cdot x_v=G$，且又因 x_u，x_v 是主向量，故

$$S(x_u)=k_1x_u,\quad S(x_v)=k_2x_v.$$

(坐标补片 x 的存在性的证明可参考[dC76，p. 185].)注意 $m=S(x_u)\cdot x_v=k_1x_u\cdot x_v=0$. 而且 $l=S(x_u)\cdot x_u=k_1x_u\cdot x_u=k_1E$，所以 $k_1=\frac{l}{E}$，类似地，$k_2=\frac{n}{G}$. 于是，

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right].$$

又由 $x_{uuv}-x_{uvu}=0$ 的 U 项(见练习 3.4.8)，得

$$0=\frac{-nE_v}{2G}+l_v-\frac{E_vl}{2E}$$

$$l_v=\frac{E_v}{2}\left[\frac{l}{E}+\frac{n}{G}\right]$$

$$=\frac{E_v}{2}(k_1+k_2).$$ 141

同样的对 $x_{vvu}-x_{uvv}=0$ 的 U-项，有

$$n_u=\frac{G_u}{2}\left[\frac{l}{E}+\frac{n}{G}\right]=\frac{G_u}{2}(k_1+k_2).$$

重复求公式 $k_1=\frac{l}{E}$，$k_2=\frac{n}{G}$的微分，再利用 l_v，n_u 的表达式，得

$$k_{1v} = \frac{1}{E^2}(El_v - E_v l) = \frac{E_v}{2E}(k_2 - k_1)$$

$$k_{2u} = \frac{1}{G^2}(Gn_u - G_u n) = \frac{G_u}{2G}(k_1 - k_2)$$

$$k_{1vv} = \frac{E_{vv}}{2E}(k_2 - k_1) + E_v(\cdots)$$

$$k_{2uu} = \frac{G_{uu}}{2G}(k_1 - k_2) + G_u(\cdots).$$

而在 p 点 k_1 最大，k_2 最小，所以

$$k_{1v} = 0 \quad k_{1vv} \leqslant 0$$
$$k_{2u} = 0 \quad k_{2uu} \geqslant 0.$$

将这些估计代入上述在 p 点处的方程可得

$$E_v = 0 \quad E_{vv} \geqslant 0$$
$$G_u = 0 \quad G_{uu} \geqslant 0.$$

注意，虽然在 p 点 $E_v=0=G_u$，表达式

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right) \quad 和 \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)$$

在 p 点有可能不为零. 这是因为微分是在 p 点求值前做的. 这些表达式表明，在 p 点，

$$K = -\frac{1}{2EG}(E_{vv} + G_{uu}) \leqslant 0.$$

这与假设 $K>0$ 矛盾. 所以假设 $k_1>k_2$ 不合理，只有情形 1 存在，故 M 是球面. ■

注意在证明过程中，我们看到希尔伯特的一个著名结果(练习 3.5.10 将说明它很有用).

引理 3.5.6(希尔伯特) *如果在 p 点 k_1 取最大，k_2 取最小，且 k_1 严格大于 k_2，则 $K(p)\leqslant 0$.*

迄今为止我们的精力集中于高斯曲率在几何中的作用. 作为平衡，下面了解平均曲率对曲面几何性质的作用. 回忆曲面是极小的，如果曲面的每一点平均曲率都是零. 正如其他几何量一样，我们要对各种熟悉的曲面验证极小的概念. 第 4 章将考虑其他类型的极小曲面，现在我
142 们先看旋转曲面.

定理 3.5.7 *如果旋转曲面 M 是极小的，则 M 是平面或悬链面的一部分.*

证明 考虑 M 的轮廓曲线 $\alpha(u)=(g(u), h(u))$. 如果 $g(u)$ 是常值函数，则 M 为平面. 如果存在一点使得 $g'(u)\neq 0$，那么它在包含这个点的某个开区间都非零. 因此在该区间里 $g(u)$ 有反函数，进而在这个区间可以给出另外的参数方程. 即由新的变量 w 表出 $g(u)$，且轮廓曲线变成 $\alpha(w)=(w, h(w))$. 因为 $\alpha'=h'/g'$，所以必然有一种情形始终成立. 因此主要考虑下面这种情形. 取 M 的坐标补片 $x(u, v)=(u, h(u)\cos v, h(u)\sin v)$，则

$$H = \frac{k_\mu + k_\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-h''}{(1+h'^2)^{3/2}} + \frac{1}{h(1+h'^2)^{1/2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-hh''+1+h'^2}{h(1+h'^2)^{3/2}}\right).$$

曲面 M 是极小的，故 $H=0$，即 $hh''=1+h'^2$. 令 $w=h'$，则

$$h''=w'=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}h}w.$$

这里我们将 w 看作是某区间上 h 的函数，且 $h'(u)\neq 0$. 这样处理是因为在这个区间上 h 存在满足 $u=f(h)$ 的反函数 f. 求微分，并利用链式法则，得

$$1=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}w \quad \text{或者} \quad w=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}}.$$

因为 f 和 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}h$ 是 h 的函数，所以 w 也是 h 的函数. 这样 $hh''=1+h'^2$ 意味着 $hw(\mathrm{d}w/\mathrm{d}h)=1+w^2$ 或

$$\frac{w}{1+w^2}\mathrm{d}w=\frac{1}{h}\mathrm{d}h.$$

积分得

$$\ln(\sqrt{1+w^2})=\ln h+C$$
$$\sqrt{1+w^2}=ch \quad \text{其中 } c=\mathrm{e}^C$$
$$w=\pm\sqrt{c^2h^2-1}.$$

由 $w=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}u}$ 知 $\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{c^2h^2-1}}=\pm\mathrm{d}u$. 两边积分得($ch=\cosh l$，$l\geqslant 0$)

$$\frac{1}{c}l=\pm u+D$$
$$\frac{1}{c}\cosh^{-1}(ch)=\pm u+D$$
$$h=\frac{1}{c}\cosh(cu\pm D).$$

所以 M 是悬链曲面的一部分. ■ 143

练习 3.5.8 上述证明中假设 $h'(u)\neq 0$. 若 $h'(u)=0$ 怎样? 试说明.

练习 3.5.9 证明旋转的平坦的($K=0$)曲面是圆锥或圆柱的一部分. 提示：在上述定理的基础上证明并参看练习 4.9.1.

练习 3.5.10 证明如果 M 是紧的连通的(可定向)曲面，且 $K>0$，H 为常值，则 M 是半径为 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ 的球面. 提示：(1)考虑函数 $H^2-K=(k_1-k_2)^2/4$，且设 $p\in M$ 为此函数的最大值点. (2)如果 $H^2-K(p)=0$，证明 K 为常值且利用 Liebmann 定理(定理 3.5.5). (3)假设 $H^2-K(p)>0$(所以 $k_1(p)>k_2(p)$)，注意 $(k_1-k_2)(p)$ 是最大的. (4)再利用希尔伯特引理(引理 3.5.6).

3.6 德洛奈曲面

如我们所见，有常高斯曲率的旋转曲面由给定初始条件的某个积分决定. 于是我们要问对于常平均曲率是否也有类似结论? 取旋转曲面 M: $\mathbf{x}(u,v)$，其中坐标补片形如 $\mathbf{x}(u,v)=(u, h(u)\cos v, h(u)\sin v)$，平均曲率

$$H=\frac{1}{2}\frac{-hh''+1+h'^2}{h(1+h'^2)^{3/2}}.$$

假设 $H=c/2$ 是定值，就有微分方程

$$1+h'^2-hh''=ch(1+h'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

首先考虑 $c=0$ 的情形. 微分方程可化简为 $1+h'^2-hh''=0$，解此方程得悬链面. 这是显然的，因为 $c=0$ 即是说 M 是平均曲率为零的旋转曲面. 其次假设 $c=\pm1/a(a>0)$. 可得(对 $c=-1/a$)$1+h'^2-hh''=\frac{-1}{a}h(1+h'^2)^{\frac{3}{2}}$ 或

$$\frac{a(1+h'^2)-ahh''}{(1+h'^2)^{\frac{3}{2}}}+h=0$$

$$2h'\left[\frac{a(1+h'^2)-ahh''}{(1+h'^2)^{\frac{3}{2}}}+h\right]=0$$

$$\frac{2ah'(1+h'^2)-2ahh'h''}{(1+h'^2)^{\frac{3}{2}}}+2hh'=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\frac{2ah}{\sqrt{1+h'^2}}+h^2\right]=0$$

144 $$h^2+\frac{2ah}{\sqrt{1+h'^2}}=\pm b^2. \qquad 一个常数$$

注意该情形利用积分因子 h' 得到常数解. 如果忽略这些而考虑其他情况(注意上述步骤也许是可逆的)，我们得到描述有常平均曲率旋转曲面的一般形式的微分方程.

定理 3.6.1 *参数方程为 $x(u,v)=(u,h(u)\cos v,h(u)\sin v)$ 的旋转曲面 M 有常平均曲率当且仅当函数 $h(u)$ 满足*

$$h^2\pm\frac{2ah}{\sqrt{1+h'^2}}=\pm b^2,$$

其中 a，b 为常数.

这个源于几何的微分方程是由德洛奈(Delaunay)发现的，也就是说凡有形如上述微分方程的几何结构都是有常平均曲率的旋转曲面. 我们将详细考虑下面一个例子，并通过定理给出它的几何特征.

例 3.6.2(椭圆的旋轮线) 假设一个椭圆沿 x 轴无滑动地滚动，我们考虑椭圆一个焦点的运动轨迹，则这一轨迹是一条旋轮线——一条曲线在另一条曲线上滚动时这条曲线的一个点形成的. 考察图 3-8 所示的滚动图形，其中 F 和 F' 是椭圆的焦点，K 是与 x 轴的(切)触点. FT 是 F 的轨迹曲线的切线. (注意这里用 T 表示一个点，同时 T

145 还表示单位切线，不要混淆了.)

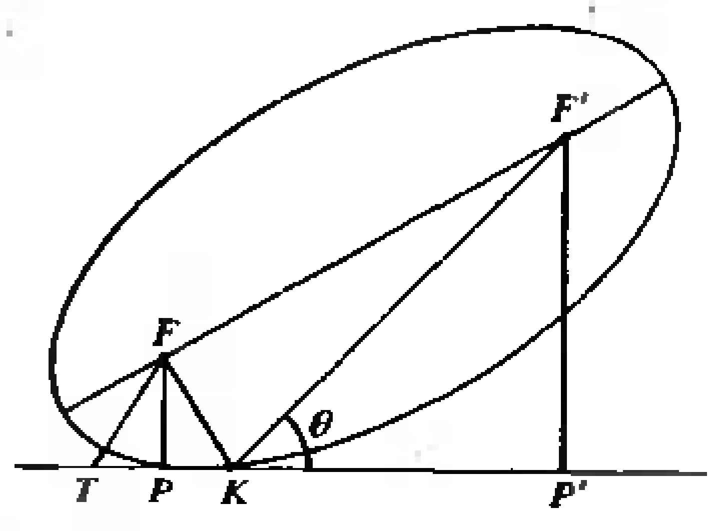


图 3-8 椭圆在 x 轴上的滚线

我们将利用椭圆很多熟知的性质(见[Gra52, Yat74, Zwi63]). 设椭圆长轴长为 a，短轴长为 b，则椭圆上给定的点到两焦点的距离和为定值等于 $2a$. 特别地，$FK+F'K=2a$，而且椭圆有很好的反射性质，即从一个焦点发出的光线经椭圆反射后必经过另一焦点. 因为入射角和反射角相等，所以 $\theta\overset{\text{def}}{=}\angle FKP=\angle F'KP'$. 椭圆另一个

奇妙的性质是它的垂线方程：焦点到任意切线的垂线段的长度的乘积为定值——短轴的平方，即 $FP\cdot F'P'=b^2$. 最后是这种旋轮线的一般性质：F 的轨迹曲线的法向量经过图形与直线的切触点，这里就是 FK 垂直于 FT.

现在用 OP 和 FP 分别表示 F 的 x，y 坐标，则 $y=FK\sin\theta$. 因为 $\angle KFT=\pi/2$，所以 $\angle FTP=\pi/2-\theta$，而且 $\angle FTP$ 是轨迹曲线的切线与 x 轴的夹角，即对于轨迹曲线的单位切向量 $T=\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds}\right)$.

$$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=T\cdot(1,0)=\frac{dx}{ds}.$$

所以 $y=FK\frac{dx}{ds}$，而且因 $\angle FKP=\angle F'KP'$，有 $\bar{y}\overset{\text{def}}{=}F'P'=F'K\frac{dx}{ds}$. 注意，由椭圆的基本性质，得

$$y+\bar{y}=(FK+F'K)\frac{dx}{ds}=2a\frac{dx}{ds}.$$

由垂线方程得

$$y\bar{y}=b^2.$$

从第二个方程中解出 $\bar{y}$ 并代入第一个方程，得

$$y^2-2ay\frac{dx}{ds}+b^2=0.$$

而弧长 $s=\int\sqrt{1+y'^2}\,dx$，所以 $\frac{dx}{ds}=1/\sqrt{1+y'^2}$. 以此替换上面方程中的 $\frac{dx}{ds}$，并注意当 $\angle FTK$ 足够大时它要变号，于是我们得到

$$y^2\pm\frac{2ay}{\sqrt{1+y'^2}}+b^2=0.$$

这正是我们从平均常曲率的假设中得出的方程. 所以椭圆的旋轮线——一条波形线(undulary)正是有常平均曲率的旋转曲面的轮廓线(即子午线)——一个波状体曲面(unduloid)(如图 3-9 所示). 首先注意对于这种情形，要求 $a>b$. 方程 $y^2\pm\frac{2ay}{\sqrt{1+y'^2}}-b^2=0$ 是描述双曲线(焦点)的旋轮线的微分方程.

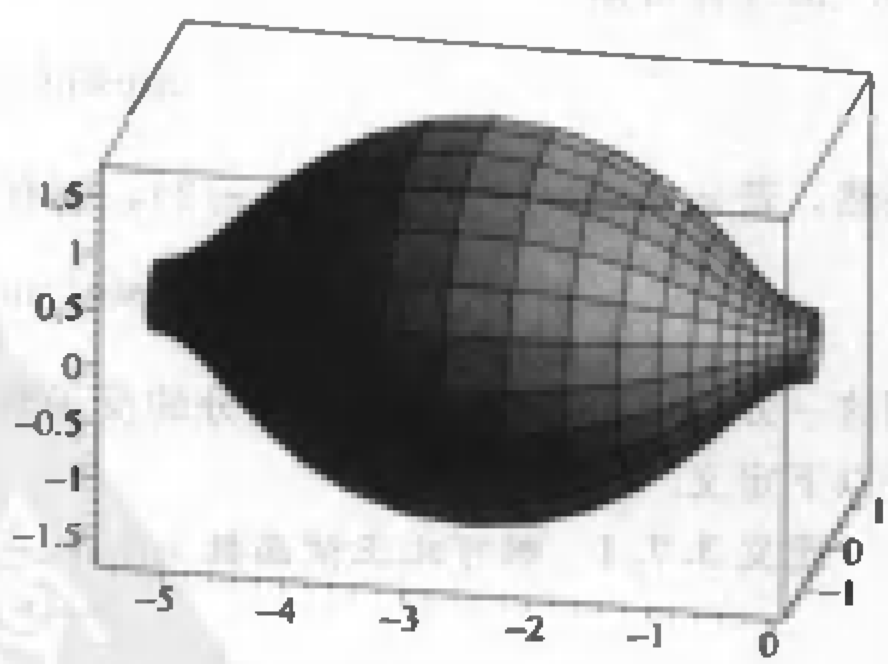


图 3-9 波状体曲面

练习 3.6.3 当 $b=a$ 时得到什么样的旋轮线？提示：从几何上考虑.

练习 3.6.4 当 $b=0$ 时得到什么样的旋轮线？提示：解微分方程，然后作几何解释.

练习 3.6.5 求抛物线的焦点沿 x 轴滚动时的旋轮线.

练习 3.6.6 证明微分方程 $y^2-2ay/\sqrt{1+y'^2}+b^2=0$ 可化为如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{y^2+b^2}{\sqrt{4a^2y^2-(y^2+b^2)^2}}.$$

曲面 M 是$\mathbb{R}^3$ 中浸入的，如果存在映射 f: $M\to\mathbb{R}^3$，使得这个映射可以不是 1-1 的，但在每点必须有 1-1 的微分映射 f_*. 虽然第 5 章将讨论完备性(completeness)的概念，但这里要提到完备曲面的一个性质，即它不是某一个更大的曲面的一部分. 最后回忆"二次曲线"指的是圆、
146~147 直线、抛物线、椭圆及双曲线中的某一个. 我们已经证明二次曲线的旋轮面是有常平均曲率的曲面. 下面我们将陈述更为复杂的德洛奈定理，但不给出证明.

定理 3.6.7(德洛奈) *一个完备的浸入的有常平均曲率的旋转曲面是二次曲线的旋轮面.*

德洛奈关于这一曲面更详细的讨论见[Eel87, Eel78](上面讨论的大部分都节选其中)及[Eel41]. 关于有常平均曲率的曲面，将在第 4 章中作进一步讨论，可以看到它们来源于变分原理(见[Eel87, Eel78]). 即不严格地说，一个有固定体积的曲面，它所取的形状一定是使得面积最小. 这一结果对物理及生物学都有影响. 特别地，一个形成于两个环(含终点)间的肥皂泡的里面存有一定量的空气. 如果这一空气的量是稳定的，则这个气泡是圆柱，某一种德洛奈曲面——圆的旋轮面. 如果空气的量是变化的或环被拉长，则气泡的腰部就会变窄，产生波状体曲面. D'Arcy Wentworth Thompson 在 *On Growth Form*[Tho 92]一书中讨论了这些类型的试验. 在该书的第 5 章，Thompson 描述了曲面的张力与压力如何共同决定各种单细胞生物的形状.

3.7 椭圆函数、Maple 和几何

许多起源于微分几何的积分都不能用基本函数来计算. 不要因为在我们熟悉的基本的微积分中不能得到答案，就认为这些积分超出了我们所知的范围. 在分析这样的积分时，有一个工具——椭圆函数特别有用. 理解椭圆函数的最简单的方法就是将它们作为通常的三角函数考虑. 由计算可知

$$\arcsin(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

显然，若 $x=\sin(t)(-\pi/2\leqslant t\leqslant\pi/2)$，则有

$$t=\arcsin(\sin(t))=\int_0^{\sin(t)}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

用这一方法可以视 $\sin(t)$为该积分的反函数. 现在固定某一 k，$0\leqslant k\leqslant 1$(称为模(modulus))，有以下定义.

定义 3.7.1 *雅可比正弦函数* $\mathrm{sn}(u,k)$*可看作下列积分的反函数：*

148 $$u=\int_0^{\mathrm{sn}(u,k)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}.\tag{3.7.1}$$

更一般地，记

$$F(z,k)=\int_0^z\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},\tag{3.7.2}$$

并称 $F(z,k)$*为第一类椭圆积分*(elliptic integral of the first kind). *第二类椭圆积分*(elliptic

integral of the second kind)的定义是

$$E(z,k)=\int_0^z \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.$$

当 $F(z,\ k)$和 $E(z,\ k)$中 $z=1$ 时，这两个积分分别记为 $K(k)$和 $E(k)$，且分别称为第一类和第二类完备(complete)椭圆积分.

雅可比余弦函数 $\mathrm{cn}(u,\ k)$可以用 $\mathrm{sn}(u,\ k)$定义为

$$\mathrm{sn}^2(u,k)+\mathrm{cn}^2(u,k)=1.$$

第三类雅可比椭圆函数 $\mathrm{dn}(u,\ k)$由下述方程定义为

$$\mathrm{dn}^2(u,k)+k^2\mathrm{sn}^2(u,k)=1.$$

显然由 $\mathrm{sn}(u,\ k)$的积分定义知 $\mathrm{sn}(u,\ 0)=\sin u$. 同样地，$\mathrm{cn}(u,\ 0)=\cos u$.

注记 3.7.2　如果在 $F(z,\ k)$和 $E(z,\ k)$的定义中，作代换 $t=\sin\phi$，就得到下面的椭圆积分的三角形式(trigonometric form)：

$$F(\psi,k)=\int_0^{\psi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)}},\quad E(\psi,k)=\int_0^{\psi}\sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)}\,\mathrm{d}\phi,$$

其中 $\psi=\arcsin z$. 特别地，当 $z=\mathrm{sn}(u,\ k)$时，$\sin\psi=\mathrm{sn}(u,\ k)$，$F(\psi,\ k)=u$.

椭圆函数的导数可由定义得到.（也可见[Mey01]，其中椭圆函数实际上是用它的导数定义的!)例如计算 $\mathrm{sn}(u,\ k)$的导数：假设在(3.7.2)式中 $z=z(u)$，那么

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}.$$

由(3.7.1)式可知，当 $z=\mathrm{sn}(u,\ k)$时，$F(z,\ k)=u$，所以用 $\mathrm{sn}(u,\ k)$替换 z，并利用 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}u=1$，得

$$1=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{sn}(u,k)^2}\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}(u,k)^2}}\frac{\mathrm{dsn}(u,k)}{\mathrm{d}u}$$

$$\frac{\mathrm{dsn}(u,k)}{\mathrm{d}u}=\sqrt{1-\mathrm{sn}(u,k)^2}\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}(u,k)^2}$$

$$\frac{\mathrm{dsn}(u,k)}{\mathrm{d}u}=\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k).$$ 149

同理，得

$$\frac{\mathrm{dcn}(u,k)}{\mathrm{d}u}=-\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k),\quad \frac{\mathrm{ddn}(u,k)}{\mathrm{d}u}=-k^2\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{cn}(u,k).\qquad(3.7.3)$$

Maple 也可建立椭圆函数，因此可以如下所示简单画出它的图像. 具体做法是，取 $k=1/\sqrt{2}$.

```
> with(plots):
```

可以利用 $z=\mathrm{sn}(u,\ k)=1$ 时的完备椭圆函数积分得到我们需要的 $K(1/\sqrt{2})$值.

```
> k1:=1/sqrt(2);
```

$$k1:=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

```
> fsolve(JacobiSN(u,k1)=1,u);
```

1.854074677

也可用 Maple 的"EllipticK"命令得到这一结果. 第一类、第二类和第三类椭圆函数的图像如图 3-10 所示.

```
> plot({JacobiSN(u,k1),JacobiCN(u,k1), JacobiDN(u,k1)},
u=-1.854074677..3*1.854074677);
```

由图 3-10 知 sn(u, k)和 cn(u, k)是周期函数, 周期是多少? 可以由(3.7.1)式

$$u=\int_0^{\mathrm{sn}(u,k)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

和

$$K(k)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

确定这个周期. 由第一个等式可知 sn($K(k)$, k)=1. 显然, 从图上看出 $K(k)$是 sn(u, k)的 1/4 周期. 通过分析可以证明这一点, 而这恰好是要得到的结果. 而且等式 $\mathrm{sn}^2(u,k)+\mathrm{cn}^2(u,k)=1$ 意味着cn(u, k)和 sn(u, k)有相同的周期且 cn($K(k)$, k)=0. 通过计算椭圆余弦函数何时为零, 可以得到完备椭圆积分 $K(k)$的值.

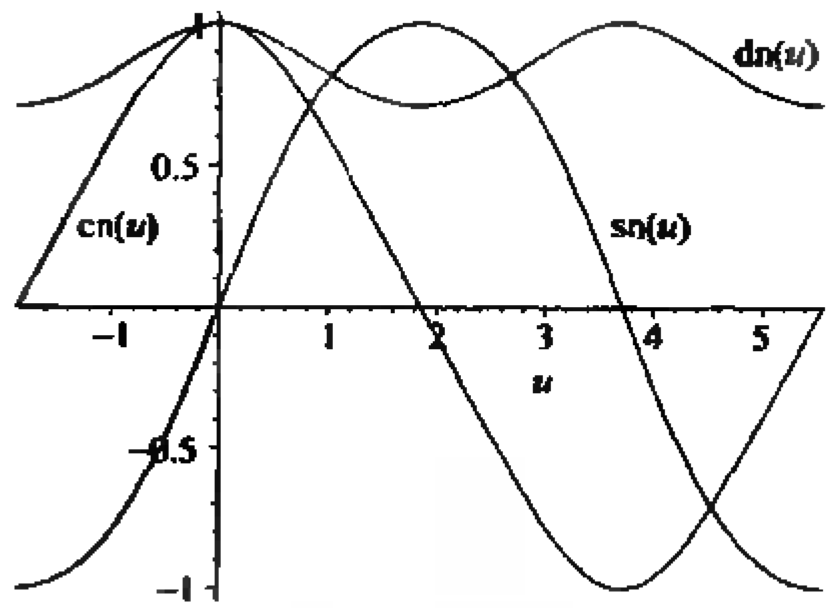


图 3-10 椭圆 sine、cosine 及 dn 函数

例 3.7.3 椭圆的参数方程为 $\alpha(t)=(a\sin t, b\cos t)$, 其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $a\geqslant b$, 弧长积分为

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t\\&=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}\mathrm{d}t\\&=4a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2(t)}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}/a$ 是椭圆的离心率. 令 $u=\sin t$, 则 $\mathrm{d}u/\sqrt{1-u^2}=\mathrm{d}t$, 那么

$$L=4a\int_0^1\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=4aE(\varepsilon).$$

由此可见椭圆积分起源于最简单的几何问题.

练习 3.7.4 双纽线(lemniscate)$r^2=a^2\cos(2\theta)$是椭圆函数的另一个起源. 证明利用参数方程

$$\alpha(t)=(a(\cos t)\sqrt{\cos(2t)},a(\sin t)\sqrt{\cos(2t)})$$

可以得出双纽线的弧长为 $4a(K(1/\sqrt{2})/\sqrt{2})$.

我们需要关于波状体曲面的下述结果(见[MO03a]).

150~151 **命题 3.7.5** 下述等式成立:○

$$\int_0^u\mathrm{cn}^2(\tilde{u},k)\mathrm{d}\tilde{u}=\frac{E(\mathrm{sn}(u,k),k)}{k^2}-\frac{1-k^2}{k^2}F(\mathrm{sn}(u,k),k).\tag{3.7.4}$$

○ 虽然 $F(\mathrm{sn}(u_0,k),k)=u_0$, 但仍记为 $F(\mathrm{sn}(u_0,k),k)$, 因为这一形式在 Maple 的化简过程中更方便一些.

证明　由定义计算

$$\frac{E(\mathrm{sn}(u,k),k)}{k^2}-\frac{1-k^2}{k^2}F(\mathrm{sn}(u,k),k)$$

$$=\int_0^{\mathrm{sn}(u,k)}\left[\frac{1}{k^2}\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{(1-k^2)}{k^2}\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\mathrm{sn}(u,k)}\frac{1-k^2t^2-(1-k^2)}{k^2\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\mathrm{sn}(u,k)}\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-k^2t^2}}\mathrm{d}t.$$

作替换 $t=\mathrm{sn}(\tilde{u},k)$，则 $\mathrm{d}t=\mathrm{cn}(\tilde{u},k)\mathrm{dn}(\tilde{u},k)\mathrm{d}\tilde{u}$，而且注意积分上下限的改变：当 $t=0$ 时，$\mathrm{sn}(\tilde{u},k)=0$，故 $\tilde{u}=0$；当 $t=\mathrm{sn}(u,k)$ 时，$\mathrm{sn}(\tilde{u},k)=\mathrm{sn}(u,k)$，故 $\tilde{u}=u$. 因此，得

$$\frac{E(\mathrm{sn}(u,k),k)}{k^2}-\frac{1-k^2}{k^2}F(\mathrm{sn}(u,k),k)=\int_0^u\frac{\mathrm{cn}(\tilde{u},k)\mathrm{cn}(\tilde{u},k)\mathrm{dn}(\tilde{u},k)\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{dn}(\tilde{u},k)}$$

$$=\int_0^u\mathrm{cn}^2(\tilde{u},k)\mathrm{d}\tilde{u}.$$

■

从练习 3.6.6 中知道德洛奈曲面(或其轮廓曲线)是微分方程

$$\mathrm{d}x=\frac{(y^2+b^2)\mathrm{d}y}{\sqrt{4a^2y^2-(y^2+b^2)^2}}\tag{3.7.5}$$

的解.

前面我们看到德洛奈曲面的轮廓曲线可以看成是二次曲线在一条直线上滚动所得到的曲线，即二次曲线的旋轮线. 上述情形对应于轴为 a 和 $b(a>b)$ 的椭圆的旋轮线. 这类德洛奈曲面称为波状体曲面. 当 y 属于区间 (α,β)，且

$$\alpha=a-\sqrt{a^2-b^2},\quad \beta=a+\sqrt{a^2-b^2}$$

时，(3.7.5)式的根是实的. 引入椭圆离心率 $\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$，区间的端点可以写成 $\alpha=a(1-\varepsilon)$，$\beta=a(1+\varepsilon)$. 那么我们作变量替换

$$y=a\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\sin\phi},\quad \phi\in[-\pi/2,\pi/2].$$

则

$$\mathrm{d}y\to\frac{a\varepsilon\cos\phi\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\sin\phi}},\quad y^2+b^2\to 2a^2(1+\varepsilon\sin\phi),$$ [152]

且

$$\sqrt{4a^2y^2-(y^2+b^2)^2}\to 2\varepsilon a^2\cos\phi.$$

于是我们感兴趣的积分变为

$$x(\phi)=a\int_{-\pi/2}^{\phi}\frac{(1+\varepsilon\sin\tilde{\phi})\mathrm{d}\tilde{\phi}}{\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\sin\tilde{\phi}}}.$$

可以进一步将其分离转化为两个椭圆积分.

引理 3.7.6 对 $k=\sqrt{\dfrac{2q}{p+q}}$，令 $K=K(k)$ 和 $E(k)$ 分别表示第一类和第二类椭圆积分，则

$$\int_{-\pi/2}^{\phi}\frac{\mathrm{d}\,\tilde\phi}{\sqrt{p+q\sin\tilde\phi}}=\frac{-2}{\sqrt{p+q}}(K+F(\mathrm{sn}(u,k),k))$$

$$\int_{-\pi/2}^{\phi}\frac{\sin\tilde\phi\,\mathrm{d}\,\tilde\phi}{\sqrt{p+q\sin\tilde\phi}}=-\frac{2\sqrt{p+q}}{q}(E(k)+E(\mathrm{sn}(u,k),k))$$
$$+\frac{2p}{q\sqrt{p+q}}(K+F(\mathrm{sn}(u,k),k)),$$

其中 u 对应于变换 $\sin\tilde\phi=1-2\mathrm{sn}^2(\tilde u,\ k)$ 中的 ϕ.

证明 令 $\sin\tilde\phi=1-2\mathrm{sn}^2(\tilde u,\ k)$，则 $\mathrm{d}\,\tilde\phi=-2\mathrm{dn}(\tilde u)\mathrm{d}\,\tilde u$（对固定的 k，我们通常简记椭圆函数）. 注意在此变换中 $\tilde\phi=-\pi/2$ 对应于 $-K$.

$$\int_{-\pi/2}^{\phi}\frac{\mathrm{d}\,\tilde\phi}{\sqrt{p+q\sin\tilde\phi}}=\int_{-K}^{u}\frac{-2\mathrm{dn}(\tilde u)\mathrm{d}\,\tilde u}{\sqrt{p+q}\,\mathrm{dn}(\tilde u)}$$
$$=\frac{-2}{\sqrt{p+q}}\int_{-K}^{u}\mathrm{d}\,\tilde u$$

153

$$=\frac{-2}{\sqrt{p+q}}(K+F(\mathrm{sn}(u,k),k)),$$

这里再次用到 $F(\mathrm{sn}(u,\ k),\ k)=u$. 对第二类椭圆积分做相同的代换得到

$$\int_{-\pi/2}^{\phi}\frac{\sin\tilde\phi\,\mathrm{d}\,\tilde\phi}{\sqrt{p+q\sin\tilde\phi}}=\frac{-2}{\sqrt{p+q}}\int_{-K}^{u}\mathrm{d}\,\tilde u+\frac{4}{\sqrt{p+q}}\int_{-K}^{u}\mathrm{sn}^2(\tilde u)\mathrm{d}\,\tilde u$$
$$=\frac{-2}{\sqrt{p+q}}(K+u)+\frac{4}{\sqrt{p+q}}(u+K)-\frac{4}{\sqrt{p+q}}\int_{-K}^{u}\mathrm{cn}^2(\tilde u)\mathrm{d}\,\tilde u$$
$$=\frac{2}{\sqrt{p+q}}(K+u)-\frac{4}{\sqrt{p+q}}\left(\int_{-K}^{0}\mathrm{cn}^2(\tilde u)\mathrm{d}\,\tilde u+\int_{0}^{u}\mathrm{cn}^2(\tilde u)\mathrm{d}\,\tilde u\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{p+q}}(K+u)-\frac{4}{\sqrt{p+q}}\left(\int_{0}^{K}\mathrm{cn}^2(\tilde u)\mathrm{d}\,\tilde u+\int_{0}^{u}\mathrm{cn}^2(\tilde u)\mathrm{d}\,\tilde u\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{p+q}}(K+u)-\frac{4}{\sqrt{p+q}}\left(\frac{p+q}{2q}E(\mathrm{sn}(K))-\frac{p-q}{2q}K\right.$$
$$\left.+\frac{p+q}{2q}E(\mathrm{sn}(u))-\frac{p-q}{2q}u\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{p+q}}(K+u)-\frac{2}{q\sqrt{p+q}}((p+q)E(k)-(p-q)K$$
$$+(p+q)E(\mathrm{sn}(u))-(p-q)u)$$
$$=\frac{2p}{q\sqrt{p+q}}(K+u)-\frac{2\sqrt{p+q}}{q}(E(k)+E(\mathrm{sn}(u),k)).$$

■

在这些情形中，$p=1+\epsilon^2$，$q=2\epsilon$，所以

$$k=\frac{2\sqrt{\epsilon}}{1+\epsilon}.$$

合并上述结果，则

$$x(u)=-a(1-\epsilon)[F(\mathrm{sn}(u,k),k)+K(k)]-a(1+\epsilon)[E(\mathrm{sn}(u,k),k)+E(k)],$$ 154

其中 $K(k)$和 $E(k)$分别为第一类和第二类完备椭圆积分. 再通过变换 $\sin\phi=1-2\mathrm{sn}^2(u)$，将 $y(\phi)$转化为 $y(u)$，得

$$\begin{aligned}y(u)&=a\sqrt{(1+\epsilon)^2-4\epsilon\,\mathrm{sn}^2(u)}\\&=a(1+\epsilon)\sqrt{1-\frac{4\epsilon}{(1+\epsilon)^2}\mathrm{sn}^2(u)}\\&=a(1+\epsilon)\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(u)}\\&=a(1+\epsilon)\mathrm{dn}(u).\end{aligned}$$

绕 x 轴旋转曲线$(x(u),\ y(u))$，得到以下定理.

定理 3.7.7([MO 03b]) *德洛奈曲面(即波状体曲面)S 的参数方程是*

$$\mathbf{x}(u,v)=(x(u),y(u)\cos v,y(u)\sin v),$$

其中

$$x(u)=-a(1-\epsilon)[F(\mathrm{sn}(u,k),k)+K(k)]-a(1+\epsilon)[E(\mathrm{sn}(u,k),k)+E(k)]$$

且

$$y(u)=a(1+\epsilon)\mathrm{dn}(u).$$

在 Maple 中有

```
> delau:=[-a*(1-epsilon)*(EllipticK(kk)+
EllipticF(JacobiSN(u,kk),kk)) - a*(1+epsilon)*
(EllipticE(kk)+EllipticE(JacobiSN(u,kk),kk)),a*(1+epsilon)*
JacobiDN(u,kk)*cos(v),a*(1+epsilon)*JacobiDN(u,kk)*sin(v)];
```

$$\begin{aligned}delau:=[&-a(1-\epsilon)(\mathrm{EllipticK}(kk)+\mathrm{EllipticF}(\mathrm{JacobiSN}(u,kk),kk))\\&-a(1+\epsilon)(\mathrm{EllipticE}(kk)+\mathrm{EllipticE}(\mathrm{JacobiSN}(u,kk),kk)),\\&a(1+\epsilon)\mathrm{JacobiDN}(u,kk)\cos(v),a(1+\epsilon)\mathrm{JacobiDN}(u,kk)\sin(v)]\end{aligned}$$

我们可以写一段 Maple 程序：在上述参数方程中输入既定参数“a”和“ϵ”，从而画出波状体曲面(如图 3-11 及图 3-12 所示). 首先我们需要 Maple 的画图包.

```
> with(plots):
```

```
> plotund:=proc(a,eps,theta,phi)
local kk,uu;
kk:=2*sqrt(eps)/(1+eps);
uu:=fsolve(JacobiSN(u,kk)=1,u);
plot3d(subs({u=u(t),v=v(t)}, [-a*(1-eps)*(EllipticK(kk)+
EllipticF(JacobiSN(u,kk),kk))- a*(1+eps)*(EllipticE(kk)+
EllipticE(JacobiSN(u,kk),kk)),a*(1+eps)*JacobiDN(u,kk)*
cos(v),a*(1+eps)*JacobiDN(u,kk)*sin(v)]),u=-uu..uu,v=0..2*Pi,
scaling=constrained,axes=boxed,orientation=[theta,phi],
```
155

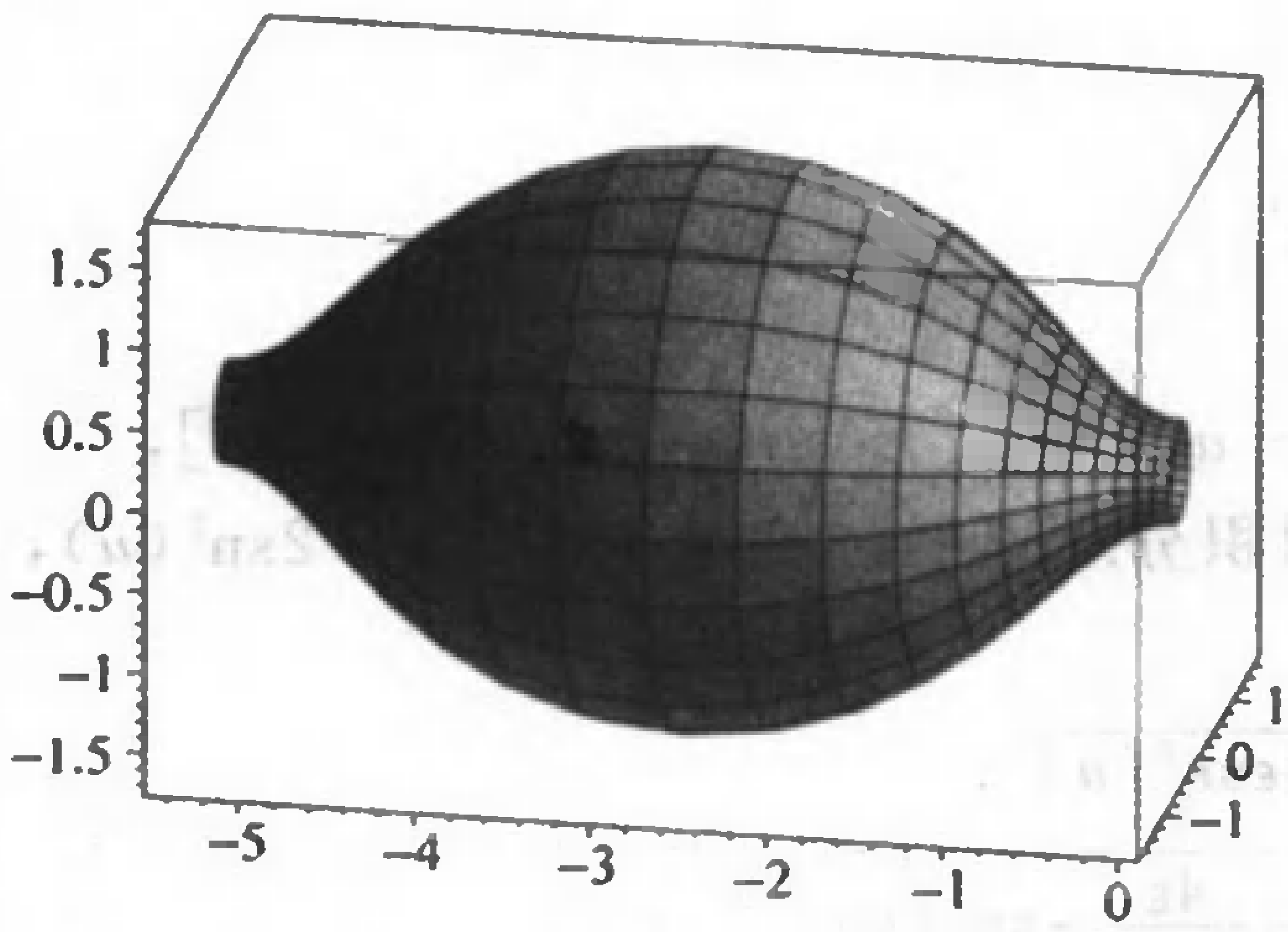


图 3-11 ε=0.7 的波状体曲面

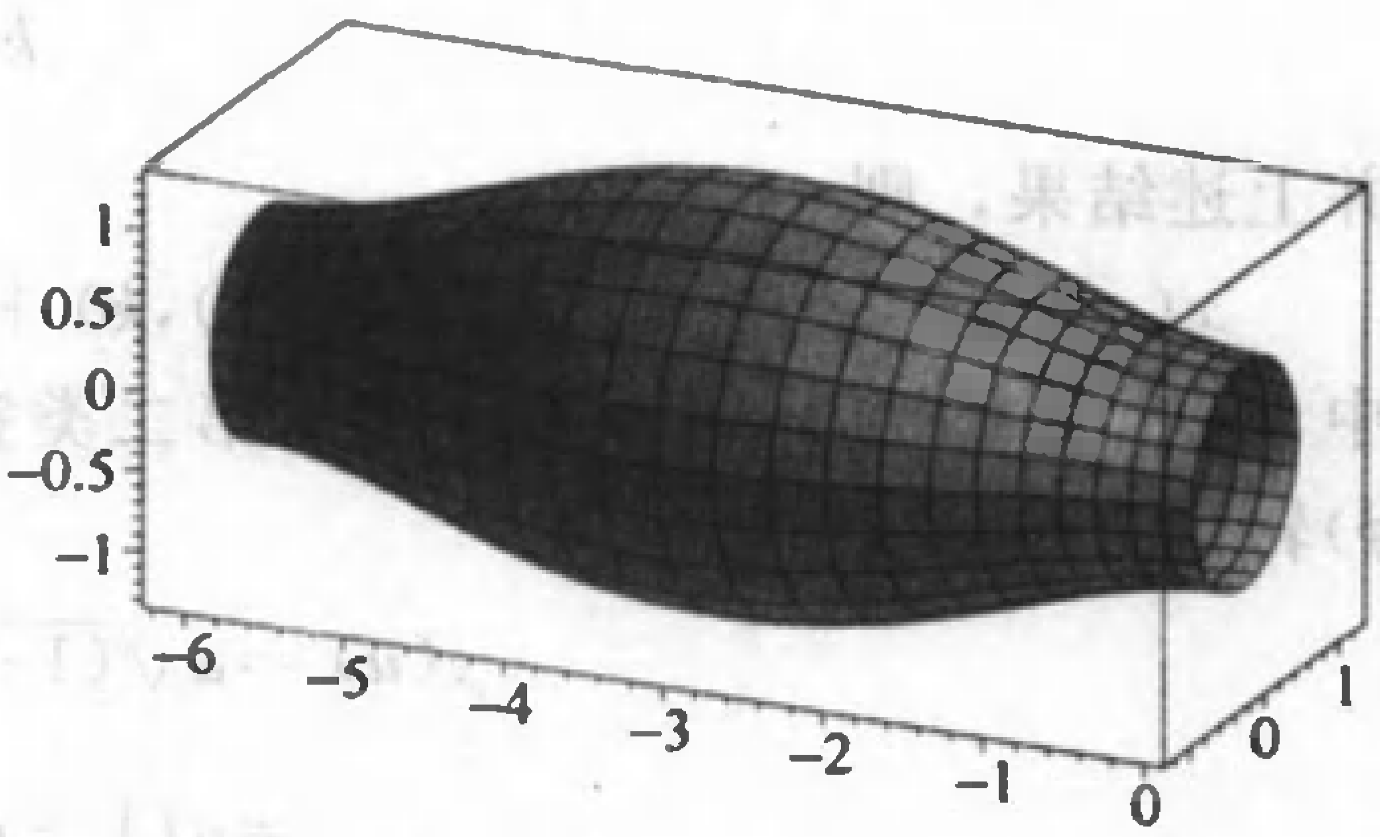


图 3-12 ε=0.3 的波状体曲面

```
shading=XY,lightmodel=light3);
end:
> plotund(1,0.7,-79,70);
> plotund(1,0.3,-65,70);
```

可用 2.5 节的 EFG 程序来计算波状体曲面的度量系数.

```
> EFG(subs(kk=2*sqrt(epsilon)/(1+epsilon), delau));
```

$$\left[-4\,\frac{\left(-\varepsilon^2+4\varepsilon\,\mathrm{JacobiSN}\left(u,2\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right)^2-2\varepsilon-1\right)a^2}{1+2\varepsilon+\varepsilon^2},\right.$$

$$0,$$

156

$$\left.-\left(-\varepsilon^2+4\varepsilon\,\mathrm{JacobiSN}\left(u,2\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right)^2-2\varepsilon-1\right)a^2\right]$$

利用椭圆函数之间的关系，可将结果化简为

$$E=4a^2\mathrm{dn}^2(u),\quad F=0,\quad G=a^2(1+\varepsilon)^2\mathrm{dn}^2(u).$$

用 Maple 可以计算第二类基本量和平均曲率. 因为 Maple 的输出排版困难，所以我们用标准形式写出 2.5 节中“lmn”程序的结果.

```
> lmn(subs(kk=2*sqrt(epsilon)/(1+epsilon), delau));
```

$$\left(4a\,\mathrm{dn}\left(u,2\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right)\mathrm{cn}\left(u,2\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right)\varepsilon\left(2\,\mathrm{sn}\left(u,2\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right)^2-1-\varepsilon\right)\right.$$

$$\left.\sqrt{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-4\varepsilon\,\mathrm{sn}\left(u,2\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right)^2}\right)\Big/$$

$$\left(\left(-1-2\varepsilon-\varepsilon^2+4\varepsilon\,\mathrm{sn}\left(u,2\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right)^2\right)\sqrt{1-\mathrm{sn}\left(u,2\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right)^2}\,(1+\varepsilon)\right)$$

$$0$$

$$\Big(-\operatorname{cn}\Big(u,2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\Big)\operatorname{dn}\Big(u,2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\Big)a\Big(2\varepsilon\operatorname{sn}\Big(u,2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\Big)^2 + 2\varepsilon^2\operatorname{sn}\Big(u,2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\Big)^2-2\varepsilon-\varepsilon^2-1\Big)\Big)\Big/$$
$$\Big(\sqrt{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-4\varepsilon\operatorname{sn}\Big(u,2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\Big)^2}\sqrt{1-\operatorname{sn}\Big(u,2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\Big)^2}\Big)$$

这些公式(其中 $k=2\sqrt{\varepsilon}/(1+\varepsilon)$)可化简为

$$l=\frac{4a\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big(1-\frac{2}{1+\varepsilon}\operatorname{sn}(u)^2\Big),\quad m=0,\quad n=a(1+\varepsilon)\Big(1-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\operatorname{sn}(u)^2\Big).$$

由这些结果可以轻易算出平均曲率 $H=1/(2a)$. 我们可用 Maple 验证这点. 首先写出平均曲率程序(注意需要第 2 章中的 EFG 和 lmn 程序，而在 3.8 节中我们将再次提到这些程序).

```
> MK := proc(X)
local E,F,G,l,m,n,S,T;
S := EFG(X); T := lmn(X);
E := S[1];F := S[2]; G := S[3];
l := T[1]; m := T[2]; n := T[3];
simplify((G*l+E*n-2*F*m)/(2*E*G-2*F^2),sqrt,trig,symbolic);
end:
```

Maple 程序的结果如下：

```
> MK(subs(kk=2*sqrt(epsilon)/(1+epsilon), delau));
```

157

$$\frac{1}{2}\frac{(1+\varepsilon)\operatorname{JacobiCN}\Big(u,2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\Big)\operatorname{JacobiDN}\Big(u,2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\Big)}{\sqrt{1-\operatorname{JacobiSN}\Big(u,2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\Big)^2}\sqrt{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-4\varepsilon\operatorname{JacobiSN}\Big(u,2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\Big)^2}\,a}$$

化简得到 $H=1/(2a)$. 实际上验证了波状体曲面(及所有的德洛奈曲面)有常平均曲率. 在[MO03b]中给出有关波状体曲面的研究.

下面我们考虑作为下述方程解的德洛奈曲面(我们改变了 b^2 的符号). 这些解实际上是 nodoid 曲面(见[For60]).

$$y^2+\frac{2ay}{\sqrt{1+y'^2}}=b^2$$
$$y^2+2ay\cos(\psi)=b^2$$

这里设 $y'=\tan(\psi)$. 令 $b=a\tan(\theta)$(所以 2θ 是 :曲线的渐近线的夹角，而双曲线由在直线上滚动产生 nodoid 曲面). 用二次求根公式解方程 $y^2+2ay\cos(\psi)-a^2\tan^2(\theta)=0$:

$$\begin{aligned}y&=-a\cos(\psi)\pm a\sqrt{\cos^2(\psi)+\tan^2(\theta)}\\&=-a\cos(\psi)\pm a\sec(\theta)\sqrt{\cos^2(\theta)\cos^2(\psi)+\sin^2(\theta)}\\&=-a\cos(\psi)\pm a\sec(\theta)\sqrt{\cos^2(\theta)(1-\sin^2(\psi))+1-\cos^2(\theta)}\end{aligned}$$

$$= -a\cos(\psi) \pm a\sec(\theta)\sqrt{1-\cos^2(\theta)\sin^2(\psi)}$$
$$= -a\cos(\psi) + a\sec(\theta)\sqrt{1-\cos^2(\theta)\sin^2(\psi)}.$$

因此

$$\frac{dy}{d\psi} = a\sin(\psi) + a\sec(\theta)\left(\frac{-\cos^2(\theta)\sin(\psi)\cos(\psi)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)\sin^2(\psi)}}\right).$$

158 而 $dy/dx=\tan(\psi)$，所以

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\psi} &= a\cos(\psi) - a\sec(\theta)\left(\frac{\cos^2(\theta)\cos^2(\psi)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)\sin^2(\psi)}}\right)\\ &= a\cos(\psi) - a\sec(\theta)\left(\frac{\cos^2(\theta)(1-\sin^2(\psi))}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)\sin^2(\psi)}}\right)\\ &= a\cos(\psi) - a\sec(\theta)\left(\frac{\cos^2(\theta)-1+1-\cos^2(\theta)\sin^2(\psi)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)\sin^2(\psi)}}\right)\\ &= a\cos(\psi) - a\sec(\theta)\left(\frac{-\sin^2(\theta)+(1-\cos^2(\theta)\sin^2(\psi))}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)\sin^2(\psi)}}\right)\\ &= a\cos(\psi) - a\sec(\theta)\left(\frac{-\sin^2(\theta)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)\sin^2(\psi)}} + \sqrt{1-\cos^2(\theta)\sin^2(\psi)}\right)\\ &= a\cos(\psi) - \frac{a}{k}\left(\frac{-(1-k^2)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\psi)}} + \sqrt{1-k^2\sin^2(\psi)}\right),\end{aligned}$$

其中 $\cos(\theta)=k$(即椭圆模)．根据注记 3.7.2，如果取从 0 到 ψ(其中 $\psi=\arcsin(\mathrm{sn}(u, k))$)的积分，就得到 u 为参数 x 的表达式，其中 $F(\psi, k)=u$.

$$x(u) = a\,\mathrm{sn}(u,k) + \frac{a}{k}((1-k^2)u - E(u,k)).$$

当然我们也可以得到 y 的椭圆表达式(利用 $k^2\mathrm{sn}(u, k)^2+\mathrm{dn}(u, k)^2=1$)：

$$y(u) = -a\,\mathrm{cn}(u,k) + \frac{a}{k}\mathrm{dn}(u,k).$$

这就是 nodoid 曲面轮廓曲线(即 nodary)的参数方程．绘制德洛奈曲面的 Maple 程序详见 [Opr00].

练习 3.7.8 假设 M： $x(u, v)=(g(u), h(u)\cos(v), h(u)\sin(v))$是高斯曲率 $K=1$ 的旋转曲面.

- 若轮廓曲线$(g(u), h(u), 0)$是单位速度的，证明有微分方程 $h''=-h$(见练习 3.3.8).
- 证明 $h(u)=A\cos(u)+B\sin(u)$.
- 证明

$$g(u) = \int\sqrt{1-(-A\cos(u)+B\sin(u))^2}\,du.$$

- 证明 $g(u)$可写为

159

$$g(u) = \int\sqrt{1-c^2\sin^2(u+\phi)}\,du,$$

其中 $c=\sqrt{A^2+B^2}$，$\tan(\phi)=-A/B$．提升 $g(u)$使得

$$g(u) = \int \sqrt{1 - c^2 \sin^2(u)}\mathrm{d}u.$$

见 3.8 节的“plotposconstcurv”程序.

- 对于 $A=0$，验证 M 的参数方程可以是

$$x(u,v) = (E(u,B), B\sin(u)\cos(v), B\sin(u)\sin(v)),$$

其中 $E(u, B)$ 是模 B 的第二类椭圆积分.

- 令 $B=1/\sqrt{2}$，用下面的 Maple 命令绘制曲面 M，并与下一节数值的 Maple 程序“plotposconstcurv”相比较.

```
> ccposR:=<EllipticE(-u,1/sqrt(2))|
-1/sqrt(2)*sin(u)*cos(v)|-1/sqrt(2)*sin(u)*sin(v)>;
> ccposL:=<EllipticE(u,1/sqrt(2))+ 2*EllipticE(1/sqrt(2))|
1/sqrt(2)*sin(u)*cos(v)|1/sqrt(2)*sin(u)*sin(v)>;
> ccpos1:=plot3d(ccposR,u=-1..0,v=0..2*Pi):
> ccpos2:=plot3d(ccposL,u=-1..0,v=0..2*Pi):
> display({ccpos1,ccpos2},scaling=
constrained,shading=z,lightmodel=light2,orientation=[88,60]);
```

3.8 用 Maple 计算曲率

正如期望的那样，Maple 可以用来计算高斯和平均曲率，也可以计算度量系数 E，F，G 及(有时意指第二类基本形式的系数) l，m，n 和单位法向量. 执行这些计算的程序列举如下. 当然，要绘制曲面图，做向量运算，总是这样开始：

```
> with(plots):with(LinearAlgebra):
```

下面是所有计算高斯和平均曲率的基本程序. 这些程序一般是自己注释的. 输入参数 X 后，Maple 就会运行微积分和线性代数的命令，计算相关的微分几何量.

```
> EFG := proc(X)
local Xu,Xv,E,F,G;
Xu := <diff(X[1],u),diff(X[2],u),diff(X[3],u)>;
Xv := <diff(X[1],v),diff(X[2],v),diff(X[3],v)>;
E := DotProduct(Xu,Xu,conjugate=false);
F := DotProduct(Xu,Xv,conjugate=false);
G := DotProduct(Xv,Xv,conjugate=false);
simplify([E,F,G]);
end:
```

160

```
> UN := proc(X)
local Xu,Xv,Z,s;
Xu := <diff(X[1],u),diff(X[2],u),diff(X[3],u)>;
Xv := <diff(X[1],v),diff(X[2],v),diff(X[3],v)>;
Z := CrossProduct(Xu,Xv);
s:=VectorNorm(Z,Euclidean,conjugate=false);
simplify(<Z[1]/s|Z[2]/s|Z[3]/s>,sqrt,trig,symbolic);
end:
> lmn := proc(X)
local Xu,Xv,Xuu,Xuv,Xvv,U,l,m,n;
```

```
Xu := <diff(X[i],u),diff(X[2],u),diff(X[3],u)>;
Xv := <diff(X[1],v),diff(X[2],v),diff(X[3],v)>;
Xuu := <diff(Xu[1],u),diff(Xu[2],u),diff(Xu[3],u)>;
Xuv := <diff(Xu[1],v),diff(Xu[2],v),diff(Xu[3],v)>;
Xvv := <diff(Xv[i],v),diff(Xv[2],v),diff(Xv[3],v)>;
U := UN(X);
l := DotProduct(U,Xuu,conjugate=false);
m := DotProduct(U,Xuv,conjugate=false);
n := DotProduct(U,Xvv,conjugate=false);
simplify([l,m,n],sqrt,trig,symbolic);
end:
```

最后可以如下计算高斯曲率 K 和平均曲率 H：

```
> GK := proc(X)
local E,F,G,l,m,n,S,T;
S := EFG(X); T := lmn(X);
E := S[i]; F := S[2]; G := S[3];
l := T[1];m := T[2]; n := T[3];
simplify((l*n-m^2)/(E*G-F^2),sqrt,trig,symbolic);
end:
```

```
> MK := proc(X)
local E,F,G,l,m,n,S,T;
S := EFG(X);T := lmn(X);
E := S[1]; F := S[2]; G := S[3];
l := T[1]; m := T[2]; n := T[3];
simplify((G*l+E*n-2*F*m)/(2*E*G-2*F^2),sqrt,trig,symbolic);
end:
```

下面是几个例子，分别考虑球面、环面、悬链曲面及椭圆抛物面.

```
> sph:=<R*cos(u)*cos(v)|R*sin(u)*cos(v) |R*sin(v)>;
```

$$sph := [R\cos(u)\cos(v), R\sin(u)\cos(v), R\sin(v)]$$

```
> EFG(sph);
```

161

$$[R^2\cos^2(v), 0, R^2]$$

```
> lmn(sph);
```

$$[-R\cos^2(v), 0, -R]$$

```
> GK(sph);
```

$$\frac{1}{R^2}$$

```
> MK(sph);
```

$$-\frac{1}{R}$$

```
> tor1:=<(R+r*cos(u))*cos(v)| (R+r*cos(u))*sin(v)|r*sin(u)>;
```

$$tor1 := [(R+r\cos(u))\cos(v), (R+r\cos(u))\sin(v), r\sin(u)]$$

```
> GK(tor1);
```

$$\frac{\cos(u)}{r(R+r\cos(u))}$$

```
> MK(tor1);
```

$$\frac{1}{2}\frac{R+2r\cos(u)}{r(R+r\cos(u))}$$

```
> catenoid:=<cosh(u)*cos(v)|cosh(u)*sin(v)|u>;
```

$$catenoid := [\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), u]$$

```
> GK(catenoid);MK(catenoid);
```

$$-\frac{1}{\cosh^4(u)}$$

$$0$$

注意平均曲率的计算证实了悬链曲面是极小曲面. 再看椭圆抛物面. 用 Maple 计算和练习 3.2.13，需要一些简单的代数操作.

```
> ellpar:=<u|v|u^2/a^2+v^2/b^2>;
```

$$ellpar := \left[u, v, \frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right]$$ 162

```
> GK(ellpar);MK(ellpar);
```

$$\frac{4b^6a^6}{(a^4b^4+4u^2b^4+4v^2a^4)^2}$$

$$\frac{(a^2b^4+4a^2v^2+b^2a^4+4b^2u^2)a^2b^2}{(a^4b^4+4u^2b^4+4v^2a^4)^{(3/2)}}$$

练习 3.8.1　用下面公式写 Maple 程序，计算高斯曲率($F=0$)：

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right).$$

练习 3.8.2　计算螺旋面、Enneper 曲面、双曲面及下述曲面的高斯曲率和平均曲率：

$$x(u,v) = (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), \sin(v)+u).$$

用同一种颜色着色有相似高斯曲率的点，有可能得到曲面高斯曲率的图像. 例如，根据高斯曲率，利用选项"color=GK(helicoid)"对螺旋曲面着色.

```
> helicoid:=<u*cos(v)|u*sin(v)|v>;
> plot3d(helicoid,u=0..1.5,v=0..5*Pi, color=GK(helicoid),
grid=[10,40]);
```

练习 3.8.3　根据高斯曲率对 Enneper 曲面着色. 如果根据平均曲率着色，又会怎样？

练习 3.8.4　定义 pant 对曲面如下：

$$x(u,v)=(u,v,\ln\sqrt{u^4+2u^2v^2-2u^2+v^4+2v^2+1}).$$

运行下列 Maple 命令，分析该曲面的曲率特性.

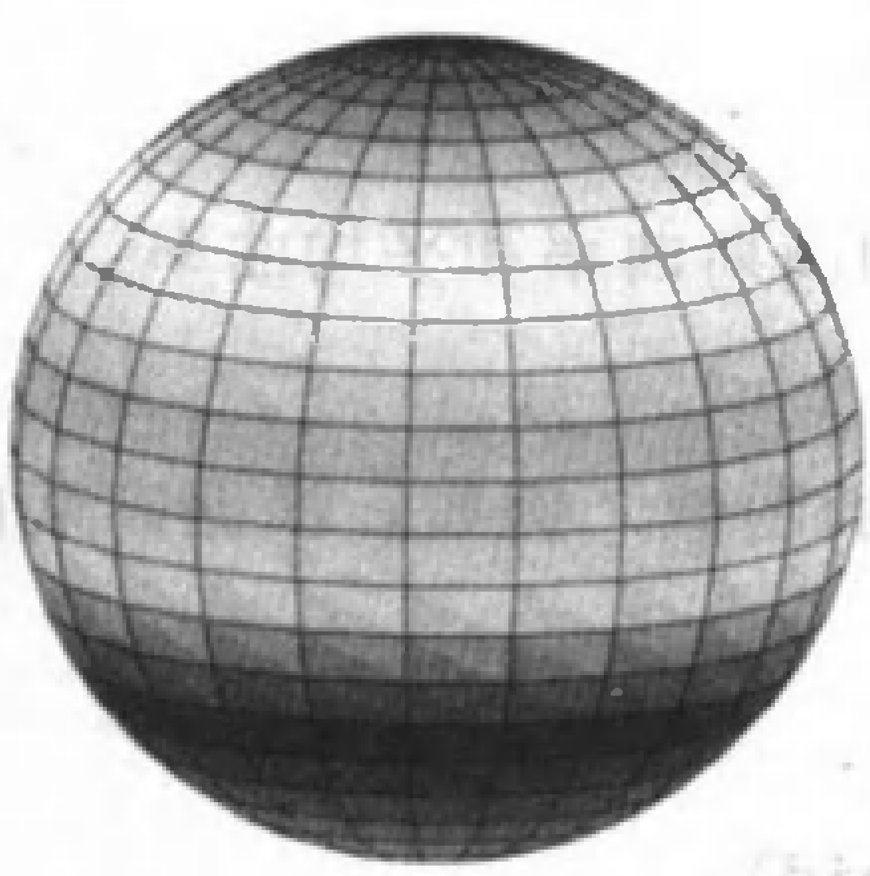
```
> pair:=<u|v|ln((u^4+2*u^2*v^2-2*u^2+v^4+2*v^2+1)^(1/2))>;
> GK(pair);
> MK(pair);
> plot3d(pair,u=-1.5..1.5,v=-1.5..1.5,axes=boxed,shading=xy,
lightmodel=light2,grid=[30,30],orientation=[-33,61]);
> plot3d(GK(pair),u=-1.5..1.5,v=-1.5..1.5,axes=boxed);
> plot3d(MK(pair),u=-1.5..1.5,v=-1.5..1.5,axes=boxed);
> plot3d(pair,u=-1.5..1.5,v=-1.5..1.5,scaling=constrained,
color=GK(pair),orientation=[83,147],grid=[30,30]);
> plot3d(pair,u=-1.5..1.5,v=-1.5..1.5,scaling=constrained,
color=MK(pair),orientation=[83,147],grid=[30,30]);
```

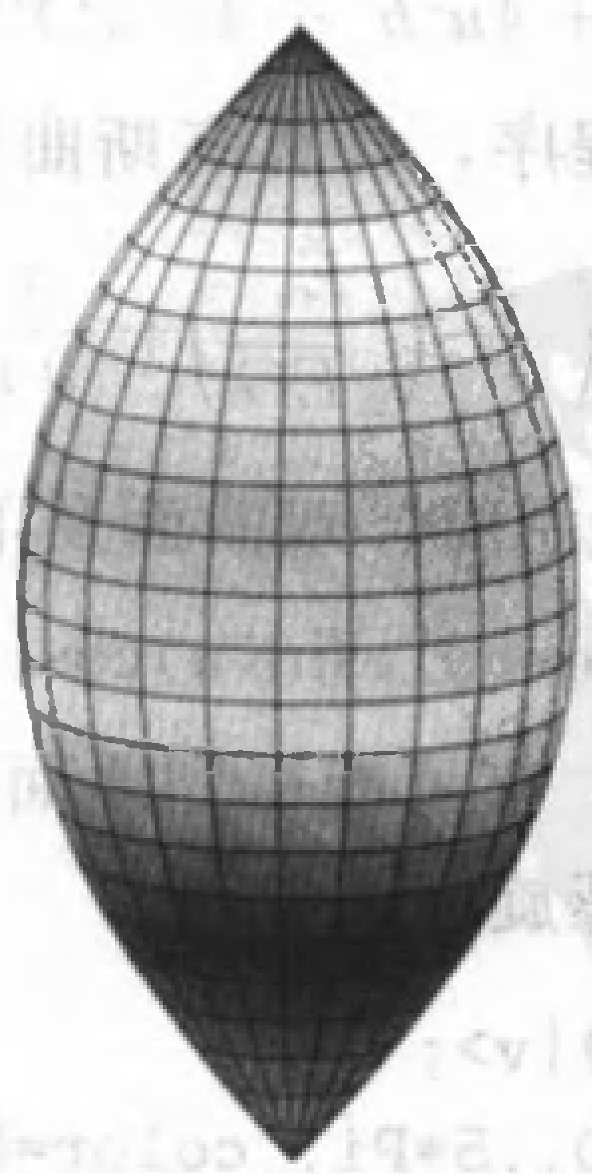
163

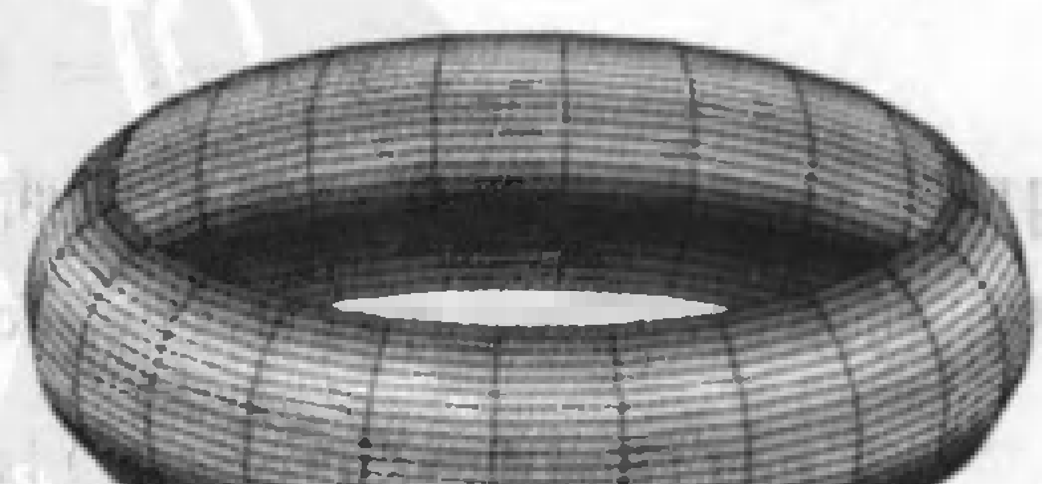
有常高斯曲率的旋转曲面是适合 Maple 做的计算量较少的曲面. 在练习 3.7.8 中，当$h(u)$满足 $h''=-h$ 时，$g(u)$的积分公式是确定的. 显然 $h(u)=A\cos(u)+B\sin(u)$，且

$$g(u)=\int_{u_0}^{u}\sqrt{1-(-A\sin(t)+B\cos(t))^2}\,dt.$$

可取 $g(u)=\int\sqrt{1-c^2\sin^2(u)}\,du$. 注意最后一个表达式只在二次方根有定义时才有意义. 下面 Maple 程序画出了有常的正高斯曲率的图像(如图 3-13、图 3-14 及图 3-15 所示). 程序的关键是利用 Maple 的"dsolve"命令解微分方程，该方程对应于上述 $g(u)$的积分. Maple 用选项"type=numeric"表示解为数值解. 选项"output=listprocedure"允许将数值解的值指定为变量"gu"并将其画出. "plot3d"命令中的单引号'gu'避免了 Maple 专家们称之为数值解"草率估计".


图 3-13 $K=+1$ 的曲面：1


图 3-14 $K=+1$ 的曲面：0.65


图 3-15 $K=+1$ 的曲面：1.7

```
> plotposconstcurv:=proc(c,theta,phi)
local X,desys,gu,s;
if 1/c>i then s:=-Pi/2..Pi/2 else s:=-arcsin(1/c)..
arcsin(i/c) fi;
X:=[c*cos(u)*cos(v),c*cos(u)*sin(v),g];
desys:=dsolve({diff(g(u),u)=sqrt(i-c^2*sin(u)^2),g(0)=0},
g(u),type=numeric,output=listprocedure):
gu:=subs(desys,g(u));
plot3d(subs(g='gu'(u),X),u=s,v=0..2*Pi,scaling=constrained,
style=patch,shading=zhue,orientation=[theta,phi]);
end:
```

```
> plotposconstcurv(1,49,78);
```

```
> plotposconstcurv(0.65,49,78);
```

```
> plotposconstcurv(1.7,49,69);
```

练习 3.8.5　分析下列 Maple 程序，绘制有常的负高斯曲率的旋转曲面(如图 3-16、图 3-17 及图 3-18 所示)，解释每行程序.

```
> plotnegconstcurv:=proc(c,d,theta,phi)
local X,desys,gu,s,h,kk,init;
if d=0 then h:=c*exp(u);
s:=-2.5..ln(1/c);
init:=-1 fi;
if c>0 and d>0 then h:=2*sqrt(c*d)*cosh(u);
s:=arcsinh(-1/(2*sqrt(c*d)))..arcsinh(1/(2*sqrt(c*d)));
init:=0 fi;
if c>=0 and d<0 then h:=2*sqrt(-c*d)*sinh(u);
kk:=c*d;
if kk>=-1/4 then s:=0..arccosh(1/(2*sqrt(-c*d)))fi;
init:=0 fi;
X:=[h*cos(v),h*sin(v),g];                                    164 ≀ 165
desys:=dsolve({diff(g(u),u)=sqrt(i-diff(h,u)^2),g(init)=0},
g(u),type=numeric,output=listprocedure):
gu:=subs(desys,g(u));
plot3d(subs(g='gu'(u),X),u=s,v=0..2*Pi,scaling=constrained,
style=patch,shading=zhue,grid=[15,40],orientation=
[theta,phi]);
end:
```

```
> plotnegconstcurv(1,0,41,64);
```

```
> plotnegconstcurv(0.3,1,47,64);
```

```
> plotnegconstcurv(0.6,0.1,49,69);
```

在这节 Maple 的结尾，利用 Maple 程序找出 $K=-1$ 的旋转曲面. 这将给那些没有相应理解就信任计算机代数体系的人一点警告. 当然需要求高斯曲率“GK”的程序及所有相关程序.

```
> with(plots):with(LinearAlgebra):
```

现在输入函数 h，即是满足参数方程 $x(u,\ v)=(h(u)\cos(v),\ h(u)\sin(v),\ g(u))$ 的旋转曲面的轮廓曲线，并且将它参数化.


图 3-16 $K=-1$ 的曲面：1，0

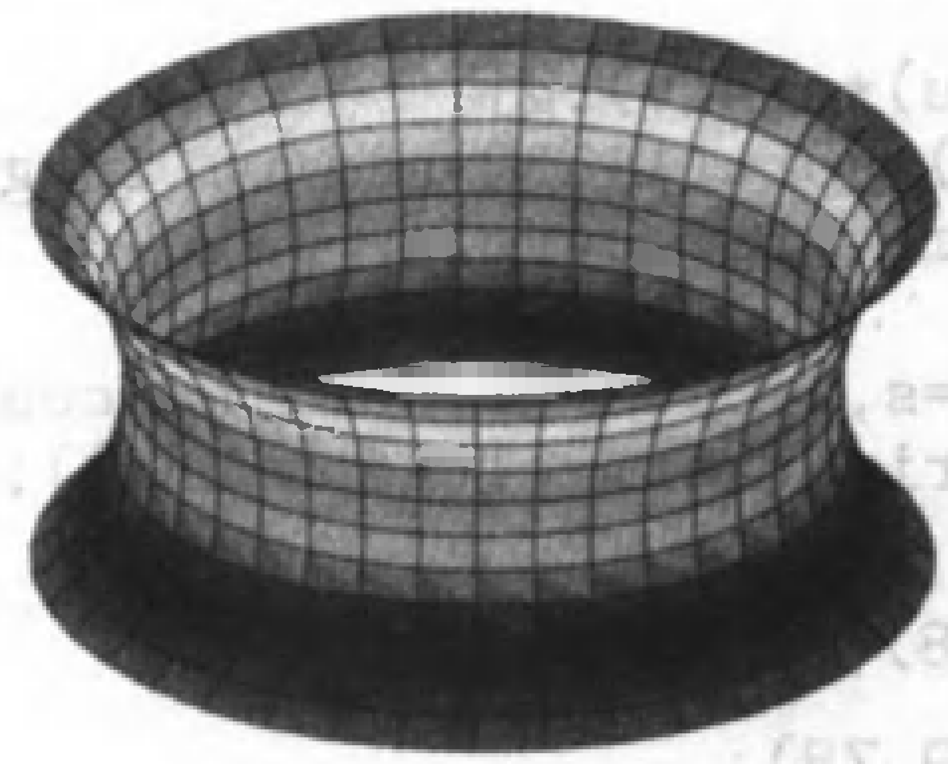

图 3-17 $K=-1$ 的曲面：0.3，1


图 3-18 $K=-1$ 的曲面：0.6，0.1

```
> h:=t->h(t);g:=t->g(t);
```

$$h := h$$
$$g := g$$

```
> surfrev:=[h(u)*cos(v),h(u)*sin(v),g(u)];
```

$$surfrev := [h(u)\cos(v), h(u)\sin(v), g(u)]$$

利用上面 GK 程序，求高斯曲率.

```
> gauss:=simplify(GK(surfrev));
```

$$gauss := \frac{\left(-\left(\frac{d^2h(u)}{du^2}\right)\left(\frac{dg(u)}{du}\right)+\left(\frac{d^2g(u)}{du^2}\right)\left(\frac{dh(u)}{du}\right)\right)\left(\frac{dg(u)}{du}\right)}{\left(\left(\frac{dh(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dg(u)}{du}\right)^2\right)^2 h(u)}$$

假定轮廓曲线 $\alpha=(h(u),\ 0,\ g(u))$ 是单位速度的，这意味着 $\left(\frac{dg(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dh(u)}{du}\right)^2=1$. 如果将这个式子的两端微分，得

166 ~ 167

```
> diff(diff(g(u),u)^2+diff(h(u),u)^2,u) =diff(1,u);
```

$$2\left(\frac{dh(u)}{du}\right)\left(\frac{d^2h(u)}{du^2}\right)+2\left(\frac{dg(u)}{du}\right)\left(\frac{d^2g(u)}{du^2}\right)=0$$

现在我们可以利用刚刚找出的两个关系式化简高斯曲率，即

```
> gaussK:=simplify(gauss, {diff(g(u),u)*diff(diff(g(u),u),u)
= -diff(h(u),u)*diff(diff(h(u),u),u), diff(g(u),u)^2+
diff(h(u),u)^2=1});
```

$$gaussK := -\frac{\frac{d^2h(u)}{du^2}}{h(u)}$$

由此得到高斯曲率的表达式(假设轮廓曲线是单位速度的). 令 $K=-1$，由下列程序解相应的

微分方程即可.

```
> h_ans:=dsolve(gaussK=-1,h(u));
```

$$h_ans := h(u) = C1\mathrm{e}^{u} + C2\mathrm{e}^{(-u)}$$

输入初始条件得到 h _ ans 的精确解.

```
> hh:=rhs(eval(subs({_C1=1,_C2=0},h_ans)));
```

$$hh := \mathrm{e}^{u}$$

现在 $h(u)=e^u$，再用单位速度条件 $\left(\frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}h(u)}{\mathrm{d}u}\right)^2=1$ 解得 $g(u)$.

```
> g_ans:=dsolve(diff(g(u),u)^2+diff(hh,u)^2 =1,g(u))[1];
```

$$g_ans := g(u) = \sqrt{1-(\mathrm{e}^{2u})} - \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^{2u})}}\right) + C1$$

这里出现了 Maple 积分程序存在的一个缺陷. 通过计算等价积分可获得相同答案.

```
> int(sqrt(1-exp(u)^2),u);
```

$$\sqrt{1-(\mathrm{e}^{2u})} - \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^{2u})}}\right)$$

这是错误的. 所以计算机代数体系并不完美! 双曲正切 tanh 的绝对值总是小于 1，而 $\frac{1}{\sqrt{1-e^{2u}}}$ 总是大于 1. 从代数上讲，上述答案没错，但它没有考虑到仅当 $0<1-(e^u)^2$ 时，才能定义二次方根. 旧的 MapleV4(或手工积分!)给出了下述正确答案. 用它作为 g _ ans 并对积分常数取一定值.

```
> (1-exp(2*u))^(1/2)- arctanh((1-exp(2*u))^(1/2));
```
168

$$\sqrt{1-\mathrm{e}^{(2u)}} - \operatorname{arctanh}(\sqrt{1-\mathrm{e}^{(2u)}})$$

```
> g_ans:=(1-exp(2*u))^(1/2)- arctanh((1-exp(2*u))^(1/2))+_C1;
```

$$g_ans := \sqrt{1-\mathrm{e}^{(2u)}} - \operatorname{arctanh}(\sqrt{1-\mathrm{e}^{(2u)}}) + C1$$

```
> gg:=subs(_C1=0,g_ans);
```

$$gg := \sqrt{1-\mathrm{e}^{(2u)}} - \operatorname{arctanh}(\sqrt{1-\mathrm{e}^{(2u)}})$$

现在我们可以把函数代入曲面参数方程画出旋转曲面(如图 3-19 所示).

```
> subs({g(u)=gg,h(u)=hh},surfrev);
```

$$[\mathrm{e}^{u}\cos(v), \mathrm{e}^{u}\sin(v), \sqrt{1-\mathrm{e}^{(2u)}} - \operatorname{arctanh}(\sqrt{1-\mathrm{e}^{(2u)}})]$$

```
> plot3d(subs({g(u)=gg,h(u)=hh },surfrev),u=-2..0,v=0..2*Pi,
scaling=constrained,shading=zhue,lightmodel=light3,
orientation=[36,80]);
```

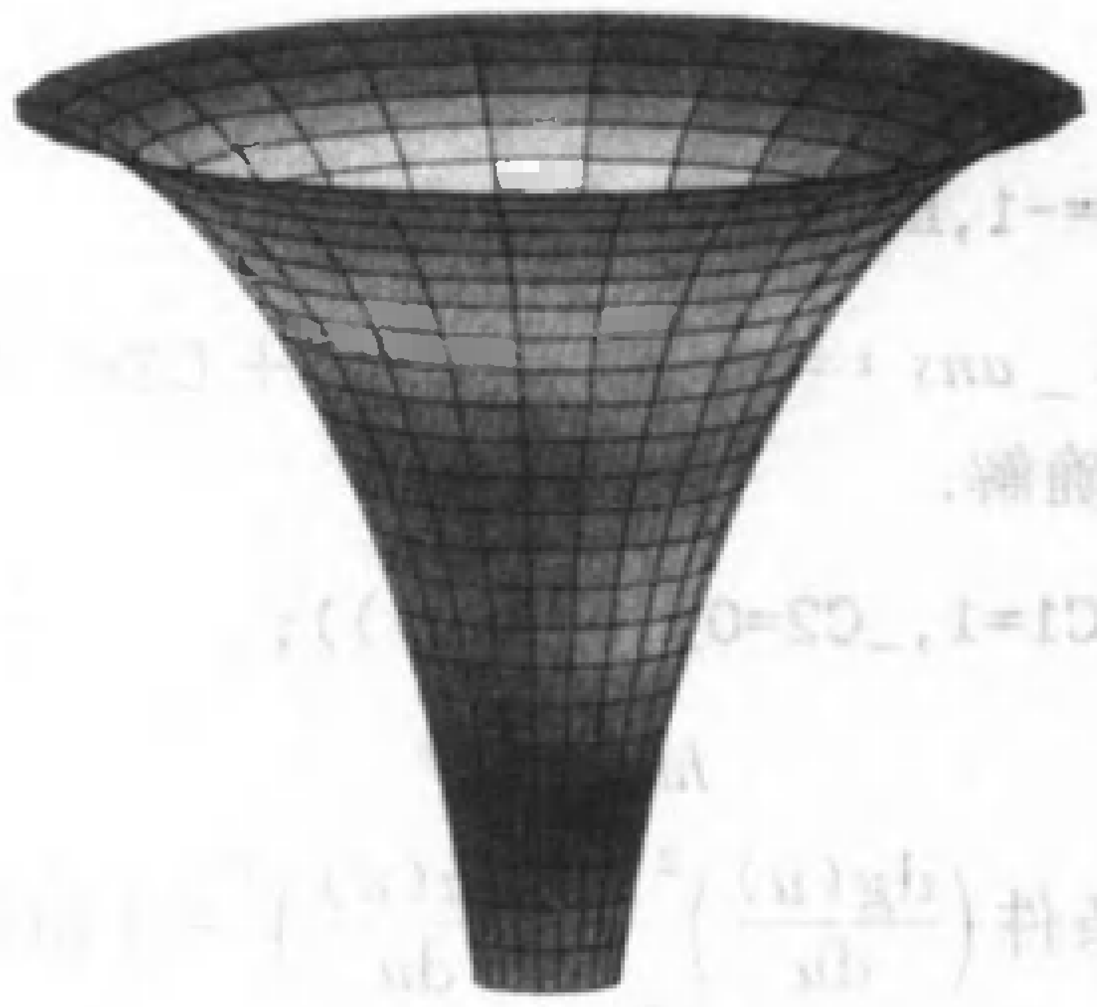


图 3-19 $K=-1$, $h(u)=e^u$ 的旋转曲面

现在改用另一组初始条件.

```
> hh2:=rhs(eval(subs({_C1=1,_C2=1/4}, h_ans)));
```

$$hh2 := e^u + \frac{1}{4}e^{(-u)}$$

169 我们有 $h(u)=e^u+\frac{1}{4e^u}$, 利用单位速度条件 $\left(\frac{dg(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dh(u)}{du}\right)^2=1$ 得到 $g(u)$.

```
> g_ans2:=rhs(dsolve(diff(g(u),u)^2+ diff(hh2,u)^2=1,
g(u))[1]);
```

$$g_ans2 := \int \frac{1}{4}\frac{\sqrt{-(4(e^{2u})+4e^u-1)(4(e^{2u})-4e^u-1)}}{e^u}du + C1$$

```
> gg2:=subs(_C1=0,g_ans2);
```

$$gg2 := \int \frac{1}{4}\frac{\sqrt{-(4(e^{2u})+4e^u-1)(4(e^{2u})-4e^u-1)}}{e^u}du$$

一旦知道 $gg2$ 积分的上下限，将函数代入曲面参数方程就可画出旋转曲面(如图 3-21 所示). 首先检验什么时候平方根取负值(如图 3-20 所示).

```
> evalf(solve(-(4*exp(u)^2+4*exp(u)-1) * (4*exp(u)^2-
4*exp(u)-1)=0));
```

$$0.1882264063, -1.574520768+3.141592654I,$$
$$-1.574520768, 0.1882264063+3.141592654I$$

```
> plot(-(4*exp(u)^2+4*exp(u)-1) * (4*exp(u)^2-4*exp(u)-1),
u=-1.57..0.188) ;
```

这意味着可以用 $gg2$ 定义 $gg3$, 且积分区间是(−1.574520768, 0.1882264063).

```
> gg3:=Int(-1/4*sqrt(-(4*exp(s)^2+ 4*exp(s)-1)*(4*exp(s)^2-
4*exp(s)-1))/exp(s),s=-1.5..u);
```

$$gg3 := \int_{-1.5}^{u} -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{-(4(e^{2s})+4e^s-1)(4(e^{2s})-4e^s-1)}}{e^s}ds$$

```
> plot3d(subs({g(u)=gg3,h(u)=hh2 },surfrev),u=-1.5..0.18,
v=0..2*Pi,style=patch,scaling=constrained, shading=zhue,
lightmodel=light3,orientation=[36,80]);
```

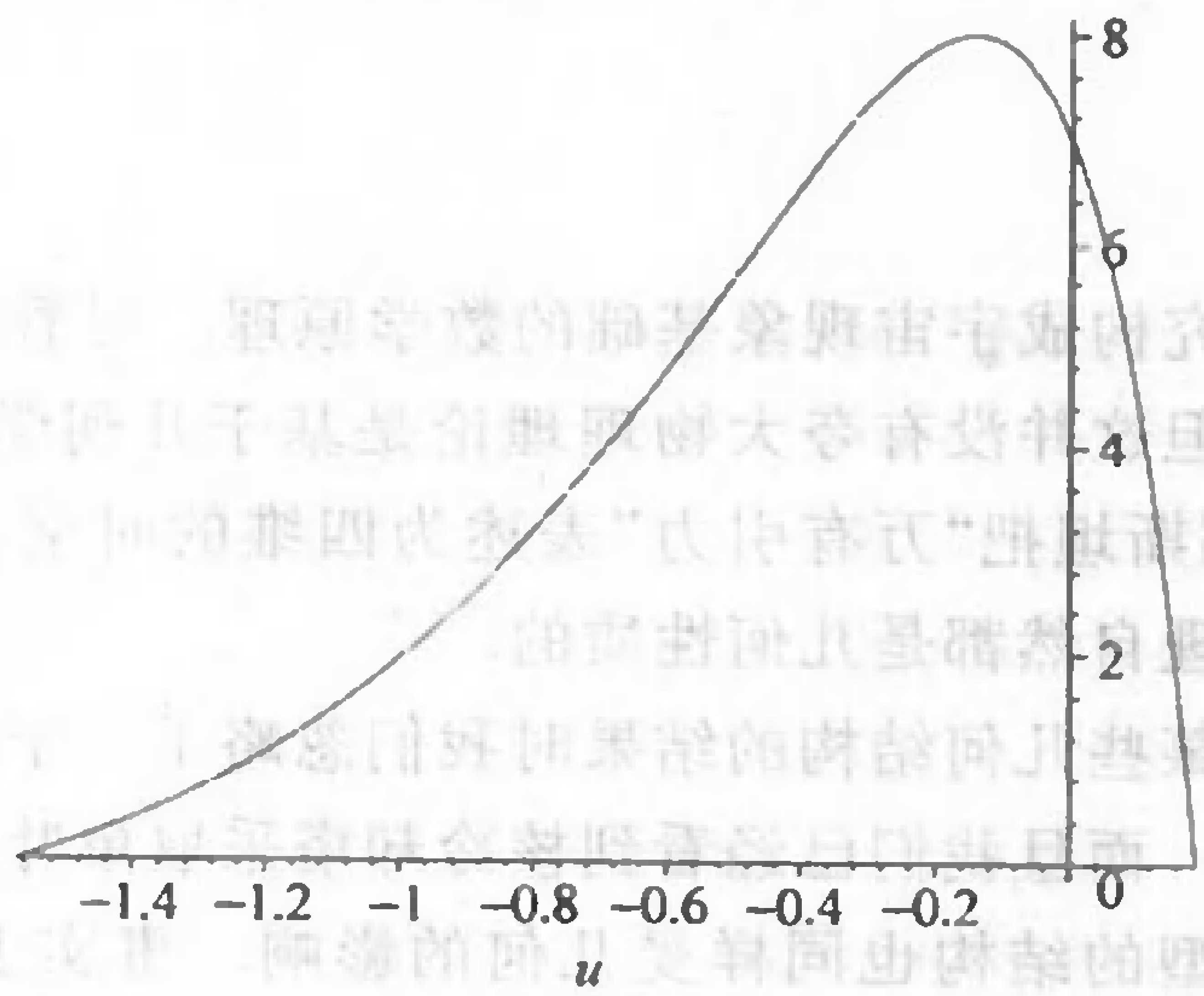


图 3-20　在(−1.574520768, 0.1882264063)平方根有定义

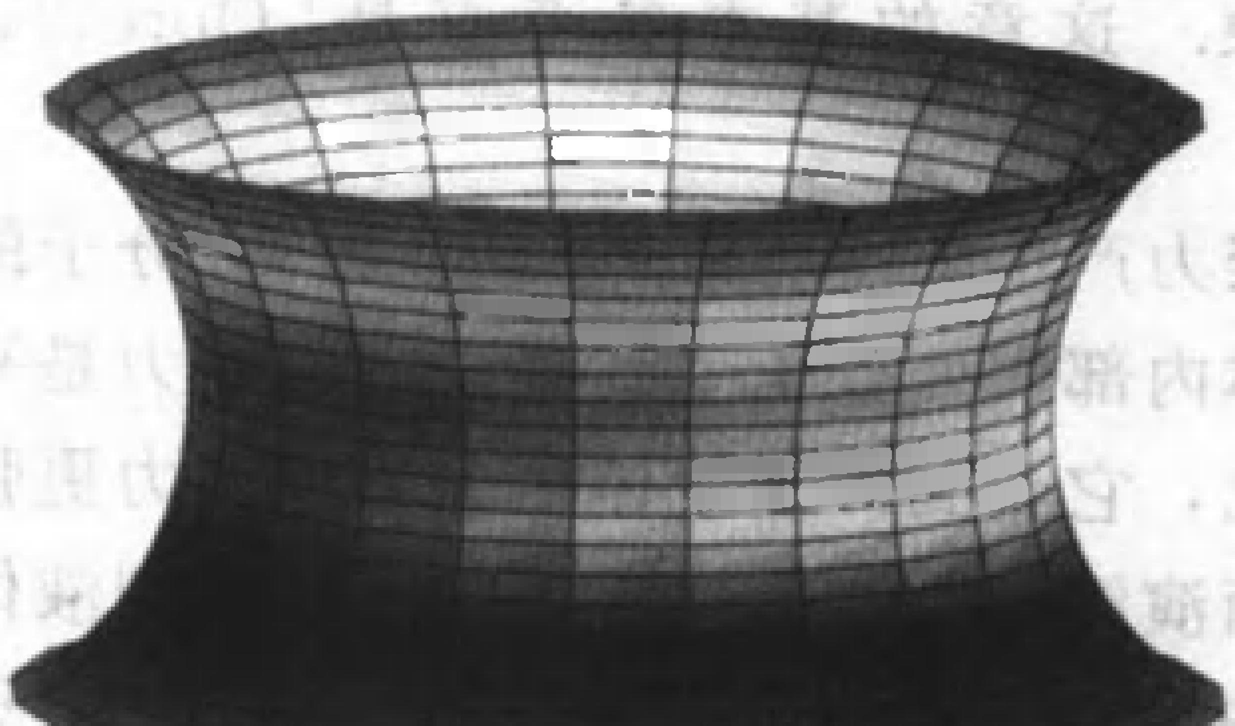


图 3-21　$K=-1$, $h(u)=e^{u}+\frac{1}{4}e^{-u}$的旋转曲面　170~171

第 4 章　常平均曲率的曲面

4.1　引言

大部分科学学都不得不研究构成宇宙现象基础的数学原理．尽管康德似乎夸大这一情形，宣称人类是先天的几何学家，但这并没有夸大物理理论是基于几何学的事实．从牛顿在《自然原理》一书只给出几何论到爱因斯坦把“万有引力”表述为四维的时空几何学，再到当今的大统一场论的发现，宇宙的根本机理自然都是几何性质的．

当然在说到大自然力是某些几何结构的结果时我们忽略了一个事实，那就是我们每天观察到的现象也同样依赖于几何．而且我们已经看到核冷却塔采取单叶双曲面是为了避免不必要的压力．因此无需惊讶其他类型的结构也同样受几何的影响．事实上，Frei Otto 建筑学派在其设计中就广泛采用了极小曲面．

本章我们将简单介绍极小曲面和常平均曲率曲面．这些曲面不仅在数学上是很有意义的，也是科学研究和应用的对象．这章的基本参考书是［Opre00，Oss86，Nit89，DHKW92，FT91］．

表面张力是由液体的凝聚力产生的．将液体看成（极性）分子的集合，每个分子之间存在和其他力相平衡的吸引力，液体内部深处分子受到各个方向的力是平衡的．但液体表面的分子与
173 位于液体内部的少数分子相比，它受到源于液体内部的作用力更强些．所以，这些液体表面的分子就被带入液体和液体表面演绎的“曲率”中．因此我们看到液体形如水滴或气泡是因为表面张力的作用，它好像一层皮肤将液体凝聚在一起．肥皂泡不会破灭，是因为在某些点上表面张力和内部压力抵消了．当然对于肥皂泡的情形，气泡内的大气压力大于外部，最后获得平衡．实际上，这场表面张力与内部压力间的战争是以几何上的斡旋（以曲率的形式）才得以停火．

1800 年左右，Thomas Young（他因实现自然光波的绕射实验而闻名）和拉普拉斯（Pierre Simon Laplace）用下述方法分析了表面张力现象．考虑以下图形．取一个无穷小的坐标补片，通过增加内部压力使其向外膨胀．注意因为它很小，可以假设它的前面和边界曲线分别是半径为 R_1 和 R_2 的圆的一部分．

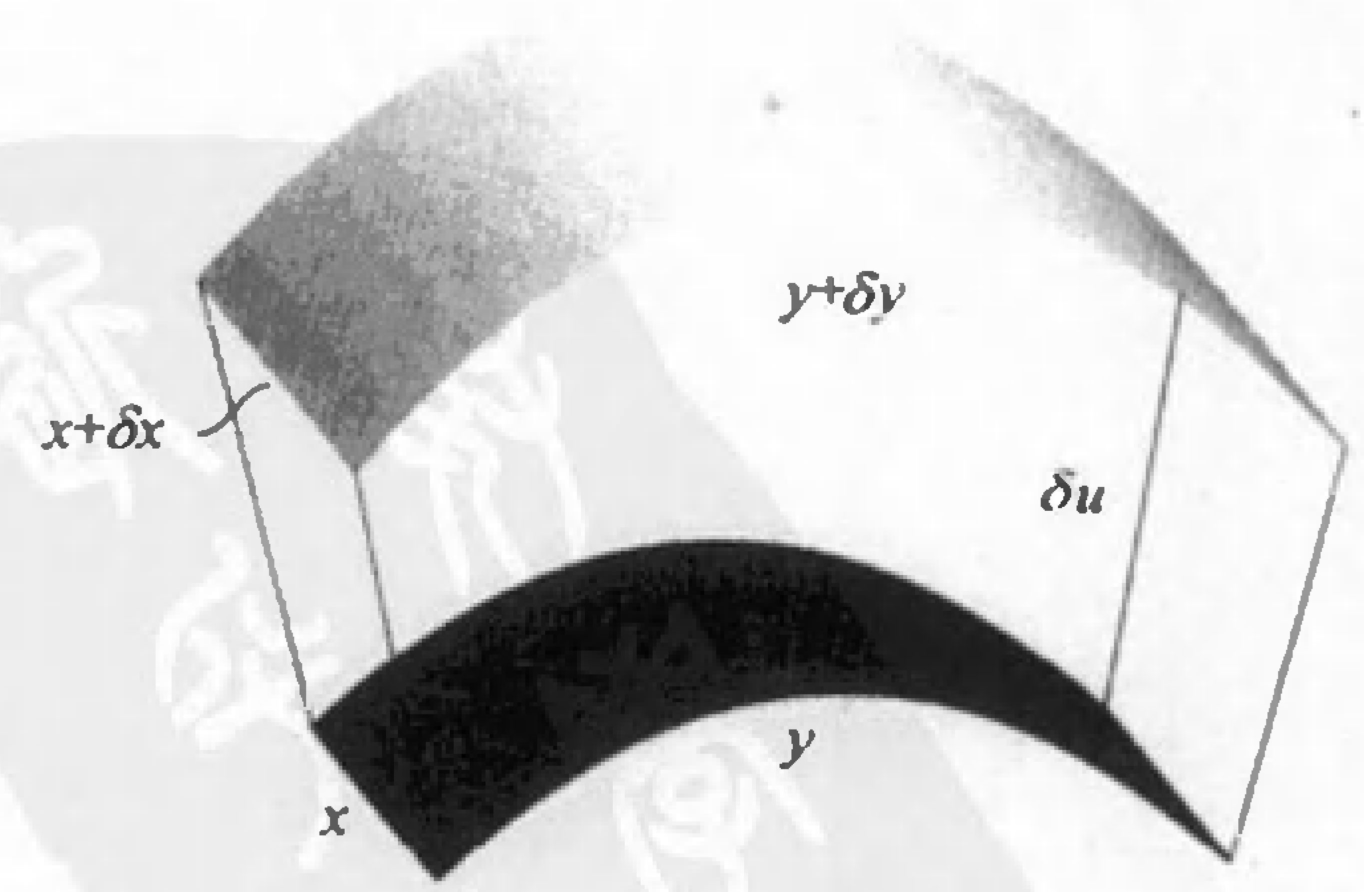


图 4-1　表面所做的功

计算表面膨胀所做的功（用 S 表示）．回忆功等于力×距离，压力是单位面积上的力．如图 4-1 所示，我们得到

$$\begin{aligned} W &= F \cdot D \\ &= p \cdot S \cdot \delta u \\ &= p \cdot xy \cdot \delta u. \end{aligned}$$

但是也可以从另一个途径计算功. 那么肥皂泡怎样做功呢? 做如下试验. 取一个 U 形的金属丝，并在两端系上细绳(松弛地)围成一个环，保持环状将其整个浸入到肥皂水中. 现在移动环，看看发生了什么? 细绳被薄层拉伸到金属丝的顶点. 这意味着泡沫薄层做了功. 而这种 174
限制细绳和泡沫薄层的就是表面张力. 由此可见，总功等于表面张力 T(单位长度所受的力)乘以面积的改变量 ΔS. 显然，由图(经过适当的近似)，得

$$\Delta S = (x+\delta x)(y+\delta y) - xy,$$

x 是半径为 R_1 的圆的一部分，$x+\delta x$ 是半径为 $R_1+\delta u$ 的圆的一部分，且它们有相同的圆心角. 因此有等式

$$\frac{x+\delta x}{R_1+\delta u} = \frac{x}{R_1}.$$

同理

$$x+\delta x = x\left(1+\frac{\delta u}{R_1}\right)$$

$$y+\delta y = y\left(1+\frac{\delta u}{R_2}\right).$$

将它们代入 ΔS，得

$$\begin{aligned}\Delta S &= x\left(1+\frac{\delta u}{R_1}\right)y\left(1+\frac{\delta u}{R_2}\right) - xy \\ &= xy\delta u\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + xy\frac{(\delta u)^2}{R_1R_2}.\end{aligned}$$

如果 δu 很小，可以忽略最后一项. 现在将 ΔS 的表达式代入功的公式 $W=T\Delta S$，且它等于前面计算的功. 最终有

$$pxy\delta u = Txy\delta u\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

$$p = T\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

这就是拉普拉斯-杨方程，它表述了表面张力、曲率及薄层内压力之间的基本关系. 这一等式有着重要的应用，甚至在医学领域中. 例如肺中的肺泡就服从拉普拉斯-杨方程. 它意味着当压力减小时，为了防止空气通道损坏，必须减小肺表面张力，而这正是化学表面活性剂在肺里面的作用(见[BGH77, p. 199]).

拉普拉斯-杨方程是说泡沫或薄膜两边的压力差等于表面张力和一个与泡沫或薄膜形状相关的量的乘积. 事实上，注意只需(暗含的)小坐标补片的边界曲线相交成直角(故 $S\approx xy$). 同 175
时注意 $\frac{1}{R_1}$ 和 $\frac{1}{R_2}$ 是曲面垂直方向上的法曲率. 但(由练习 3.1.6)我们知道 $2H=1/R_1+1/R_2$——曲面平均曲率的两倍.

下面考虑金属丝围成的肥皂薄层，因为这里没有闭合体积，薄膜两边的压力相同，所以 $p=0$ 且(因为 T 是常数) $H=0$. 因此，有以下定理.

定理 4.1.1 *每一个肥皂薄膜都是极小曲面的物理模型.*

显然，表面张力试图作一个尽可能"紧"的曲面. 也就是说，在满足某一条件如有固定边界或而定体积的曲面中，这样的曲面有最小的表而积. 事实上，最小面积这一性质蕴含了上述的曲率性质，且由肥皂薄层的情形引出了极小的概念. 下面让我们看极小曲面的详细内容.

4.2 极小曲面的基本概念

首先，让我们了解(用不太正规的方法)怎样求曲面上的积分. 当然最简单的曲面是平面，对于平面我们做通常的二重积分. 处理曲面的整个原则是通过坐标补片 $x(u, v)$ 在平面上做所有的微积分计算，然后转化到给定曲面上. 因此，也就无怪乎我们要做相同的工作. 从第 1 章我们知道，两个向量叉积的长度等于它们围成的平行四边形的面积. 那么一个类似平行四边形的无穷小曲面的面积是多少呢? 因为曲面非常小，可以将平行四边形看成是由切向量 x_u 和 x_v 围成的，所以它的面积为 $|x_u \times x_v|$. 这个量近似于无穷小坐标补片的面积. 这就是通常的微积分对象. 近似每个小片并在整个区域上连续地加起来(即为积分). 因此设 $x(u, v)$ 是曲面 M 的坐标补片，有

定义 4.2.1 坐标补片 x 的面积 A_x 为

$$A_x = \iint |x_u \times x_v| \, du dv,$$

其中积分区域就是坐标补片定义的区域.

进一步，任意紧致的定向曲面都可以裁成有限多个坐标补片 x(实际上可取定向三角形)，它们相交于相
176 反定向的边界曲线，这里我们不给出这个命题的证明.

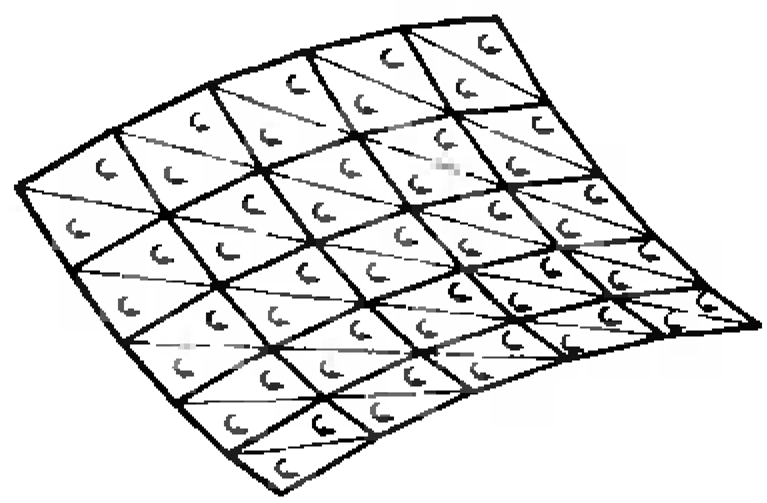


图 4-2 坐标补片的定向三角形

因此，可以通过求单个的坐标补片的面积计算紧定向曲面 M 的面积

$$A = \sum_x \iint |x_u \times x_v| \, du dv.$$

注意如果缺失少数几个点不会影响积分. 所以，可以用单个积分计算我们在此考虑的含此点的所有坐标补片的面积. 后面我们会回到这里并给出一些练习. 现在我们的目标就是利用这一思想了解极小曲面.

现在开始分析极小曲面. 设 $z = f(x, y)$ 是二元量函数，取一个 Monge 片 $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$ 作图. 由练习 3.2.26，有

$$x_u = (1, 0, f_u) \qquad x_{uu} = (0, 0, f_{uu})$$
$$x_v = (0, 1, f_v) \qquad x_{uv} = (0, 0, f_{uv})$$
$$x_{vv} = (0, 0, f_{vv})$$

$$x_u \times x_v = (-f_u, -f_v, 1) \qquad U = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

$$E = 1 + f_u^2 \qquad F = f_u f_v \qquad G = 1 + f_v^2$$

$$\ell = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \qquad m = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \qquad n = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

$$K=\frac{f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2}{(1+f_u^2+f_v^2)^2}$$

$$H=\frac{(1+f_v^2)f_{uu}+(1+f_u^2)f_{vv}-2f_uf_vf_{uv}}{2(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$ 177

由 H 的表达式得到下面的结果.

命题 4.2.2 M 是极小曲面，当且仅当

$$f_{uu}(1+f_v^2)-2f_uf_vf_{uv}+f_{vv}(1+f_u^2)=0.$$

这个偏微分方程称为极小曲面方程. 可以给函数 f 附加代数或几何的限制条件定义不同类型的极小曲面.

练习 4.2.3 假设要求的代数条件为 $f(x,y)=g(x)+h(y)$. 证明，$H=0$ 等价于 $(1+h'^2(y))g''(x)+(1+g'^2(x))h''(y)=0$. 分离变量及求解得(见 4.9.4 节)

$$f(x,y)=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{\cos ax}{\cos ay}\right).$$

曲面 $z=f(x,y)$ 称为 Scherk 极小曲面，如图 4-3 所示. 注意仅当 $\frac{\cos ax}{\cos ay}>0$ 时，Scherk 曲面才有定义. 例如，方形区域 $-\frac{\pi}{2}<ax<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<ay<\frac{\pi}{2}$ 上的 Scherk 曲面. 要了解不同的 Scherk 曲面如何连在一起，见[Opr00]. 令人惊奇的是在 18 世纪初只认识到悬链面和螺旋面是极小曲面. Scherk 曲面是另外一个极小曲面的例子，它是 Scherk 在 1835 年发现的. 它的奇妙之处在于考虑了早期忽略的代数条件.

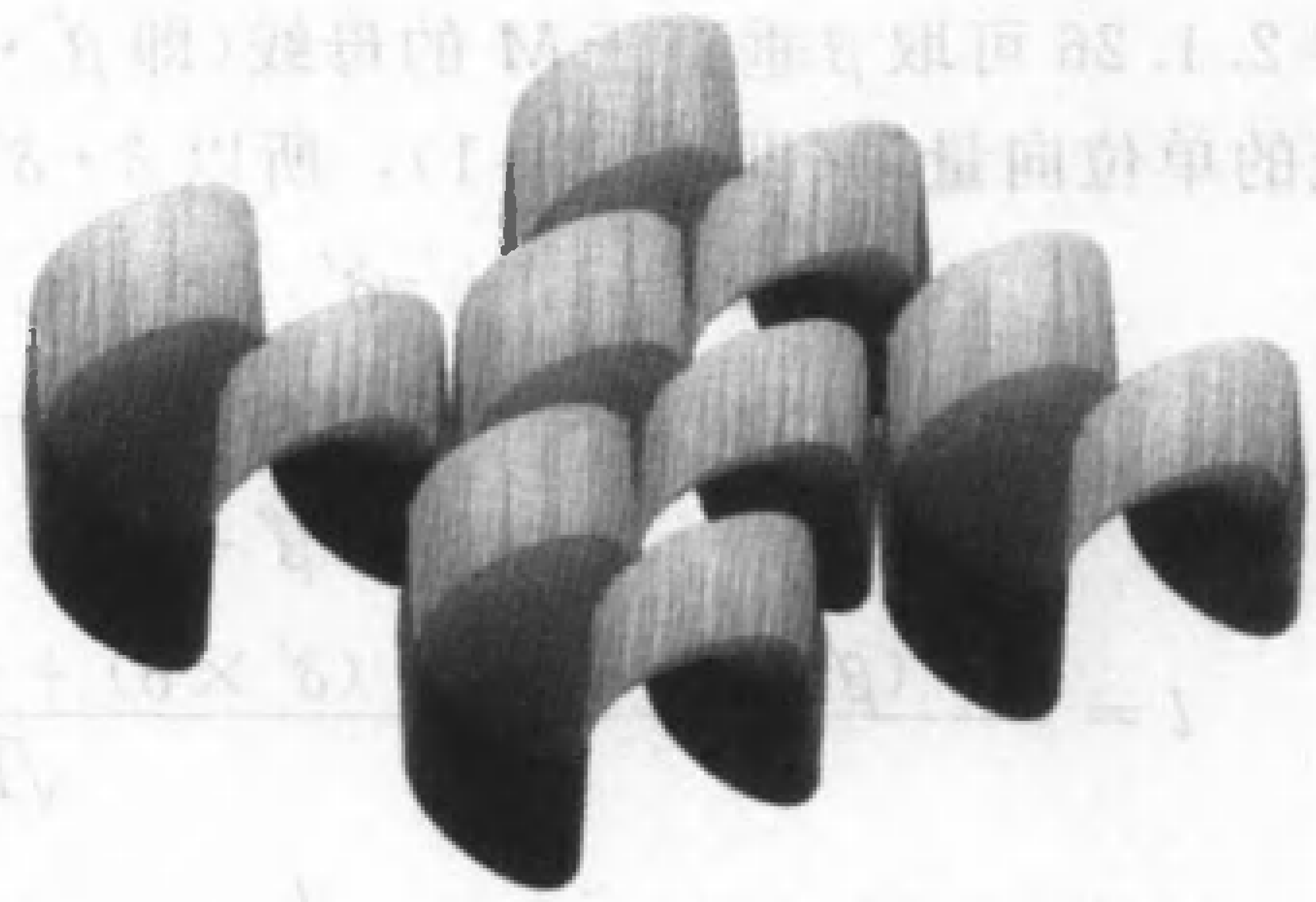


图 4-3 Scherk 曲面

练习 4.2.4 假设要求的几何条件为每条水平曲线 $f(x,y)=c$ 为直线，将获得什么类型的极小曲面呢？提示： 178

- 一般地，若曲线由隐式 $f(x,y)=c$ 给出，则曲率为

$$\kappa=\frac{-f_{xx}f_y^2+2f_xf_yf_{xy}-f_{yy}f_x^2}{|\nabla f|^3}.$$

用隐函数定理并写出函数 $f(x,g(x))=c$ 的参数方程 $\alpha(x)=(x,g(x),c)$ 证明上式. 于是

$$\kappa=\frac{|g''|}{(1+g'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

利用 $\nabla f\cdot\alpha'=0$ 证明 $g'=-\frac{f_x}{f_y}$. 再通过隐函数微分求 g''.

- 证明 $H=0\Leftrightarrow f_{xx}+f_{yy}=\kappa|f_x^2+f_y^2|^{\frac{3}{2}}$.
- 此时 $\kappa=0$(为什么?)，故 $f_{xx}+f_{yy}=0$.
- 证明上述拉普拉斯方程在所给几何约束条件下的解是

$$f(x,y) = A\arctan\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)+B.$$

如果我们令 $x-x_0=u\cos v$，$y-y_0=u\sin v$，$z-B=Av$，则曲面必为平面或螺旋面．事实上，要证明 $f(x,y)$是唯一解还需要更复杂的分析知识以及著名的哈默尔(Hamel)定理(见[Gra40])．

练习 4.2.5 称曲面上的单位速度曲线 α：$I\to M$ 是渐近线，如果对曲线上的任意点都有 $\alpha''\cdot U=0$．由公式 $\alpha''\cdot U=S(\alpha')\cdot\alpha'=k(\alpha')$可知，渐近线是沿零法曲率方向移动的曲线．证明 M 是极小曲面当且仅当每点处都有两条正交的渐近线．验证螺旋面 $x(u,v)=(u\cos v, u\sin v, v)$的参数曲线是渐近线且在每点都正交．提示：对法曲率利用欧拉公式及 $H=0$．

在上一章我们已经看到，非平面的极小旋转曲面必为悬链面．自然地，我们可以加上其他的几何假设提出类似问题．稍后我们将讨论极小曲面是否也有常高斯曲率．注意下面的定理．

定理 4.2.6(卡塔兰定理) *$\mathbb{R}^3$ 中任意直纹极小曲面都是平面或螺旋面的一部分．*

证明([BC86]) 设 M：$x(u,v)=\beta(u)+v\delta(u)$，其中不失一般性做如下假设：(1)根据练
179 习 2.1.26 可取 β 垂直于 M 的母线(即 $\beta'\cdot\delta=0$)且有单位速度(即 $\beta'\cdot\beta'=1$)；(2)δ 是沿 β 的母线的单位向量场(即 $\delta\cdot\delta=1$)．所以 $\delta\cdot\delta'=0$．由这些假设可以得出

$$x_u=\beta'+v\delta' \qquad x_v=\delta \qquad x_u\times x_v=\beta'\times\delta+v\delta'\times\delta$$
$$E=1+2v\beta'\cdot\delta'+v^2|\delta'|^2 \qquad F=0 \qquad G=1$$
$$x_{uu}=\beta''+v\delta'' \qquad x_{uv}=\delta' \qquad x_{vv}=0$$
$$l=\frac{\beta''\cdot(\beta'\times\delta)+v\beta''\cdot(\delta'\times\delta)+v\delta''\cdot(\beta'\times\delta)+v^2\delta''\cdot(\delta'\times\delta)}{\sqrt{E}} \quad m=? \quad n=0.$$

由于 M 是极小曲面，$H=\dfrac{l}{2E}=0$，因此 $l=0$．而 l 的分子是 v 的多项式：

$$\beta''\cdot(\beta'\times\delta)+v[\beta''\cdot(\delta'\times\delta)+\delta''\cdot(\beta'\times\delta)]+v^2\delta''\cdot(\delta'\times\delta).$$

要使它为 0，每项系数必须都为 0．第一项 $\beta''\cdot(\beta'\times\delta)=0$．这个方程说明 β''包含在由 β'和 δ 张成的平面记为$\langle\beta',\delta\rangle$内．因为 β 是单位速度的，所以 β'和 β''互相垂直．又由假设 β'也垂直于 δ．由于三个向量都在平面$\langle\beta',\delta\rangle$内，必有 β''平行于 δ．事实上 δ 的长度是 1，β''的长度是 β 的曲率 κ_β，故有 $\beta''=\pm\kappa_\beta\delta$．可得 $\beta''\cdot(\delta'\times\delta)=0$．

设 v 的系数为 0，利用 $\beta''\cdot(\delta'\times\delta)=0$ 推出 $\delta''\cdot(\beta'\times\delta)=0$．即是说 $\delta''\in\langle\beta',\delta\rangle$．又因为 v^2 的系数 $\delta''\cdot\delta'\times\delta=0$，意味着 $\delta''\in\langle\delta',\delta\rangle$，所以 $\delta''\in\langle\delta',\delta\rangle\cap\langle\beta',\delta\rangle$．如此有两种可能．

第一种，δ''可能在某点不平行于 δ(所以它在某个邻域也是如此)，那么等式$\langle\delta',\delta\rangle=\langle\beta',\delta\rangle$．此时因为 β'，δ'和 δ 在同一平面，且 β'和 δ'都垂直于 δ，所以 $a\beta'=\delta'$．因为$|\beta'\times\delta|=1$，所以 M 的单位法向量

$$U=\frac{(1+av)(\beta'\times\delta)}{|1+av||\beta'\times\delta|}=\pm\beta'\times\delta,$$

取 U 对 u 的微分，因 $\beta''=\kappa_\beta\delta$，$\beta'=a\delta'$，则 $U'=\beta''\times\delta+\beta'\times\delta'=0$，所以 U 为常量，故 M 是平面的一部分．

第二种，δ''在各处都平行于δ，因此$\delta''=a\delta$，进而$\beta'\cdot\delta''=0$. 而$\beta'\cdot\delta=0$可推出$\kappa_\beta=\kappa_\beta\delta\cdot\delta=\beta'\cdot\delta=-\beta\cdot\delta'$，又因为$\beta'$和$\delta''$平行于$\delta$，$\beta'$和$\delta'$垂直于$\delta$，所以

$$\frac{\mathrm{d}\kappa_\beta}{\mathrm{d}u}=-\beta''\cdot\delta'-\beta'\cdot\delta''=0,$$

因此曲率κ_β为常量. 注意，若该常量为0，则β为直线，曲面为平面的一部分. 现在考虑β的挠率τ_β. 因为$\beta'=\kappa_\beta\delta$，$\kappa$为常值，则$\beta'''=\kappa_\beta\delta$，所以通常的公式就变为$\tau_\beta=(\beta'\times\delta)\cdot\delta'$. ■

练习 4.2.7 证明$\frac{\mathrm{d}\tau_\beta}{\mathrm{d}u}=0$. 180

从而τ_β是常量. 回忆有常曲率和挠率的曲线为圆柱螺线(circular helix). 在$\mathbb{R}^3$中刚性运动的意义下，β可参数化为

$$\beta(u)=(A\cos u, A\sin u, Bu),$$

其中$A^2+B^2=1$. 而且，δ平行于β''，δ有单位速度，故$\delta(u)=(\cos u, \sin u, 0)$. 令$A+v=\bar{v}$，则螺旋面的参数方程$x(u, v)=(\bar{v}\cos u, \bar{v}\sin u, Bu)$.

这样在旋转曲面和直纹面上加上两类最自然的几何限制，就引出了18世纪的极小曲面：悬链面和螺旋面.

练习 4.2.8 画出下列曲面. 证明 Helcat、Enneper、Scherk 及平面曲率线曲面都是极小曲面，并计算它们的高斯曲率. 在这里可以使用 Maple，不过要小心. 如果试做 Heneberg 和卡塔兰曲面，实际计算之前要保存好工作表.

- Helcat(如图 4-4 所示). 对任意固定的t，$x(u, v)=(x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$，其中

$$x^1(u,v)=\cos(t)\sinh(v)\sin(u)+\sin(t)\cosh(v)\cos(u)$$
$$x^2(u,v)=-\cos(t)\sinh(v)\cos(u)+\sin(t)\cosh(v)\sin(u)$$
$$x^3(u,v)=u\cos(t)+v\sin(t).$$

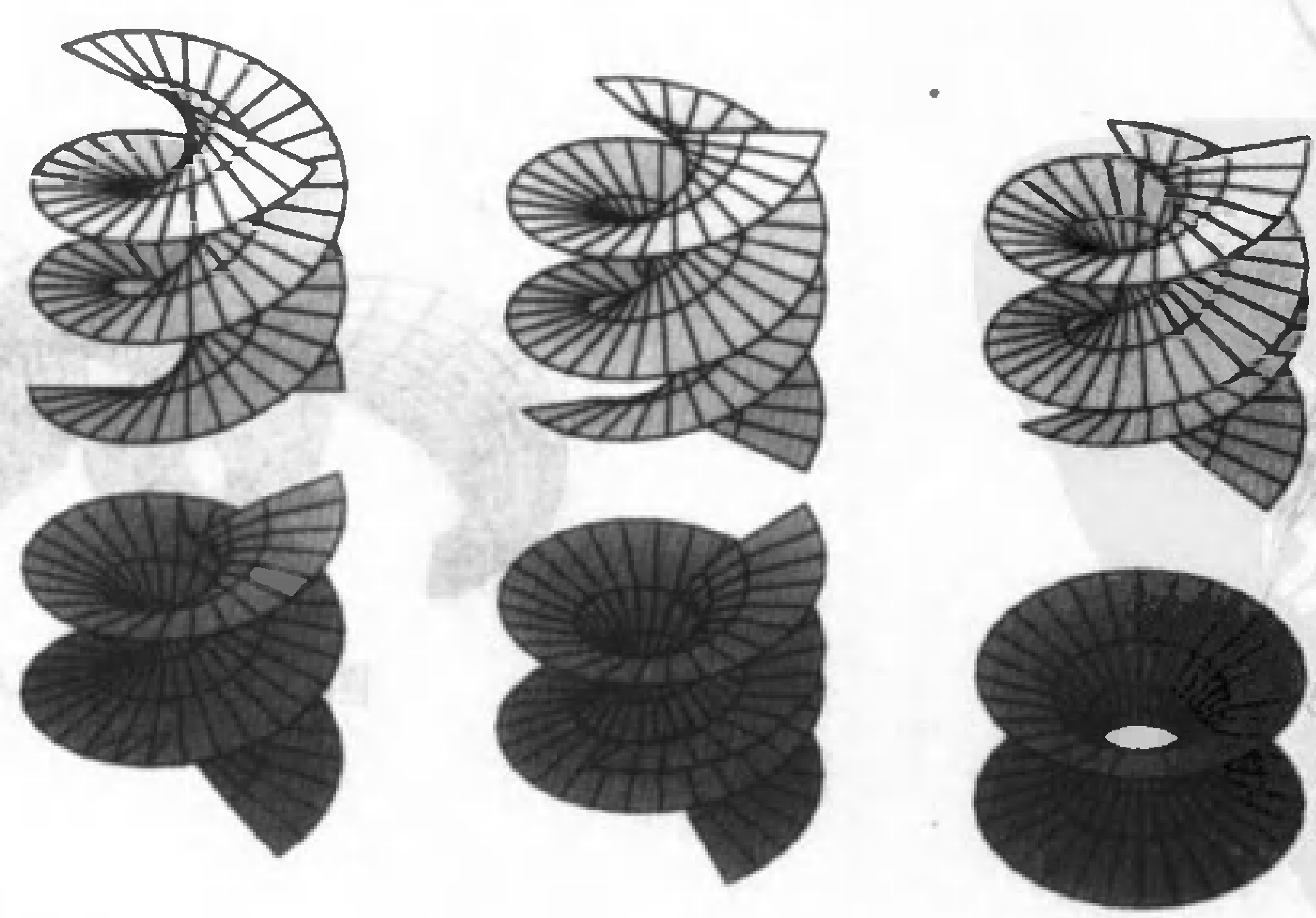


图 4-4 从螺旋面到悬链面的单参数极小曲面族 181

- Henneberg 曲面(如图 4-5 所示). $x(u, v)=(x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$，其中

$$x^1(u,v) = 2\sinh(u)\cos(v) - \frac{2}{3}\sinh(3u)\cos(3v)$$

$$x^2(u,v) = 2\sinh(u)\sin(v) + \frac{2}{3}\sinh(3u)\sin(3v)$$

$$x^3(u,v) = 2\cosh(2u)\cos(2v).$$

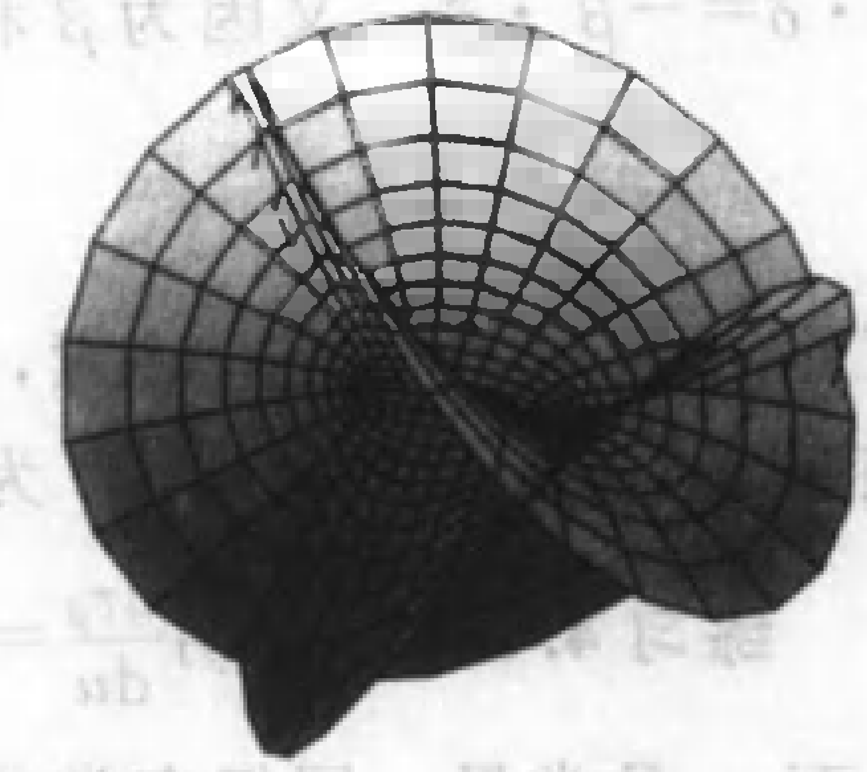


图 4-5 Henneberg 曲面

- 卡塔兰曲面(如图 4-6 所示).

$$x(u,v) = (u - \sin(u)\cosh(v), 1 - \cos(u)\cosh(v), 4\sin(u/2)\sinh(v/2)).$$

- Enneper 曲面(如图 4-7 所示).

$$x(u,v) = (u - u^3/3 + uv^2, v - v^3/3 + vu^2, u^2 - v^2).$$

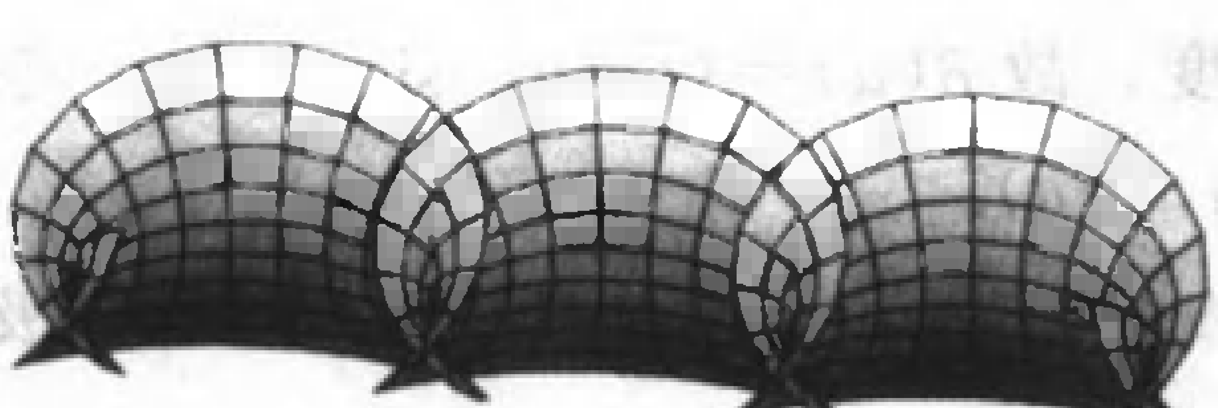


图 4-6 卡塔兰曲面

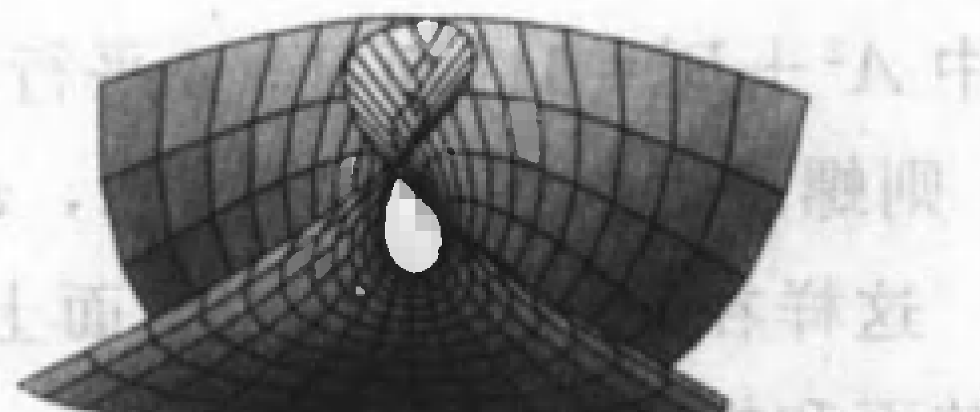


图 4-7 Enneper 曲面

- Scherk 第五曲面(如图 4-8 所示). 这一曲面经常写成非参数的形式 $\sin z = \sinh x \sinh y$，其参数方程为

$$x(u,v) = (\operatorname{arcsinh}(u), \operatorname{arcsinh}(v), \arcsin(uv)).$$

- 平面曲率线曲面(如图 4-9 所示).

$$x(u,v) = \left(\frac{cu \pm \sin u\cosh v}{\sqrt{1-c^2}}, \frac{v \pm c\cos u\sinh v}{\sqrt{1-c^2}}, \pm \cos u\cosh v\right).$$



图 4-8 Scherk 第五曲面

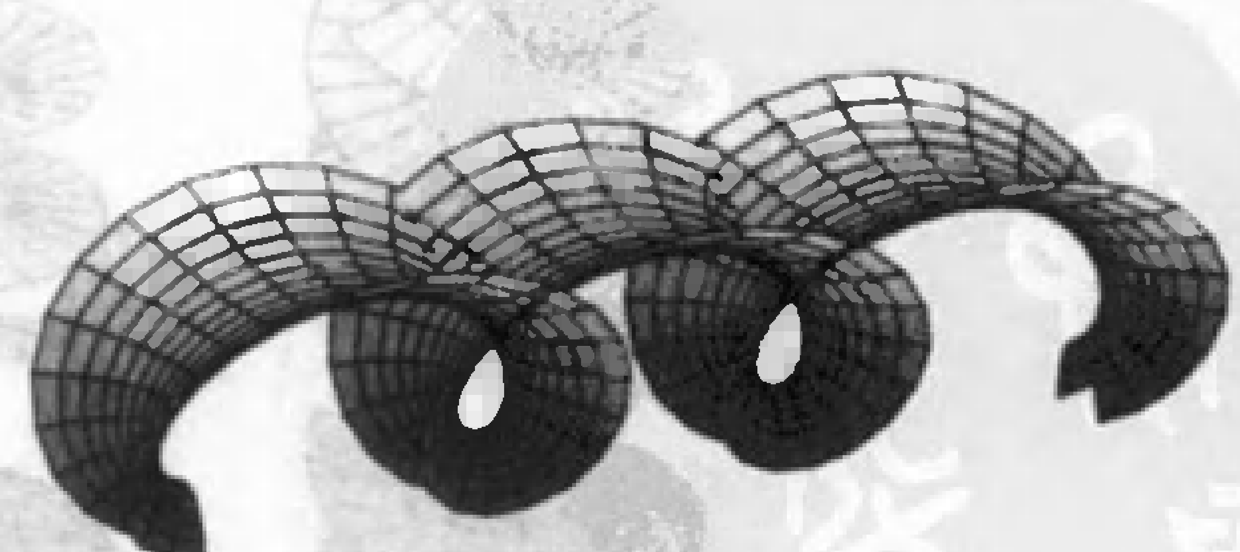


图 4-9 平面曲率线曲面

4.3 极小化面积

现在让我们更进一步了解“极小”这个词的意义. 19 世纪中期，比利时物理学家普拉托(Plateau)提出下述问题：给定曲线 C，求以 C 为边界的极小曲面 M. 普拉托对薄膜(例如肥皂

薄膜)感兴趣，而这一问题就是在他的物理实验中自然产生的．下面将看到有最小面积的曲面就是极小曲面．事实上，最终我们认识到对于普拉托问题找解的一般方法就是寻找一个最小面积的曲面．因此，普拉托问题的另一个版本是求以 C 为边界的面积最小的曲面．然而即使面积最小的曲面的存在性也不是显然成立的．实际上，普拉托问题最早由 J. Douglas 和 T. Rado 在 20 世纪 20 年代和 20 世纪 30 年代解决(见[Dou31，Rad71])，他们证明了以下定理． 182~183

定理 4.3.1 *由给定的若尔当曲线生成的曲面中，总存在一个面积最小的圆盘状的极小曲面．*

(如果参数的定义域是单位圆盘 $D=\{(u, v) \mid u^2+v^2\leqslant 1\}$，且边界圆映射到给定的若尔当曲线，则此极小曲面是圆盘状．)为证明这一问题，考虑下面练习．

练习 4.3.2 设 C 是 xy 平面上的单位圆．证明下述变形的普拉托问题无解：找一个最小面积的曲面，使得它以 C 为边界且经过(0，0，1)．注意这个问题其实是问：曲面具体是什么？圆盘要带一颗长钉吗(如图 4-10 所示)？这(按恰当的面积定义)是我们考虑的普拉托问题的一个困难点．当然，从完全"可微"的观点出发，就没有这些问题．

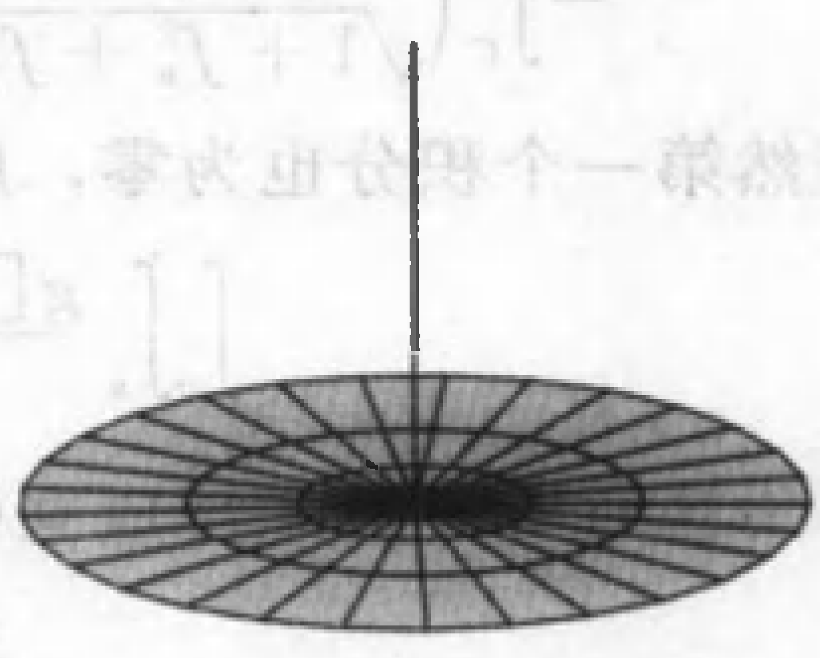


图 4-10 带有长钉的圆盘

看一个较简单的问题．在边界为 C 的曲面中，M 有最小面积的必要条件是什么？可以通过下面变分法的简化版本得到这个答案．

假设 M：$z=f(x, y)$是以 C 为边界的最小面积曲面．考虑由 M 略微变形但形式相近的那些曲面：

$$M^t: z^t(x,y)=f(x,y)+tg(x,y).$$

其中 g 是定义在 f 的定义域上的函数，且当它乘以一个很小的 t 加上 f 时，M 上的点移动了一点，但 C 保持不变，即 $g\,|_{\tilde{C}}=0$，其中$\tilde{C}$是 f 定义域的边界且 $f(\tilde{C})=C$，M^t 的蒙日补片为

$$\mathbf{x}^t(u,v)=(u,v,f(u,v)+tg(u,v)).$$ 184

直接计算有

$$|\mathbf{x}_u^t\times\mathbf{x}_v^t|=\sqrt{1+f_u^2+f_v^2+2t(f_ug_u+f_vg_v)+t^2(g_u^2+g_v^2)}.$$

由面积定义可知 M^t 的面积为

$$A(t)=\int_v\int_u\sqrt{1+f_u^2+f_v^2+2t(f_ug_u+f_vg_v)+t^2(g_u^2+g_v^2)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

对 t 微分，

$$A'(t)=\int_v\int_u\frac{f_ug_u+f_vg_v+t(g_u^2+g_v^2)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2+2t(f_ug_u+f_vg_v)+t^2(g_u^2+g_v^2)}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

假设 $z=z_0$ 是极小点，则 $A'(0)=0$．所以在上述等式中令 $t=0$，得

$$\int_v\int_u\frac{f_ug_u+f_vg_v}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0.$$

再设

$$P=\frac{f_u g}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\qquad Q=\frac{f_v g}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}.$$

练习 4.3.3 计算$\frac{\partial P}{\partial u}$和$\frac{\partial Q}{\partial v}$并利用格林定理(定理 1.6.2).

因为 $g|_C=0$，所以

$$\iint_{u,v}\frac{f_u g_u+f_v g_v}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\iint_{u,v}\frac{g[f_{uu}(1+f_v^2)+f_{vv}(1+f_u^2)-2f_uf_vf_{uv}]}{(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\int_C\left(\frac{f_u g\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}-\frac{f_v g\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\right)=0.$$

当然第一个积分也为零，所以最终有

$$\iint_{u,v}\frac{g[f_{uu}(1+f_v^2)+f_{vv}(1+f_u^2)-2f_uf_vf_{uv}]}{(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0.$$

因为这对所有的 g 都成立(见练习 7.1.5 及下面讨论)，所以只能是

$$f_{uu}(1+f_v^2)+f_{vv}(1+f_u^2)-2f_uf_vf_{uv}=0.$$

这是极小曲面方程. 因此有下述曲面面积极小的必要条件.

185 **定理 4.3.4** *若 M 面积最小，则 M 为极小曲面.*

练习 4.3.5 设 M 是定义域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上的图像 $z=f(x, y)$且以闭合曲线 C 为边界. 证明若 f 满足极小曲面方程，则在所有满足 $g|_C=f|_C$ 的 $z=g(x, y)$中曲面 M 有最小面积. 提示：(1)曲面 Z 由沿 $g(C)=f(C)$连结两个图形构成. (2)在 $D\times\mathbb{R}$ 上取 M 的法向量场 $U_f=\left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)$. (3)利用散度定理且 U_f 为 Z 的小片的法向量场这一事实，估计每个曲面的积分，证明 $\mathrm{div}(U_f)=0$(见[Opr00]的讨论).

练习 4.3.6 设悬链曲线 $y=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$，经过点(−0.6, 1)和(0.6, 1)确定参数 a. 计算该悬链曲线绕 x 轴旋转产生的悬链面的面积. 证明这一面积大于两个半径为 1 的圆盘的面积. 所以如果原先的边界是两个圆心分别在(−0.6, 1)和(0.6, 1)点垂直于 x 轴的圆，则悬链曲面为极小曲面，但不是该边界生成的面积最小的曲面. 提示：利用 Maple(例如“fsolve”命令和数值积分).

事实上，更多说明如下. 设 x_0，$-x_0$ 是 x 轴上的点且是半径为 y_0 的既定圆的圆心.

- 若$\frac{x_0}{y_0}>0.528$(近似地)，则这两个圆盘给出了曲面面积的极小解. 这称为 Goldschmidt 非连续解.
- 若$\frac{x_0}{y_0}<0.528$(近似地)，则悬链曲面是极小解，而 Goldschmidt 解是局部极小.
- 若 $0.528<\frac{x_0}{y_0}<0.663$(近似地)则悬链曲面是唯一的局部极小解.

- 若$\frac{x_0}{y_0}>0.663$(近似地)，则不存在连结这两点的悬链曲面．这可从位于两个环间的悬链面的肥皂薄层缓慢地拉开使环分离这一实验中看到．测量$\frac{x_0}{y_0}$，可以看到在大约$\frac{x_0}{y_0}=0.663$时，悬链面自然地变为两个圆盘．对此问题的一些非正式的讨论见[Ise92]；正式的讨论见[Bli46]．最后对于 Maple 的分析，见[Opr00]．

4.4 常平均曲率

现在来研究平均曲率为非零常数的情形．在此之前先给出一个非常优美的公式，也是今后研究的基础．设 M 是紧的定向的浸入在$\mathbb{R}^3$ 中的曲面，单位法向量 $U=\frac{x_u\times x_v}{|x_u\times x_v|}$，平均曲率为 H，面积 $A=\iint|x_u\times x_v|\,dudv$．回忆 M 是浸入的，意味着它允许自身有交点，但在切平面上必须是一一的．对于 M 的坐标补片 $x(u,v)$而言，浸入要求 x_u 和 x_v 在每点都线性无关．于是在曲面上的每点都定义了一个非零法向量 $x_u\times x_v$．Enneper 曲面就是一个浸入曲面的例子． 186

然后，正如我们在推导极小曲面方程时做的那样，通过 M 上的向量场 V 扰动 M．注意这里用向量场代替函数 g，是因为 M 不是定义在某一定义域上的图像．

$$M^t:y^t(u,v)=x(u,v)+tV(u,v).$$

M^t 的面积为

$$\begin{aligned}A(t)&=\iint|y_u\times y_v|\,dudv\\&=\iint\sqrt{|x_u\times x_v|^2+2t(x_u\times x_v)(x_u\times V_v+V_u\times x_v)+O(t^2)}\,dudv.\end{aligned}$$

取对 t 的导数，并计算在 $t=0$ 处的值，得

$$\begin{aligned}A'(0)&=\iint\frac{x_u\times x_v}{|x_u\times x_v|}(x_u\times V_v+V_u\times x_v)\,dudv\\&=\iint\frac{x_u\times x_v}{|x_u\times x_v|}(x_u\times V_v-x_v\times V_u)\,dudv\\&=\iint(V_v\cdot(U\times x_u)-V_u\cdot(U\times x_v))\,dudv.\end{aligned}$$

练习 4.4.1 设 $P=-V\cdot(U\times x_v)$，$Q=V\cdot(U\times x_u)$，利用格林定理和 3.1 节形状算子的公式，得

$$\begin{aligned}&\iint(V_v\cdot(U\times x_u)-V_u\cdot(U\times x_v)+V\cdot(2Hx_u\times x_v))\,dudv\\&=-\int_C V\cdot(U\times x_v)dv+V\cdot(U\times x_u)du.\end{aligned}$$

在 M 的全体坐标补片上积分，根据 M 的定向知沿 M 边界的线积分相互抵消．所以对于 M，上式右边为 0，故有

$$A'(0)=\iint(V_v\cdot(U\times x_u)-V_u\cdot(U\times x_v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=-\iint V\cdot(2Hx_u\times x_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \qquad (**)$$

187 $$=-\iint 2HU\cdot V\mathrm{d}A. \qquad \text{因为由定义 } \mathrm{d}A=|x_u\times x_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

练习 4.4.2 假设 M 是边界为曲线 C 的曲面的一部分，则上述沿边界曲线 C 的积分不为 0. 所以，若将 C 参数化为单位速度，证明

$$A'(0)=-\iint 2HU\cdot V\mathrm{d}A-\int_C V\cdot(U\times T)\mathrm{d}s,$$

其中 $T=x_u u'+x_v v'$ 是 C 的单位切向量. 进一步，假设变化向量场 V 总是沿曲面以保持边界曲线. 也就是假设总有 $V\cdot U=0$，证明

$$A'(0)=-\int_C V\cdot(U\times T)\mathrm{d}s.$$

练习 7.6.12 将表明这个练习的重要性.

现在，给出公式(**)的两个应用. 第一，因为 M 是一致紧的，所以可设 $V=x(u,v)$. 进而 $y^t=(1+t)x$，$A(t)=(1+t)^2A$. 显然 $A'(0)=2A$，故有

$$A=-\iint HU\cdot x\mathrm{d}A.$$

这样就得到联系曲面面积和平均曲率的公式. 以后将应用这个公式. 第二，设 $V=fU$ 为法向量场. 当然，它是我们希望的均匀作用在曲面上由压力产生的力场. 现在，$U\cdot U=1$，故 $A'(0)=-2\iint fH\mathrm{d}A$. 根据几何意义，一个向量场的散度是体积 Vol 的变化率(详见[MT88, p.227]). 利用散度定理，有

$$\mathrm{Vol}'(0)=\iiint\mathrm{div}(fU)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint fU\cdot U\mathrm{d}A$$

$$=\iint f\mathrm{d}A.$$

回忆散度(或高斯)定理是说，向量场 $V=(V^1,V^2,V^3)$ 的散度 $\mathrm{div}V=\partial V^1/\partial x^1+\partial V^2/\partial x^2+\partial V^3/\partial x^3$ 在闭曲面 M 围成的空间区域 Ω 上的积分，等于 V 垂直于 M 的分支的曲面积分. 即

$$\iiint_\Omega \mathrm{div}V\mathrm{d}\Omega=\iint_M V\cdot U\mathrm{d}A,$$

其中 U 是 M 的单位外法向量. 于是有面定体积(即 $\mathrm{Vol}'(0)=0$)的面积最小问题(即 $A'(0)=0$)，等价于求出满足

$$\iint fH\mathrm{d}A=0 \quad \left(\text{对所有满足}\iint f\mathrm{d}A=0\text{ 的 } f\right)$$

188 的 H.

练习 4.4.3 证明这一条件意指 $H=c$，c 为常数. 提示：(1)记 $H=c+(H-c)=c+J$，

其中 $c=\dfrac{\iint H\mathrm{d}A}{A}$. (2)说明 $\iint J^2\mathrm{d}A=\iint J(H-c)\mathrm{d}A=0$（利用假设）. (3)得 $J=0$(4)所以 $H=c$.

显然泡沫曲面张力即为上述情形. 所以我们证明了以下定理.

定理 4.4.4 *肥皂泡沫总是以常平均曲率曲面的形式存在.*

这些曲面都是什么样呢？在第 3 章中我们看到，1800 年德洛奈给出了常平均曲率旋转曲面的分类，然而它们当中只有球面是紧的(闭有界)且可嵌入到$\mathbb{R}^3$ 中. 问题是存在其他的紧的可嵌入的常平均曲率的曲面吗？换句话说，自身不交的肥皂泡总是球面吗？最初的答案由亚历山大给出，回答是肯定的. 为证明亚历山大的结果，需要用到上述公式以及 Antonio Ros(见[Ros87])给出的漂亮估计. 在这些结论中要注意几何量(面积、体积、曲率)和向量微积分(散度定理、曲率)间的本质联系. 首先给出 Ros 的估计，然后证明亚历山大定理，最后证明 Ros 定理. 虽然 Ros 定理有些刻板，但对其里想的理解肯定有几何的益处. (下面是从[Oss90]中节选的.)

定理 4.4.5(Ros) *M 是$\mathbb{R}^3$ 中所围区域为 D、体积为 Vol 的紧嵌入曲面. 如果在 M 上有 $H>0$，则*

$$\int_M \frac{1}{H}\mathrm{d}A \geqslant 3\mathrm{Vol},$$

而且等号成立当且仅当 M 为标准球面.

定理 4.4.6(亚历山大) *如果 M 是有常平均曲率的紧嵌入曲面，则 M 是标准球面.*

证明 假设 H 为常数，利用上面的面积积分公式及散度定理得(其中 U 是内法向量)

$$\begin{aligned}A&=-\iint HU\cdot x\mathrm{d}A\\&=H\iiint \mathrm{div}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=3H\mathrm{Vol},\end{aligned}$$ 189

则

$$\iint\frac{1}{H}\mathrm{d}A=\frac{1}{H}\iint\mathrm{d}A=\frac{A}{H}=\frac{A}{\frac{A}{3\mathrm{Vol}}}=3\mathrm{Vol}.$$

由 Ros 定理，M 一定为球面. ■

Ros 定理的证明 首先，通过取 M 的内部做一个框架 S，从而将 M 扩充一部分.

$$S=\{p+\varepsilon h(p)U\mid p\in M\},$$

其中 U 是 M 的单位法向量，$0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$ 且 $h(p)$ 定义为

$h(p)=\sup\{r\mid p$ 是 M 上唯一地到 q 最近的点,其中 q 是沿法向量 U 到 p 点距离是 r 的点$\}$.

这个定义的意义如下：对任意 $p\in M$，沿内法向量 U 方向考虑该方向的任一点 q. 对于直线 $p+tU$上的某点 q，p 是 M 上与 q 最近的点. 现在考虑这些点，并取这些点与 M 上点最远的距离 r. (实际上，这里有点小技巧，很可能 q 点满足最远，但在 M 上却没有唯一的最近点，例如球心！这就是为什么要对唯一的最近点 p 取与 q 的距离的上确界.)

因为在估计中要用到 D 的体积 V，所以才考虑壳 S，将会看到

$$\mathrm{Vol}(D)=\mathrm{Vol}(S).$$

S 的体积可以方便地用曲率来计算. 为证明体积相等，首先注意壳内可以无重叠，这由 $h(p)$ 的定义可知，因为壳的每点都位于唯一的 M 的法向量上. 当然，可能壳的边界有重叠(以球面为例)但这不会影响体积，因为边界仅是 2 维的.

第二，取任意 $q\in D$，并设 d 为 q 到 M 的距离(即到 M 的最近点). 显然沿垂直于 M 的直线就可得到这个距离. 总之，若用 $B(q,d)$表示圆心为 q 半径为 d 的闭球，则 $B(q,d)$的内部不含 M上的点，$\partial B(q,d)$表示球 $B(q,d)$的边界，至少包含最近的 $p\in M$. 考虑从 q 到 $pB(q,d)$ 中的半径，且在这一半径上任取 q'. 设 r 是沿半径 q'到 p 的距离. 注意到除 p 点外，$B(q',r)$ 位于 $B(q,d)$的内部. 所以 p 是 M 上唯一的一个实现 q'到 M 的距离 r 的点，所有这些 q'在定义的 $h(p)$的集合中. 现在因为 q'可以任意接近 q，所以 q'的距离的上确界就是 d. 当然，可能
190 有其他点在集合内，但是有 $d\leqslant h(p)$. 这意味着，由壳 S 的定义，$q\in S$. 从而 D 的点都在壳 S 上，S 只会在二维边界重叠. 因而，D 和 S 的体积必然相同.

现在，若 M 有局部参数化 $\boldsymbol{x}(u,v)$，那么壳 S 的参数方程可如下给出：

$$\boldsymbol{y}(u,v,t)=\boldsymbol{x}(u,v)+tU(u,v).$$

注意，因为壳是 3 维的，所以需要 3 个参数. 这里，$0\leqslant t\leqslant h(p)=h(u,v)$，$p=\boldsymbol{x}(u,v)$. 现在 S 的一个小厚块可看作由 $\boldsymbol{y}_u$，$\boldsymbol{y}_v$ 和 $\boldsymbol{y}_t$ 决定的平行体. 厚块的体积为 $|(\boldsymbol{y}_u\times\boldsymbol{y}_v)\cdot\boldsymbol{y}_t|$. S 的体积为

$$\mathrm{Vol}(S)=\iiint_0^{h(u,v)}|(\boldsymbol{y}_u\times\boldsymbol{y}_v)\cdot\boldsymbol{y}_t|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

为确定被积函数，假设参数曲线 $\boldsymbol{x}(u,v_0)$和 $\boldsymbol{x}(u_0,v)$为曲率线. 即 $k_1\boldsymbol{x}_u=S(\boldsymbol{x}_u)=-\nabla_{\boldsymbol{x}_u}U=-U_u$及 $k_2\boldsymbol{x}_v=S(\boldsymbol{x}_v)=-\nabla_{\boldsymbol{x}_v}U=-U_v$，则

$$\boldsymbol{y}_u=\boldsymbol{x}_u+tU_u=(1-k_1t)\boldsymbol{x}_u\quad 和\quad \boldsymbol{y}_v=\boldsymbol{x}_v+tU_v=(1-k_2t)\boldsymbol{x}_v.$$

又因为 $k_1+k_2=2H$ 且 $k_1k_2=K$，因此 $\boldsymbol{y}_u\times\boldsymbol{y}_v=(1-k_1t)(1-k_2t)(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v)=(1-2Ht+Kt^2)(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v)$. 而 H、K 不依赖于参数的选择. 所以，尽管这个公式是通过假定 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 是主向量才得到的，但是，对于一般情况，这个公式仍然成立！当然，$\boldsymbol{y}_t=U$，即 $|(\boldsymbol{y}_u\times\boldsymbol{y}_v)\cdot\boldsymbol{y}_t|=|1-2Ht+Kt^2|\,|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|$且

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(S)&=\iiint_0^{h(u,v)}|(\boldsymbol{y}_u\times\boldsymbol{y}_v)\cdot\boldsymbol{y}_t|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint\left\{\int_0^{h(u,v)}|1-2Ht+Kt^2|\,\mathrm{d}t\right\}|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_M\left\{\int_0^{h(u,v)}|1-2Ht+Kt^2|\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}A\\&=\int_M\int_0^{h(u,v)}|(1-k_1t)(1-k_2t)|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}A.\end{aligned}$$

由壳的体积表达式，我们看到体积和主曲率联系密切. 事实上，可由以下的估计给出它们与函数 $h(p)$之间的关系：

191

$$\frac{1}{h(p)}\geqslant\max\{k_1(p),k_2(p)\},$$

此估计对所有 $p\in M$ 都成立. 为什么会这样? 设 q 是 p 沿法向量与之距离为 $h(p)$ 的点, 则开球 $B(q, h(p))$ 不包含任意 M 上的点. 若有 $p'\in M\cap B(q, h(p))$, 则它与 q 的距离小于 $h(p)$. 对半径上任意趋近 q 点的 q' 点, q' 到 p' 的距离小于 q' 到 p 的距离. 这与 $h(p)$ 的定义相矛盾.

练习 4.4.7 证明最后一个命题. 提示: (1) $h(p)$ 是上确界, 故存在序列 $q'\to q$, p 是 M 上沿法向量与 q' 最近的点. (2) 若 p' 存在, 则 q' 到 M 的距离小于 q' 到 p 的距离. (3) 因为对所有接近 q 的 q' 都为真, 故序列 $q'\to q$ 不存在.

因此, $B(q, h(p))$ 不包含 M 上的点, 球 $B(q, h(p))$, $S(q, h(p))$ 完全位于 D 的封闭区域内. 特别地球面位于 M 内, 且在 p 点相接触. 这意味着 $S(q, h(p))$ 在 p 点各个方向的法曲率都比 M 大. (相反估计比照定理 3.5.3 的证明.) 当然球面的法曲率为常数且等于半径的倒数. 此时法曲率总是 $\frac{1}{h(p)}$, 可得要证的不等式.

上面的不等式是说 $k_1h(p)\leqslant 1$, $k_2h(p)\leqslant 1$. 所以如果 $0\leqslant t\leqslant h(p)$, $(1-k_1t)$ 和 $(1-k_2t)$ 非负, 且

$$\int_0^{h(p)}|(1-k_1t)(1-k_2t)|\,dt=\int_0^{h(p)}(1-k_1t)(1-k_2t)\,dt.$$

由该法曲率不等式及几何-算术均值不等式 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, 得

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{h(p)}t\right)^2&=\left(1-\frac{1}{h(p)}t\right)\left(1-\frac{1}{h(p)}t\right)\\&\leqslant(1-k_1t)(1-k_2t)\\&\leqslant(1-Ht)^2.\end{aligned}$$

因此 $\frac{1}{h(p)}\geqslant H(p)$ 或 $\frac{1}{H(p)}\geqslant h(p)$, 于是

$$\int_0^{h(p)}(1-k_1t)(1-k_2t)\,dt\leqslant\int_0^{\frac{1}{H}}(1-Ht)^2\,dt=\frac{1}{3H},$$

从而

$$\mathrm{Vol}(S)=\int_M\int_0^{h(p)}(1-k_1t)(1-k_2t)\,dt\,dA\leqslant\int_M\frac{1}{3H}\,dA.$$

这正是我们想要得到的. 最后, 注意等号成立, 则 $(1-k_1t)(1-k_2t)\leqslant(1-Ht)^2$ 中的等号也成立.

192

练习 4.4.8 证明 $(1-k_1t)(1-k_2t)=(1-Ht)^2$ 当且仅当 $k_1=k_2$ 处处成立.

因此, 等号成立当且仅当 M 上的点都是脐点. 由定理 3.5.2 知当且仅当 M 是球面.

亚历山大定理的结果引出霍普夫猜想: 常平均曲率的浸入曲面都是球面. 最近几年才证明这个猜想是错误的. H. Wente[Wer80]第一个构造出浸入 $\mathbb{R}^3$ 的常平均曲率圆环面. 由于 Wente 的工作, 得到了很多有关机械学的重要结论(如例). 我们并没有全面讨论平均曲率, 还遗留了许多有意思且重要的问题, 希望上述简要的介绍会引导读者作进一步的研究.

4.5 调和函数

现在开始讨论极小曲面与数学其他分支的联系，并且在后续的章节中进一步研究这些联系，理解与这个课题相关的数学和自然科学是值得的.

在数理方程中研究的一个重要的偏微分方程是拉普拉斯方程或势方程. 在 2 维笛卡儿坐标中，拉普拉斯方程为

$$\Delta\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0.$$

(在其他坐标系下可以找到该方程在高维情形下的类似版本.)这个等式描述了稳态的温度分配、薄膜的振动位移、万有引力及电势.

定义 4.5.1 *实值函数 $\Phi(x, y)$ 称为调和的(harmonic)，如果它所有的二阶偏导数是连续的，并在定义域的每点都满足拉普拉斯方程.*

定理 4.5.2 *若 $f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$ 是复解析函数(即在复平面的区域的任意点导数 $f'(z)$ 都存在)，则 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都是调和的.*

例 4.5.3 设 $f(z)=z^2$，其中 $z=x+\mathrm{i}y$，则

193

$$\begin{aligned} z^2 &= (x+\mathrm{i}y)^2 \\ &= x^2+2\mathrm{i}xy-y^2 \\ &= (x^2-y^2)+\mathrm{i}(2xy). \end{aligned}$$

所以，$\mathrm{Re}(z^2)=u(x, y)=x^2-y^2$，$\mathrm{Im}(z^2)=v(x, y)=2xy$ 是由 $f(z)=z^2$ 导出的特殊的调和函数(称为调和共轭). 为验证这一点，注意 u 的偏导数 $u_x=2x$，$u_y=-2y$，$u_{xx}=2$，$u_{yy}=-2$，则 u 满足拉普拉斯方程 $u_{xx}+u_{yy}=2+(-2)=0$. 类似地，v 的偏导数 $v_x=2y$，$v_y=2x$，$v_{xx}=0$，$v_{yy}=0$，故 v 满足拉普拉斯方程 $v_{xx}+v_{yy}=0+0=0$.

练习 4.5.4 设 $f(z)=z^2$，其中 $z=x+\mathrm{i}y$. 计算 f 的实部. 这一调和函数产生了著名的马鞍面. 计算马鞍面的曲率函数，并画图.

为讨论调和函数的性质，想象它们在$\mathbb{R}^3$ 中的形状常常是有用的. 在前面的例子中，两个调和函数的图像就是标准的"马鞍面". 然而并不总是这么简单，还有更复杂的调和函数的图像，肥皂泡就是一个例子. 一般而言，不能说调和函数的图像是极小曲面. 考虑前例中的调和函数 $u(x, y)=x^2-y^2$，对于相应的蒙日片计算 H，得

$$H=\frac{2(1+4y^2)-2(1+4x^2)}{2(1+4x^2+4y^2)}=\frac{4y^2-4x^2}{1+4x^2+4y^2}.$$

显然，这个曲面的平均曲率不恒为零. 类似地，一般极小曲面也不是调和函数的图像. 关于任意肥皂泡曲面的参数方程，我们知道很少. 从普拉托时代开始，对于给出有最小面积的曲面的明确的参数方程，即使边界相对简单，也被证明几乎是不可能的.

那么一个自然的问题就是怎样用一个极小曲面逼近调和函数? 先考虑平面. 形如 $ax+by+c$ 的函数 $z=\Phi(x, y)$ 显然是调和函数(这里的变量 z 不是复变量，是三维正交笛卡儿坐标中竖直方向的坐标). 那么如果曲面接近于平面会怎样? 类似于上面证明面积最小的曲面即是极小曲面的讨论方法可以证明在这一情形下将面积减少一圈的函数 Φ 也是调和函数.

练习 4.5.5 假设函数 $z=f(x,y)$ 的图像由已知的曲线张成，且在该曲线张成的曲面中面积最小. 进一步假设 f 的 4 阶以上的偏导数可以忽略不计. 即 f_x^4，f_y^4，$f_x^2f_y^2$ 很小，所以可以用 $\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}[f_x^2+f_y^2]\right)^2}=1+\frac{1}{2}[f_x^2+f_y^2]$ 很好地近似曲面积分中的被积函数 $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$. 那 194
么不考虑常数项 1 以及因子 $\frac{1}{2}$，相应的面积积分为

$$A=\iint(f_x^2+f_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

现在改变 $z=f(x,y)$ 得到相近的曲面 $z^t(x,y)=f(x,y)+tg(x,y)$，利用上面的面积积分，计算定理 4.3.4 中的导数，证明 f 是调和的. 见[CH53].

可是大多数情况下，当极小曲面与平面相差比较大时，它的图像与一个真正的调和函数的图像相差很大. 当 4 阶微分不能忽略时，上述讨论就不成立. 肥皂泡不能很好地逼近调和函数的图像.

当曲面的参数方程是等温坐标(isothermal coordinate)时，极小曲面和调和函数之间存在一个很有趣的关系. 参数方程 $\mathbf{x}(u,v)$ 称为等温的(isothermal)，若 $E=G$，$F=0$. 由 4.7 节可知每个极小曲面都有等温坐标下的参数方程. 当使用等温坐标参数时，拉普拉斯算子 $\Delta\mathbf{x}=\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}$ 和平均曲率有着紧密联系. 回忆 3.4.3 的公式，对正交坐标系有下述公式：

$$\mathbf{x}_{uu}=\frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_u-\frac{E_v}{2G}\mathbf{x}_v+lU,$$

$$\mathbf{x}_{uv}=\frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_u+\frac{G_u}{2G}\mathbf{x}_v+mU,$$

$$\mathbf{x}_{vv}=-\frac{G_u}{2E}\mathbf{x}_u+\frac{G_v}{2G}\mathbf{x}_v+nU.$$

定理 4.5.6 如果坐标补片 $\mathbf{x}$ 是等温的，则 $\Delta\mathbf{x}\overset{\text{def}}{=}\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}=(2EH)U$.

证明 因为 $E=G$，$F=0$，所以

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}&=\left(\frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_u-\frac{E_v}{2G}\mathbf{x}_v+lU\right)+\left(-\frac{G_u}{2E}\mathbf{x}_u+\frac{G_v}{2G}\mathbf{x}_v+nU\right)\\&=\frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_u-\frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_v+lU-\frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_u+\frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_v+nU\\&=(l+n)U\\&=2E\left(\frac{l+n}{2E}\right)U.\end{aligned}$$

当 $E=G$，$F=0$ 时，由平均曲率公式

$$H=\frac{El+En}{2E^2}=\frac{l+n}{2E},$$ 195

所以 $\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}=(2EH)U$. ■

推论 4.5.7 设 M：$\mathbf{x}(u,v)=(x^1(u,v),x^2(u,v),x^3(u,v))$ 是等温坐标曲面，则它为极小曲面当且仅当 x^1，x^2，x^3 为调和函数.

证明 如果 M 极小，则 $H=0$，由前面定理知 $\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}=0$，所以 $\mathbf{x}$ 调和. 另一方面，假

设 x^1，x^2，x^3 为调和函数，则 $\boldsymbol{x}$ 调和．故 $\boldsymbol{x}_{uu}+\boldsymbol{x}_{vv}=0$．由前面定理知 $(2EH)U=0$．U 是单位法向量，$E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v\neq 0$，则 $H=0$，从而 M 极小． ■

这一结论将在下面几节极小曲面的讨论中起主要作用．实际上，它把极小曲面的几何理论和复分析中的常见方法很好地联系在一起．更多讨论见[Opr00]，还有一些很好的参考书，如[Nit89，DHKW92，Oss86，Boy59，Tho92，HT52，Ise92]．特别地，[Nit89，Introduction]和[HT85]中提供了极小曲面的历史、发展、计算及它在科学、工程和建筑上的应用．现在回到极小曲面和复分析的联系中来，首先回顾复变量中的一些概念．

4.6 复变量

在上一节的结尾提到了极小曲面与复分析之间存在着密切联系．首先介绍一些复变量的基础知识，它也是上述关系的基础．

令 i 表示 $\sqrt{-1}$，$\mathbb{C}=\{z=x+\mathrm{i}y\mid x,\ y\in\mathbb{R}\}$ 表述复区域．函数 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 在 z_0 点连续，如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$．若对开集 D 中任意点 z_0 都成立，则称 f 在 D 内连续．函数 f 在 $z_0\in\mathbb{C}$ 复可微，如果

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在．此时，用 $f'(z_0)$ 表示该极限．若对开集 D 中任意点 $z_0\in D$ 上述极限都存在，则称 f 在 D 内是解析的(analytic)或全纯的(holomorphic)．注意，虽然这一定义类似于通常的单变量微分定义，但它更强，因为 z 可以从任意方向沿任意路径接近 z_0．这一点会给我们带来方便．总之，因为 f 的值域为 $\mathbb{C}$，可令 $f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=\phi(x,\ y)+\mathrm{i}\psi(x,\ y)$，其中 ϕ 和 ψ 为两个实变量 x，y 的实值函数．函数 ϕ 为 f 的实部(real part)，ψ 为 f 的虚部(imaginary part)．现在假
196 设上述极限存在，计算 $z=\mathrm{i}y\to z_0=\mathrm{i}y_0$ 这一特殊情形．

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to y_0}\frac{\phi(x_0,y)+\mathrm{i}\psi(x_0,y)-[\phi(x_0,y_0)+\mathrm{i}\psi(x_0,y_0)]}{\mathrm{i}(y-y_0)}\\
&=\lim_{y\to y_0}\frac{\phi(x_0,y)-\phi(x_0,y_0)+\mathrm{i}\psi(x_0,y)-\mathrm{i}\psi(x_0,y_0)}{\mathrm{i}(y-y_0)}\\
&=\lim_{y\to y_0}\frac{\phi(x_0,y)-\phi(x_0,y_0)}{\mathrm{i}(y-y_0)}+\frac{\mathrm{i}\psi(x_0,y)-\mathrm{i}\psi(x_0,y_0)}{\mathrm{i}(y-y_0)}\\
&=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\\
&=\frac{\partial\psi}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial\phi}{\partial y}.
\end{aligned}$$

练习 4.6.1 证明当 $z=x\to z_0=x_0$ 时，极限为 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$.

当然，若 f 在 z_0 可微，则它的两个极限都等于 $f'(z_0)$，故

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

这就是柯西-黎曼方程. 事实上，上述的分析过程可以用来证明 f 在 D 上是全纯的当且仅当 $\frac{\partial\phi}{\partial x}$，$\frac{\partial\phi}{\partial y}$，$\frac{\partial\psi}{\partial x}$，$\frac{\partial\psi}{\partial y}$存在且在 D 上连续，以及使得柯西-黎曼方程成立. 注意这里并没有证明，若 f 是全纯的，则 f 的任意阶导数 f'，f''，…都存在.

练习 4.6.2 证明 $f(z)=z^2$ 为全纯的，且直接由极限和柯西-黎曼方程计算 $f'(z)$.

练习 4.6.3 $z=x+\mathrm{i}y$ 的复共轭为$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 证明 $f(z)=\bar{z}$不是全纯的.

练习 4.6.4 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模(modulus) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$. 若 $f(z)=u+\mathrm{i}v$，$\bar{f}(z)=u-\mathrm{i}v$，则 $|f|=\sqrt{u^2+v^2}=\sqrt{f\bar{f}}$. 证明全纯函数 f 的模 $|f|$ 为常值，则 f 本身为常值.

假设 f 是全纯的，因为混合导数相等，所以由柯西-黎曼方程可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\\&=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}\\&=0.\end{aligned}$$

故 ϕ 和(类似地) ψ 满足拉普拉斯方程 $\Delta\eta=0\left(\text{其中 }\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$，所以它们是调和函数. 反 197
之，若 ϕ 是 x，y 的二阶可微的调和函数，则在同一开集上存在另一个调和函数 ψ，使得 $f=\phi+i\psi$为全纯的. 这样的调和函数 ϕ 和 ψ 称为共轭调和(harmonic conjugates). 从现在开始，为方便起见，记号 ϕ_x 表示对 x 的偏导数.

练习 4.6.5 设 $\phi=x^2-y^2$，用如下方式找出它的共轭调和函数. 由柯西-黎曼方程 $\phi_x=\psi_y$，故 ϕ_x 对 y 积分得到只含有 x 的函数 ψ，再利用 $\phi_y=-\psi_x$ 确定函数. 结果令人诧异吗?

通过计算通常向量的线积分可得复变函数的积分. 假设 $f=\phi+\mathrm{i}\psi$ 连续，$\gamma(t)$: $[a, b]\to\mathbb{C}$ 为曲线. 定义 f 沿 γ 的积分为

$$\int_\gamma f=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

练习 4.6.6 证明$\int_\gamma f=\int_\gamma\phi(x,y)\mathrm{d}x-\psi(x,y)\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_\gamma\phi(x,y)\mathrm{d}y+\psi(x,y)\mathrm{d}x$，其中右边的积分为实变量的线积分.

练习 4.6.7 假设 f 是全纯的，且在闭曲线 γ 上和其内部连续可导. 对练习 4.6.6 中的每个积分应用格林定理，证明$\int_\gamma f=0$. 这就是柯西定理. 由此证明全纯函数的积分仅依赖于端点而与积分路径的选择无关.

对我们来说最重要的就是记住复积分的微积分基本定理. 即若 f 是全纯的，则

$$\int_\gamma f'=f(b)-f(a).$$

因此许多通常的微积分公式在复分析中也成立.

为了以后的方便，我们考虑复坐标下的坐标补片 $x(u, v)$，记 $z=u+\mathrm{i}v$，$\bar{z}=u-\mathrm{i}v$，引入下述复偏导记号

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

这种记号的好处在于可以很简单地判断 f 是不是全纯的.

198 **练习 4.6.8** 证明 f 是全纯的当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$.

练习 4.6.9 证明

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} f_{uu}+f_{vv}=4\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)\right).$$

4.7 等温坐标

如 4.5 节所见，要把复分析应用于极小曲面理论，就必须证明极小曲面上等温坐标的存在性. 回忆坐标补片 $\mathbf{x}(u,v)$ 是等温的，如果 $E=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=G$，$F=0$. 事实上，所有的曲面都存在等温坐标，当然这一证明比下面给出的(见 Osserman[Oss86])极小曲面的情形困难很多.

定理 4.7.1 *任意极小曲面 $M\subseteq\mathbb{R}^3$ 存在等温坐标.*

证明 固定点 $m\in M$，选择 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标系使得 m 是原点，M 的切平面 T_mM 是 xy 平面，且在 m 附近 M 是函数 $z=f(x,y)$ 的图像. 由商以及链式法则，得

$$\left(\frac{1+f_x^2}{w}\right)_y-\left(\frac{f_xf_y}{w}\right)_x=-\frac{f_y}{w^3}[f_{xx}(1+f_y^2)-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}(1+f_x^2)]$$

$$\left(\frac{1+f_y^2}{w}\right)_x-\left(\frac{f_xf_y}{w}\right)_y=-\frac{f_x}{w^3}[f_{xx}(1+f_y^2)-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}(1+f_x^2)],$$

其中 $w=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$. 通常(且方便)记 $p=f_x$，$q=f_y$. 因为 M 极小，f 满足极小曲面方程

$$f_{xx}(1+f_y^2)-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}(1+f_x^2)=0,$$

故有 $\left(\frac{1+p^2}{w}\right)_y-\left(\frac{pq}{w}\right)_x=0$ 和 $\left(\frac{1+q^2}{w}\right)_x-\left(\frac{pq}{w}\right)_y=0$. 定义 xy 平面上的两个向量场

$$V=\left(\frac{1+p^2}{w},\frac{pq}{w}\right)\quad\text{和}\quad W=\left(\frac{pq}{w},\frac{1+q^2}{w}\right),$$

对任意包含在单连通区域 $\mathcal{R}$ 上的闭合曲线 C 应用格林定理，得

$$\int_C V=\iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{pq}{w}\right)_x-\left(\frac{1+p^2}{w}\right)_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\int_C W=\iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{1+q^2}{w}\right)_x-\left(\frac{pq}{w}\right)_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

因为 $\mathcal{R}$ 内所有闭合曲线的线积分为 0，所以 V，W 必然有位势函数(见[MT88]). 即存在 μ，ρ
199 满足 $\mathrm{grad}(\mu)=V$，$\mathrm{grad}(\rho)=W$(避免与共变微商产生混淆，用"grad"表示梯度). 从所考虑的坐标来看，这些方程说明 $\mu_x=\frac{1+p^2}{w}$，$\mu_y=\frac{pq}{w}$，$\rho_x=\frac{pq}{w}$，$\rho_y=\frac{1+q^2}{w}$. 由

$$T(x,y)=(x+\mu(x,y),y+\rho(x,y))$$

定义映射 $T:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^2$.

这一映射的雅可比矩阵为

$$J(T)=\begin{bmatrix}1+\mu_x & \mu_y\\ \rho_x & 1+\rho_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\dfrac{1+p^2}{w} & \dfrac{pq}{w}\\ \dfrac{pq}{w} & 1+\dfrac{1+q^2}{w}\end{bmatrix},$$

此矩阵的行列式 $\det J(T)=\dfrac{(1+w)^2}{w}>0$. 由反函数定理，在 $m=(0,0)$附近存在光滑的反函数 $T^{-1}(u,v)=(x,y)$，且

$$J(T^{-1})=J(T)^{-1}=\frac{1}{\det J(T)}\begin{bmatrix}1+\dfrac{1+q^2}{w} & -\dfrac{pq}{w}\\ -\dfrac{pq}{w} & 1+\dfrac{1+p^2}{w}\end{bmatrix}=\frac{1}{(1+w)^2}\begin{bmatrix}w+1+q^2 & -pq\\ -pq & w+1+p^2\end{bmatrix}.$$

由雅可比矩阵的定义，最后一个矩阵即为

$$\begin{bmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{bmatrix}.$$

我们将利用上述计算证明下面的坐标补片(在上面描述的 uv 坐标下)

$$\mathbf{x}(u,v)\stackrel{\text{def}}{=}(x(u,v),y(u,v),f(x(u,v),y(u,v)))$$

为等温的. 首先计算

$$\mathbf{x}_u=\left(\frac{w+1+q^2}{(1+w)^2},\frac{-pq}{(1+w)^2},p\left(\frac{w+1+q^2}{(1+w)^2}\right)+q\left(\frac{-pq}{(1+w)^2}\right)\right)$$

和

$$\begin{aligned}E&=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u\\&=\frac{1}{(1+w)^4}[(w+1+q^2)^2+p^2q^2+p^2(w+1+q^2)^2\\&\quad-2p^2q^2(w+1+q^2)+p^2q^4]\\&=\frac{1}{(1+w)^4}[(1+w)^2(1+q^2+p^2)]\\&=\frac{w^2}{(1+w)^2}.\end{aligned}$$

■

练习 4.7.2 通过计算

$$\mathbf{x}_v=\left(\frac{-pq}{(1+w)^2},\frac{w+1+p^2}{(1+w)^2},p\left(\frac{-pq}{(1+w)^2}\right)+q\left(\frac{w+1+p^2}{(1+w)^2}\right)\right)$$

证明 $G=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=E$，$F=0$. 因此，坐标补片 $\mathbf{x}(u,v)$是等温的. 200

练习 4.7.3 若 M：$\mathbf{x}(u,v)$是等温参数的曲面，证明平均曲率公式可以化简为 $H=\dfrac{l+n}{2E}$. 所以若 M 极小，则 $l=-n$.

4.8 Weierstrass-Enneper 表示

从现在开始若无特别声明，极小曲面 M 都用等温坐标补片 $\mathbf{x}(u,v)$表示. 令 $z=u+\mathrm{i}v$ 表示对应的复坐标. 回忆$\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial u}-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial v}\right)$. 因为 $u=\dfrac{z+\bar z}{2}$，$v=\dfrac{-\mathrm{i}(z-\bar z)}{2}$，可记

$$\boldsymbol{x}(z,\bar{z}) = (x^1(z,\bar{z}),x^2(z,\bar{z}),x^3(z,\bar{z})).$$

将 $x^i(z,\bar{z})$看作是恰好取到实值的复变量函数，我们有$\frac{\partial x^i}{\partial z}=\frac{1}{2}(x_u^i-\mathrm{i}x_v^i)$，定义

$$\phi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial z} = (x_z^1,x_z^2,x_z^3).$$

为了更精确地研究 ϕ，我们采用下面记号：$(\phi)^2=(x_z^1)^2+(x_z^2)^2+(x_z^3)^2$，$|\phi|^2=|x_z^1|^2+|x_z^3|^2+|x_z^3|^2$，其中$|z|=\sqrt{u^2+v^2}$为 z 的模．首先注意$(x_z^i)^2=\frac{1}{4}((x_u^i)^2-(x_v^i)^2-2\mathrm{i}x_u^ix_v^i)$，因为 $\boldsymbol{x}(u,v)$为等温的，所以

$$\begin{aligned}(\phi)^2 &=\frac{1}{4}\Big(\sum_{j=1}^{1}(x_u^i)^2-\sum_{j=1}^{3}(x_v^i)^2-2\mathrm{i}\sum_{j=1}^{3}x_u^ix_v^i\Big)\\ &=\frac{1}{4}(|\boldsymbol{x}_u|^2-|\boldsymbol{x}_v|^2-2\mathrm{i}\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v)\\ &=\frac{1}{4}(E-G-2\mathrm{i}F)\\ &=0.\end{aligned}$$

通过比较实部和虚部可见反过来也是对的．即，若有$(\phi)^2=0$，则该坐标补片必为等温的．

练习 4.8.1 证明$|\phi|^2=\frac{E}{2}\neq 0$.

最后，因为 $\boldsymbol{x}$ 等温，所以$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial z}\Big)=\frac{1}{4}\Delta\boldsymbol{x}=0$，从而每个 $\phi^i=\frac{\partial x^i}{\partial z}$是全纯的．反之，同样的计算表明，若每个 ϕ^i 全纯，则每个 x^i 调和，因此 M 极小．综上所述可得下列定理．

定理 4.8.2 *假设 $\boldsymbol{x}$ 是 M 的坐标补片．令 $\phi=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial z}$且假设$(\phi)^2=0$(即 $\boldsymbol{x}$ 等温)，则 M 极小当*
201 *且仅当每个ϕ^i 全纯．*

若每个 ϕ^i 全纯时称ϕ 全纯．上述结果表明，对于任意的极小曲面，在任意点的附近都可以由满足$(\phi)^2=0$ 的三元全纯函数 $\phi=(\phi^1,\phi^2,\phi^3)$表示．此时可以通过下面的公式构造极小曲面的等温坐标补片．

推论 4.8.3 $x^i(z,\bar{z})=c_i+2\mathrm{Re}\int\phi^i\mathrm{d}z.$

证明 因为 $z=u+\mathrm{i}v$，记 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}u+\mathrm{i}\mathrm{d}v$(这是"微分"$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$的简写)，则

$$\phi^i\mathrm{d}z=\frac{1}{2}[(x_u^i-\mathrm{i}x_v^i)(\mathrm{d}u+\mathrm{i}\mathrm{d}v)]=\frac{1}{2}[x_u^i\mathrm{d}u+x_v^i\mathrm{d}v+\mathrm{i}(x_u^i\mathrm{d}v-x_v^i\mathrm{d}u)],$$

$$\bar{\phi}^i\mathrm{d}\bar{z}=\frac{1}{2}[(x_u^i+\mathrm{i}x_v^i)(\mathrm{d}u-\mathrm{i}\mathrm{d}v)]=\frac{1}{2}[x_u^i\mathrm{d}u+x_v^i\mathrm{d}v-\mathrm{i}(x_u^i\mathrm{d}v-x_v^i\mathrm{d}u)].$$

那么 $\mathrm{d}x^i=\frac{\partial x^i}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial x^i}{\partial\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}=\phi^i\mathrm{d}z+\bar{\phi}^i\mathrm{d}\bar{z}=2\mathrm{Re}\phi\mathrm{d}z$，积分可得 x^i． ■

由此，构造极小曲面问题就归结于求满足$(\phi)^2=0$ 的函数 $\phi=(\phi^1,\phi^2,\phi^2)$．构造这样一个$\phi$ 的好方法是：取全纯函数 f 和亚纯(meromorphic)函数 g(使得 fg^2 全纯)，令

$$\phi^1=\frac{1}{2}f(1-g^2),\quad \phi^2=\frac{\mathrm{i}}{2}f(1+g^2),\quad \phi^3=fg.$$

练习 4.8.4 证明上述 ϕ 满足 $(\phi)^2=0$.

练习 4.8.5 证明 $g=\frac{\phi^3}{\phi^1-\mathrm{i}\phi^2}$.

函数 g 是亚纯的，如果它所有的奇点都是极点. 即在每个奇点 z_0 周围都存在洛朗展开(广义的泰勒展开) $g(z)=\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\cdots+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j$，其中 n 为某一有限数，系数由 g 决定. 对我们而言，最重要的亚纯函数例子是有理函数 $g(z)=\mathcal{P}(z)\mathcal{Q}(z)$，其中 $\mathcal{P}$，$\mathcal{Q}$ 是多项式. 因此，可得

定理 4.8.6(Weierstrass-Enneper 表示 Ⅰ) *若 f 是 D 上的全纯函数，g 亚纯，fg^2 全纯，则 $x(z,\bar{z})=(x^1(z,\bar{z}),x^2(z,\bar{z}),x^3(z,\bar{z}))$ 定义了一个极小曲面，其中*

$$x^1(z,\bar{z})=\mathrm{Re}\int f(1-g^2)\mathrm{d}z$$

$$x^2(z,\bar{z})=\mathrm{Re}\int \mathrm{i}f(1+g^2)\mathrm{d}z$$

$$x^3(z,\bar{z})=\mathrm{Re}2\int fg\,\mathrm{d}z.$$ 202

在看例子之前，需要注意 Weierstrass-Enneper 表示的另一形式. 假设 g 是定义域 D 上的全纯函数，则反函数 g^{-1} 也全纯. 将 g 考虑为新的复变量 $\tau=g$，则 $\mathrm{d}\tau=g'\mathrm{d}z$. 定义 $F(\tau)=f/g'$，得 $F(\tau)\mathrm{d}\tau=f\mathrm{d}z$. 如果用 τ 代替 g，用 $F(\tau)\mathrm{d}\tau$ 代替 f，则有以下定理.

定理 4.8.7(Weierstrass-Enneper 表示 Ⅱ) *对于任意全纯函数 $F(\tau)$，$x(z,\bar{z})=(x^1(z,\bar{z}),x^2(z,\bar{z}),x^2(z,\bar{z}))$ 定义了一个极小曲面，其中*

$$x^1(z,\bar{z})=\mathrm{Re}\int(1-\tau^2)F(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$x^2(z,\bar{z})=\mathrm{Re}\int \mathrm{i}(1+\tau^2)F(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$x^3(z,\bar{z})=\mathrm{Re}2\int\tau F(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

注意相应地

$$\phi=\left(\frac{1}{2}(1-\tau^2)F(\tau),\frac{\mathrm{i}}{2}(1+\tau^2)F(\tau),\tau F(\tau)\right).$$

这一表示说明任意全纯函数 $F(\tau)$ 可以定义一个极小曲面. 当然不能苛求任意一个函数都能通过复积分给出一个很好的公式. 但是我们可以直接从极小曲面的表示中得出很多相关信息. 为了从表示的角度考察一些标准的极小曲面，首先回忆复分析中的基本函数. 为此记 $z=u+\mathrm{i}v$，定义

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^u(\cos v+\mathrm{i}\sin v)\quad 和\quad \log(z)=\ln\sqrt{u^2+v^2}+\mathrm{i}\arctan\left(\frac{v}{u}\right).$$

这里没有精确考察 log 函数的分支，这些技术性的工作并不是我们的重点. 利用 e^z 的定义，可

以定义

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}.$$

选择这一定义的原因之一是它可以拓展到同名的实函数．例如，若 $z=u$，$e^z=\sin z$，即实函数 $\sin u$．类似地，$z=u$，$\sinh z=\sinh u$．复函数也有和实函数相同的微分、积分、和、差公式，
[203] 将复函数展开为实部和虚部常常是有用的．为此，以 $u+iv$ 代替 z 而利用上述 e^z 的定义．

练习 4.8.8 推导下述公式：

(1) $\sin z=\sin u\cosh v+i\cos u\sinh v$.

(2) $\cos z=\cos u\cosh v+i\sin u\sinh v$.

(3) $\sinh z=\sinh u\cos v+i\cosh u\sin v$.

(4) $\cosh z=\cosh u\cos v+i\sinh u\sin v$.

例 4.8.9(悬链面) 设 $F(\tau)=\frac{1}{2\tau^2}$，$\tau=e^z$，则

$$\begin{aligned}x^1&=\mathrm{Re}\int(1-\tau^2)\frac{1}{2\tau^2}d\tau\\&=\mathrm{Re}\int\frac{1}{2\tau^2}-\frac{1}{2}d\tau\\&=-\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\tau}+\frac{\tau}{2}\right]\\&=-\mathrm{Re}\,\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}\\&=-\mathrm{Re}\cosh z\\&=-\cosh u\cos v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2&=\mathrm{Re}\,i\int(1+\tau^2)\frac{1}{2\tau^2}d\tau\\&=\mathrm{Re}\int i\left[\frac{1}{2\tau^2}+\frac{1}{2}\right]d\tau\\&=-\mathrm{Re}\,i\left[\frac{1}{2\tau}-\frac{\tau}{2}\right]\\&=\mathrm{Re}\,i\,\frac{-e^{-z}+e^{z}}{2}\\&=\mathrm{Re}\,i\sinh z\\&=-\cosh u\sin v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3&=\mathrm{Re}\,2\int\tau\frac{1}{2\tau^2}d\tau\\&=\mathrm{Re}\int\frac{1}{\tau}d\tau\\&=\mathrm{Re}\ln\tau\\&=\mathrm{Re}\,z\\&=u.\end{aligned}$$

由此得到(无负号)标准的悬链面的参数方程 $x(u,v)=(\cosh u\cos v,\ \cosh u\sin v,\ u)$.

练习 4.8.10 设 $F(\tau)=\frac{i}{2\tau^2}$．证明相应的表示为螺旋面．

练习 4.8.11 证明悬链面和螺旋面分别对应于 $(f,g)=\left(-\frac{e^{-z}}{2},\ -e^{z}\right)$，$(f,g)=\left(-i\frac{e^{-z}}{2},\ -e^{z}\right)$ 的表示．

练习 4.8.12 证明螺旋面有另一种表示 $(f,g)=\left(-\frac{i}{2},\ \frac{1}{z}\right)$．这种表示看起来比上述两
[204] 种简单，但有点问题，即表示的积分依赖于路径．它们被称为有实周期(real period)．证明若沿整个单位圆对 x^3(上述表示的)积分，可得实周期为 2π．为了修正这种二义性，取更小的定义域 $\mathbb{C}/\{0\cup\mathbb{R}^-\}$．从这一表示中可以得到螺旋面的一圈，其他圈类似可得．将它们整合到一起，就建立了整个曲面．因此，$(f,g)=\left(-\frac{i}{2},\ \frac{1}{z}\right)$ 这一简约表示的精妙之处建立于复积分的基础之上．

练习 4.8.13 设 $F(\tau)=\mathrm{i}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau^3}\right)$，证明相应的表示是卡塔兰曲面

$$x(u,v)=\left(u-\sin u\cosh v, 1-\cos u\cosh v, 4\sin\frac{u}{2}\sinh\frac{v}{2}\right).$$

提示：先积分，后用 $e^{-iz/2}$ 代替 τ，并使用 $\sin z$ 的展开式.

练习 4.8.14 证明对应于函数 $F(\tau)=1-\frac{1}{\tau^4}$ 的表示是 Henneberg 曲面

$$x(u,v)=\left(2\sinh u\cos v-\frac{2}{3}\sinh 3u\cos 3v, 2\sinh u\sin v+\frac{2}{3}\sinh 3u\sin 3v, 2\cosh 2u\cos 2v\right).$$

令 $v=\frac{\pi}{2}$，证明由此得到尼尔抛物线 $(z-2)^3=9x^2$. 提示：对于第一部分积分之后用 e^t 代替 τ，并利用 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的展开，以 $-y$ 替换 y.

练习 4.8.15 设 $F(\tau)=1$（或等价地 $(f, g)=(1, z)$），证明 Weierstrass-Enneper 表示给出 Enneper 曲面. 若 $(f, g)=(1, z^n)$，则可得到 n 阶 Enneper 曲面. 对于 2 阶 Enneper 曲面，计算 $x(u, v)$. 提示：利用 Maple.

练习 4.8.16 设 $(f, g)=\left(z^2, \frac{1}{z^2}\right)$，计算由 Weierstrass-Enneper 表示确定的 $x(u, v)$. 这一曲面称为 Richmond 曲面.

练习 4.8.17 设 $F(\tau)=\frac{2}{1-\tau^4}$，证明 Weierstrass-Enneper 表示给出 Scherk 曲面 $z=\ln\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$. 提示：(1)对 x^1 求偏导，得 $\int\frac{2}{1+\tau^2}d\tau=\mathrm{i}\log(1-\mathrm{i}\tau)-\mathrm{i}\log(1+\mathrm{i}\tau)$；(2)因为 log 乘以 i 且我们只需要实部，由 $\log(z)$ 定义得到 $x^1=\arctan\left(\frac{u}{1-v}\right)-\arctan\left(\frac{-u}{1+v}\right)$（即 $1+\mathrm{i}\tau=1-v+\mathrm{i}u$，$1-\mathrm{i}\tau=1+v-\mathrm{i}u$）；(3)利用两角差的正切公式，得 $x^1=\arctan\left(\frac{2u}{1-(u^2+v^2)}\right)$；(4)类似有 $x^2=$ 205
$\arctan\left(\frac{-2v}{1-(u^2+v^2)}\right)$；(5) $x^2=\mathrm{Re}(\log(\tau^2+1)-\log(\tau^2-1))=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(u^2-v^2+1)^2+4u^2v^2}{(u^2-v^2-1)^2+4u^2v^2}\right)$；(6)画出相应的直角三角形，用 u, v 表示 $\cos x^2$, $\cos x^3$，证明 $x^3=\ln\left(\frac{\cos x^3}{\cos x^1}\right)$. 注意到积分有实周期，就像螺旋面一样，所以只需计算一个周期就可得到整个曲面.

我们已经看到 Weierstrass-Enneper 表示给出了极小曲面的一个标准描述，当我们意识到可以直接通过表示函数 (f, g) 和 $F(\tau)$ 分析极小曲面许多方面的性质时，极小曲面的真值就变得显而易见了. 特别地，这甚至也可应用到 Weierstrass-Enneper 积分不可计算的曲面上. 作为例子，计算由 $F(\tau)$ 确定的极小曲面的高斯曲率 K. 首先，注意等温参数下的高斯曲率为

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right)$$
$$=-\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{E}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{E_u}{E}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\ln E+\frac{\partial^2}{\partial u^2}\ln E\right)$$
$$=-\frac{1}{2E}\Delta(\ln E),$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子 $\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}$. 由练习 4.8.1 知 $E=2|\phi|^2$, 此处 $\phi=\left(\frac{1}{2}(1-\tau^2)F(\tau),\ \frac{i}{2}(1+\tau^2)F(\tau),\ \tau F(\tau)\right)$, 因此

$$E=2\left[\left|\frac{1}{2}(1-\tau^2)F(\tau)\right|^2+\left|\frac{i}{2}(1+\tau^2)F(\tau)\right|^2+|\tau F(\tau)|^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}|F|^2[|\tau^2-1|^2+|\tau^2+1|^2+4|\tau|^2].$$

又 $\tau^2=u^2-v^2+2iuv$, 故 $|\tau^2-1|^2=(u^2-v^2-1)^2+4u^2v^2$. 类似地, $|\tau^2+1|^2=(u^2-v^2+1)^2+4u^2v^2$, $4|\tau|^2=4(u^2+v^2)$, 则

$$E=\frac{1}{2}|F|^2 2[(u^2-v^2)^2+1+4u^2v^2+2u^2+2v^2].$$
$$=|F|^2[u^4+2u^2v^2+v^4+1+2u^2+2v^2]$$
$$=|F|^2[1+u^2+v^2]^2.$$

206 **练习 4.8.18** 根据 (f, g) 的表示, 直接由 ϕ 的定义证明 $E=|f|^2(1+|g|^2)^2$.

$\ln E=\ln|F|^2+2\ln(1+u^2+v^2)$, 容易证明下面结果.

练习 4.8.19 证明 $\Delta(2\ln(1+u^2+v^2))=\frac{8}{(1+u^2+v^2)^2}$.

现在必须计算 $\Delta(\ln|F|^2)=\Delta(\ln F\bar{F})=\Delta(\ln F+\ln\bar{F})$. 前面我们已经看到 $\Delta=4\partial^2/\partial\bar{z}\partial z$. 进一步, 因为 F 是全纯的, $\bar{F}$ 不是, 故 $\partial\bar{F}/\partial z=0$. 从而 $\partial\ln\bar{F}/\partial z=0$. 因为 F, F' 全纯, 所以左边 $\Delta(\ln F)=4\partial^2\ln F/\partial\bar{z}\partial z=4\partial(F'/F)/\partial\bar{z}=0$, 进而 F'/F 全纯. 因此 $\Delta(\ln|F|^2)=0$, $\Delta(\ln E)=8/(1+u^2+v^2)^2$.

定理 4.8.20 *由 Weierstrass-Enneper 表示 II 决定的极小曲面的高斯曲率为*

$$K=\frac{-4}{|F|^2(1+u^2+v^2)^4}.$$

证明 由上面的计算

$$K=-\frac{1}{2E}\Delta(\ln E)$$
$$=\frac{-8}{2|F|^2(1+u^2+v^2)^4}$$
$$=\frac{-4}{|F|^2(1+u^2+v^2)^4}.$$ ■

练习 4.8.21 根据 Weierstrass-Enneper 表示 I, 利用 $F=\frac{f}{g'}$ 导出 $K=\frac{-4|g'|^2}{|f|^2(1+|g|^2)^4}$.

练习 4.8.22 解释两个 K 公式的明显区别. 即在第一个公式中不允许 $K=0$, 而第二个公式当 $g'=0$ 时, $K=0$. 提示: 当从 Weierstrass-Enneper I 变换到 Weierstrass-Enneper II 时对

于 g 的假设是什么?

练习 4.8.23 回忆一点为脐点如果在这点的两个主曲率相等. 证明相应于表示(f, g)的极小曲面上的脐点对应于g'的零点. 所以, 极小曲面上的脐点是平坦的.

练习 4.8.24 由(f, g)或$F(\tau)$描述的极小曲面有极小曲面的相伴族(associated family)(分别为)$(e^{it}f, g)$或$e^{it}F(\tau)$. 这一族中由t_0, t_1决定的两个曲面称为伴随的(adjoint), 如果$t_1-t_0=\frac{\pi}{2}$. 证明相伴族中的所有曲面都是局部等距的. 提示: (1)由等温坐标足以说明无论t怎么变, E保持不变; (2)对任意t, $|e^{it}|=1$. 207

练习 4.8.25 $(f, g)=\left(-\frac{e^{-\tau}}{2}, -e^{-\tau}\right)$为悬链面的一个表示. 写出它的相伴族和伴随曲面$x(u, v)$.

练习 4.8.26 找出由$F(\tau)=-i\left(1-\frac{1}{\tau^4}\right)$决定的 Henneberg 曲面的伴随曲面. 设$u=0$, 证明$v$-曲线为星形线$x^{2/3}+y^{2/3}=(8/3)^{2/3}$. 这条星形线是测地线.

迄今为止, 比起几何, 我们更多的是从代数和分析的观点来处理 Weierstrass-Enneper 表示. 但是毕竟我们感兴趣的是极小曲面的几何性质, 因此将上述讨论和通常的微分几何结构联系起来才是合理的. 为此, 回忆第 2 章曲面M: $x(u, v)$的高斯映射G: $M\to S^2$是从这一曲面到单位球面S^2的映射, 且$G(p)=U_p$. 其中U_p是M在p点的单位法向量, 用参数表示可以写成$G(x(u, v))=U(u, v)$. 对于M的一小片, 可以认为$U(u, v)$是球面S^2的参数方程. 同样, 由$G_*(x_u)=U_u=-S(x_u)$, $G_*(x_v)=U_v=-S(x_v)$给出了切平面对于基$\{x_u, x_v\}$的诱导线性变换. 以参数形式(用相同的参数u, v)给出的曲面映射I: $M\to N$, $I(x(u, v))=y(u, v)$是共形映射(conformal map), 如果

$$E_x = \lambda(u,v)^2 E_y = \lambda(u,v)^2 I_*(x_u)\cdot I_*(x_u)$$
$$F_x = \lambda(u,v)^2 F_y = \lambda(u,v)^2 I_*(x_u)\cdot I_*(x_v)$$
$$G_x = \lambda(u,v)^2 G_y = \lambda(u,v)^2 I_*(x_v)\cdot I_*(x_v).$$

函数$\lambda(u, v)$称为比例因子(scaling factor). 等价地如同下面所做. 也可以仅仅利用长度$|x_u|$和$|x_v|$证明上述等式. 若每点$p\in M$和它的像$I(p)\in N$的度量成比例, 则I就是共形的. 我们将在 5.5 节更加广泛地研究这一概念.

练习 4.8.27 考虑曲面M: $x(u, v)\subseteq\mathbb{R}^3$的高斯映射: $G(x(u, v))=U(u, v)$, 其中U是M的单位法向量. 证明螺旋面$x(u, v)=(u\cos v, u\sin v, v)$、悬链面$x(u, v)=(\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, u)$和 Enneper 曲面$x(u, v)=(u-u^3/3+uv^2, -v+v^3/3-vu^2, u^2-v^2)$的高斯映射都是共形映射, 比例因子分别为$\lambda(u, v)=1+u^2$, $\cosh^2 u$, $(1+u^2+v^2)^2/2$.

事实上, 有更一般的结论. 在练习 4.8.30 中可以看到这个结果从几何上刻画了极小曲面和球面的特征. 208

命题 4.8.28 *M: $x(u, v)$是参数为等温坐标的极小曲面, 则M的高斯映射为共形映射.*

证明 为证G共形, 只需证明比例系数$\rho(u, v)$满足$|G_*(x_u)|=\rho(u, v)|x_u|$, $|G_*(x_v)|=\rho(u, v)|x_v|$, $G_*(x_u)\cdot G_*(x_v)=\rho^2(u, v)x_u\cdot x_v$. 因为等温坐标有$E=G$, $F=0$,

所以

$$G_*(x_u)=U_u=-\frac{l}{E}x_u-\frac{m}{E}x_v,\quad G_*(x_v)=U_v=-\frac{m}{E}x_u-\frac{n}{E}x_v,$$

其中利用了 U_u 和 U_v 的公式 3.4.3. 取点积，得

$$|U_u|^2=\frac{1}{E}[l^2+m^2],\quad |U_v|^2=\frac{1}{E}[m^2+n^2]$$

$$U_u\cdot U_v=\frac{m}{E}[l+n].$$

根据练习 4.7.3 知 $l=-n$，于是

$$|U_u|^2=\frac{1}{E}[l^2+m^2]=|U_v|^2\quad 和\quad U_u\cdot U_v=0.$$

因为 $|x_u|=\sqrt{E}=|x_v|$，$x_u\cdot x_v=0$，所以高斯映射 G 是共形因子为 $\sqrt{l^2+m^2}/E$ 的共形映射.

■

练习 4.8.29 证明共形因子 $\sqrt{l^2+m^2}/E$ 等于 $\sqrt{|K|}$，其中 K 是高斯曲率.

练习 4.8.30 假设 M：$x(u, v)$ 是高斯映射 G：$M\to S^2$ 为共形映射的曲面. 证明 M 为球面(的一部分)或极小曲面. 为简便起见，假设坐标补片 $x(u, v)$ 是正交的(不必等温).

练习 4.8.31 证明非平面的极小曲面 M：$x(u, v)$ 无常高斯曲率. 提示：(1)如果有，则定义 $\widetilde{M}$：$y(u, v)=\sqrt{|K|}x(u, v)$. 可证明 $\widetilde{M}$ 和 M 有相同的单位法向量，且高斯曲率恒为 -1；(2)证明 $\widetilde{M}$ 的高斯映射是局部等距的；(3)为什么出现矛盾?

北极点的球极平面射影 St：$S^2/\{N\}\to\mathbb{R}^2$ *定义为*：

$$\mathrm{St}(\cos u\cos v,\sin u\cos v,\sin v)=\left(\frac{\cos u\cos v}{1-\sin v},\frac{\sin u\cos v}{1-\sin v},0\right).$$

它是这样得到的：作一条经过北极和球面上点的直线，它与 $\mathbb{R}^2$ 交于某一点. 在第 5 章中将看
209 到，球极平面射影是共形因子为 $1/(1-\sin v)$ 的共形映射. 在笛卡儿坐标中，球极平面映射可以简化为 $\mathrm{St}(x, y, z)=(x/(1-z), y/(1-z), 0)$. 可将 $\mathbb{R}^2$ 和 C 等同. 把映射 St 延拓为一一的到上的映射 St：$S^2\to C\cup\{\infty\}$，其中北极映到 ∞. 利用这些等同关系，得

定理 4.8.32 *设 M：$x(u, v$ 为 Weierstrass-Enneper 表示(f, g)决定的等温坐标下的极小曲面，则 M 的高斯映射 G：$M\to C\cup\{\infty\}$ 就是亚纯函数 g.*

证明 这一证明是一个很长的计算，其中涉及所有复分析成分. 回忆 $\phi=\frac{\partial x}{\partial z}$，$\bar{\phi}=\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}$ 且

$$\phi^1=\frac{1}{2}f(1-g^2)\quad \phi^2=\frac{\mathrm{i}}{2}f(1+g^2)\quad \phi^3=fg.$$

我们将用 ϕ^1，ϕ^2，ϕ^3 描述高斯映射. 首先记 $x_u\times x_v=((x_u\times x_v)^1, (x_u\times x_v)^2, (x_u\times x_v)^3)=(x_u^2x_v^3-x_u^3x_v^2, x_u^3x_v^1-x_u^1x_v^3, x_u^1x_v^2-x_u^2x_v^1)$. 考虑第一个分量 $(x_u\times x_v)^1=x_u^2x_v^3-x_u^2x_v^2$，有

$$\begin{aligned}x_u^2x_v^3-x_u^2x_v^2&=\mathrm{Im}[(x_u^2-\mathrm{i}x_v^2)(x_u^3+\mathrm{i}x_v^3)]\\&=\mathrm{Im}[2(\partial x^2/\partial z)\cdot 2(\partial x^3/\partial \bar{z})]\\&=4\mathrm{Im}(\phi^3\bar{\phi}^3).\end{aligned}$$

同理 $(x_u\times x_v)^2=4\mathrm{Im}(\phi^3\bar{\phi}^1)$，$(x_u\times x_v)^3=4\mathrm{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)$，所以

$$x_u\times x_v=4\mathrm{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3,\phi^2\bar{\phi}^1,\phi^1\bar{\phi}^2)=2(\phi\times\bar{\phi}),$$

其中最后一个等式成立是因为 $z-\bar{z}=2\mathrm{Im}z$. 因为 $x(u,v)$ 等温，所以 $|x_u\times x_v|=|x_u|\cdot|x_v|=|x_v|^2=E=2|\phi|^2$. 因此，

$$U=\frac{x_u\times x_v}{|x_u\times x_v|}=\frac{2(\phi\times\bar{\phi})}{2|\phi|^2}=\frac{\phi\times\bar{\phi}}{|\phi|^2}.$$

现在计算高斯映射 $G: M\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，

$$\begin{aligned}G(x(u,v))&=\mathrm{St}(U(u,v))\\&=\mathrm{St}\left(\frac{\phi\times\bar{\phi}}{|\phi|^2}\right)\\&=\mathrm{St}\left(\frac{2\mathrm{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3,\phi^3\bar{\phi}^1,\phi^1\bar{\phi}^2)}{|\phi|^2}\right)\\&=\left(\frac{2\mathrm{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3)}{|\phi|^2-2\mathrm{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)},\frac{2\mathrm{Im}(\phi^2\bar{\phi}^1)}{|\phi|^2-2\mathrm{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)},0\right).\end{aligned}$$ [210]

因为

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-z}&=\frac{2\mathrm{Im}(\phi^3\bar{\phi}^3)}{|\phi|^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2\mathrm{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)}{|\phi|^2}}\\&=\frac{2\mathrm{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3)}{|\phi|^2}\cdot\frac{|\phi|^2}{|\phi|^2-2\mathrm{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)}\\&=\frac{2\mathrm{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3)}{|\phi|^2-2\mathrm{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)}\end{aligned}$$

及对 $y/(1-z)$ 类似计算的结果知最后的等式成立. 将 $(x, y)\in\mathbb{R}^2$ 和 $x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$ 等同，则

$$G(x(u,v))=\frac{2\mathrm{Im}(\phi^3\bar{\phi}^3)+2\mathrm{i}\mathrm{Im}(\phi^3\bar{\phi}^1)}{|\phi|^2-2\mathrm{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)}.$$

考虑这个分数的分子 $\mathcal{N}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}&=2\mathrm{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3)+2\mathrm{i}\mathrm{Im}(\phi^2\bar{\phi}^1)\\&=\frac{1}{\mathrm{i}}[\phi^3\bar{\phi}^3-\bar{\phi}^2\phi^3+\mathrm{i}\phi^3\bar{\phi}^1-\mathrm{i}\bar{\phi}^3\phi^1]\\&=\phi^2(\bar{\phi}^1+\mathrm{i}\bar{\phi}^2)-\bar{\phi}^3(\phi^1+\mathrm{i}\phi^2).\end{aligned}$$

且 $0=(\phi)^2=(\phi^1)^2+(\phi^2)^2+(\phi^3)^2=(\phi^1-\mathrm{i}\phi^2)(\phi^1+\mathrm{i}\phi^2)+(\phi^3)^2$，故

$$\phi^1+\mathrm{i}\phi^2=\frac{-(\phi^3)^2}{\phi^1-\mathrm{i}\phi^3}.$$

因此

$$\mathcal{N}=\phi^2(\bar{\phi}^1+\mathrm{i}\bar{\phi}^2)+\bar{\phi}^3\frac{(\phi^2)^2}{\phi^1-\mathrm{i}\phi^2}$$

$$=\frac{\phi^3[(\phi^1-\mathrm{i}\phi^2)(\bar{\phi}^1+\mathrm{i}\bar{\phi}^2)+|\phi^2|^2]}{\phi^1-\mathrm{i}\phi^3}$$

$$=\frac{\phi^2}{\phi^1-\mathrm{i}\phi^2}[|\phi^1|^2+|\phi^3|^2+|\phi^2|^2+\mathrm{i}(\bar{\phi}^2\phi^1-\phi^3\bar{\phi}^1)]$$

$$=\frac{\phi^3}{\phi^1-\mathrm{i}\phi^2}[|\phi|^2-2\mathrm{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)].$$

所以分子N的第二个因子与$G(x(u,\ v))$的分母相互抵消，最后有

$$G(x(u,v))=\frac{\phi^3}{\phi^1-\mathrm{i}\phi^2}.$$

根据练习 4.8.5 知，$g=\frac{\phi^2}{\phi^1-\mathrm{i}\phi^2}$，证毕. ■

211 利用 Weierstrass-Enneper 表示Ⅱ，我们看到高斯映射也可等同于复变量 τ.

练习 4.8.33 $p=x(u_0,\ v_0)$是高斯映射 G: $M\to\mathbb{C}\cup\infty$的极点，若 $G(p)=\infty$. 由球极平面映射的定义，p 是 G 的极点当且仅当 $U(p)=(0,\ 0,\ 1)$，即北极点. 要证明这点只需证明 $U(p)=(0,\ 0,\ 1)$当且仅当下述 G 的表达式中分母为零：

$$G(x(u,v))=\frac{2\mathrm{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3)+2\mathrm{i}\mathrm{Im}(\phi^3\bar{\phi}^1)}{|\phi|^2-2\mathrm{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)}.$$

练习 4.8.34 证明伯恩斯坦定理：若极小曲面 M：$z=f(x,\ y)$是定义在整个 xy 平面上的曲面，则 M 是平面. 提示：(1)在等温坐标存在性的证明中，如果参数的定义域为整个平面，则势函数 μ 和 ρ 也可延拓到整个平面. 映射 T 为 xy 平面和 uv 平面间的微分同胚(即光滑的一一的到上的映射且有光滑反函数). 所以可以假设 M 的参数的定义域为整个 uv 平面，其中 u，v 是等温坐标；(2)M 的法向量在半球上，旋转球而得到下半球面的法向量；(3)把 uv 平面看作复平面$\mathbb{C}$，考虑复合映射$\mathbb{C}\to M\xrightarrow{G}S^2/\{N\}\to\mathbb{C}$，为什么这个映射是全纯的？想想 g；(4)由复分析中的刘维尔定理，定义在整个复平面上的有界的全纯的复函数为常数.

4.9 Maple 和极小曲面

本节将说明如何用 Maple 绘制极小曲面，并且提示它们是微分方程的解.

4.9.1 极小曲面作图

先看标准的极小曲面. 练习 4.2.8 给出了一些极小曲面的实际图像，本书的前一些章节也介绍了其他的极小曲面. 下面列出曲面的参数方程，计算平均曲率(用第 3 章的“MK”程序)，用画图命令绘制曲面. 绘制曲面的程序留给读者自己完成.

```
> catenoid:=<u|cosh(u)*cos(v)|cosh(u)*sin(v)>;
```

$$catenoid := [u,\cosh(u)\cos(v),\cosh(u)\sin(v)]$$

212
```
> MK(catenoid);
```

$$0$$

```
> plot3d(catenoid,u=-1..1,v=0..2*Pi,shading=zhue,scaling =
constrained,orientation=[0,163],lightmodel=light3);
> helicoid:=<u*cos(v)|u*sin(v)|v>;
```

$$helicoid := [u\cos(v), u\sin(v), v]$$

```
> MK(helicoid);
```

$$0$$

```
> plot3d(helicoid,u=0..1.5,v=0..5*Pi,shading=xy,
orientation=[21,64],lightmodel=light3,grid=[10,60]);
> scherk1:=<u|v|ln(cos(v)/cos(u))>;
```

$$scherk1 := \left[u, v, \ln\left(\frac{\cos(v)}{\cos(u)}\right)\right]$$

```
> MK(scherk1);
```

$$0$$

```
> plot3d(scherk1,u=-1.57..1.57,v=-1.57..1.57,shading=xy,
lightmodel=light4,orientation=[51,66],grid=[20,20]);
> enneper:=<u-u^3/3+u*v^2|-v+v^3/3-v*u^2|u^2-v^2>;
```

$$enneper := \left[u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, -v + \frac{1}{3}v^3 - vu^2, u^2 - v^2\right]$$

```
> MK(enneper);
```

$$0$$

```
> plot3d(enneper,u=-2.2..2.2,v=-2.2..2.2,shading=zhue,
scaling=constrained,orientation=[94,42]);
> catsurf:=<u-sin(u)*cosh(v)|1-cos(u)*cosh(v)|4*sin(u/2)*
sinh(v/2)>;
```

$$catsurf := \left[u - \sin(u)\cosh(v), 1 - \cos(u)\cosh(v), 4\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sinh\left(\frac{v}{2}\right)\right]$$

下述命令说明了 Maple 化简能力的局限性．若用分号替换冒号，Maple 输出大量式子，不做哪怕是最简单的化简．无论如何卡塔兰曲面是极小曲面．

```
> MK(catsurf):
> plot3d(catsurf,u=0..4*Pi,v=-2.3..2.3,scaling=constrained,
shading=zhue,lightmodel=light3,grid=[50,15],orientation=
[-52,42]);
```

213

下列程序给出了图 4-4 所示的演变过程．“display”命令演示了从螺旋面到悬链曲面等距变形的过程．

```
> helcatplot := proc(t)
local X;
```

```
X := <cos(Pi*t)*sinh(v)*sin(u)+sin(Pi*t)*cosh(v)*cos(u)|
-cos(Pi*t)*sinh(v)*cos(u)+sin(Pi*t)*cosh(v)*sin(u)|
u*cos(Pi*t)+v*sin(Pi*t)>;
plot3d(X,u=0..2*Pi,v=-2..2,scaling=unconstrained,orientation
=[46,52],shading=zhue,grid=[25,12],lightmodel=light2);
end:
```

```
> display3d(seq(helcatplot(t/40),t=0..80),insequence=true);
```

4.9.2 极小曲面方程

现在我们来看利用 Maple 怎样得到极小曲面方程. 取参数化的蒙日片, 用"MK"计算它的平均曲率, 设分子为 0.

```
> f:=(x,y)->f(x,y);
```

$$f := f$$

```
> monge:=<u|v|f(u,v)>;
```

$$monge := [u, v, f(u,v)]$$

```
> MK(monge);
```

$$\frac{1}{2}\Bigg(\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}f(u,v)\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}f(u,v)\right)\left(\frac{\partial}{\partial v}f(u,v)\right)^2+\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}f(u,v)\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}f(u,v)\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}f(u,v)\right)^2-2\left(\frac{\partial}{\partial u}f(u,v)\right)\left(\frac{\partial}{\partial v}f(u,v)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\partial u}f(u,v)\right)\Bigg)\Bigg/\left(1+\left(\frac{\partial}{\partial u}f(u,v)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial v}f(u,v)\right)^2\right)^{(3/2)}$$

214
```
> factor(numer(MK(monge)))=0;
```

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}f(u,v)\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}f(u,v)\right)\left(\frac{\partial}{\partial v}f(u,v)\right)^2+\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}f(u,v)\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}f(u,v)\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}f(u,v)\right)^2-2\left(\frac{\partial}{\partial u}f(u,v)\right)\left(\frac{\partial}{\partial v}f(u,v)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\partial u}f(u,v)\right)=0$$

这就是极小曲简方程.

4.9.3 几何条件: 旋转极小曲面

从 Maple 的角度考虑 $H=0$ 的旋转曲面.

```
> h:=t->h(t);
```

$$h := h$$

```
> surfrev:=<u|h(u)*cos(v)|h(u)*sin(v)>;
```

$$surfrev := [u, h(u)\cos(v), h(u)\sin(v)]$$

用 MK 程序计算平均曲率.

```
> mean:=MK(surfrev);
```

$$mean := -\frac{1}{2}\frac{h(u)\left(\frac{d^2h(u)}{du^2}\right)-1-\left(\frac{dh(u)}{du}\right)^2}{h(u)\left(1+\left(\frac{dh(u)}{du}\right)^2\right)^{(3/2)}}$$

因为 $H=0$，令"mean"的分子为零．解这个微分方程．

```
> numer(mean)=0;
```

$$-h(u)\left(\frac{d^2h(u)}{du^2}\right)+1+\left(\frac{dh(u)}{du}\right)^2=0$$

```
> dsolve(numer(mean)=0,h(u));
```

$$h(u)=\frac{1}{2}\frac{\left(1+\frac{1}{(e^{(u_C1)})^2(e^{(_C2_C1)})^2}\right)e^{(u_C1)}e^{(_C2_C1)}}{_C1},$$

$$h(u)=\frac{1}{2}\frac{1+(e^{(u_C1)})^2(e^{(_C2_C1)})^2}{e^{(u_C1)}e^{(_C2_C1)}_C1}$$

因为要取 u 的平方根，所以有两个答案，取其中一个作为 $h(u)$函数的解． 215

```
> sol:=dsolve(numer(mean)=0,h(u))[1];
```

$$sol := h(u)=\frac{1}{2}\frac{\left(1+\frac{1}{(e^{(u_C1)})^2(e^{(_C2_C1)})^2}\right)e^{(u_C1)}e^{(_C2_C1)}}{_C1}$$

```
> ans:=simplify(solve(sol,h(u)));
```

$$ans := \frac{1}{2}\frac{(1+e^{(2_C1(u+_C2))})e^{(-_C1(u+_C2))}}{_C1}$$

我们常常需要特殊的命令进行化简，这里也不例外．

```
> realans:=combine(convert(ans,trig),trig);
```

$$realans := \frac{\cosh(u_C1+_C2_C1)}{_C1}$$

我们可以选取 _C1 和 _C2 的值，以便考察这个函数．注意，因为 _C1 在分母上，所以不为 0.

```
> func:=subs({_C1=1,_C2=0},realans);
```

$$func := \cosh(u)$$

由此可见 $H=0$ 的旋转曲面为悬链面．

练习 4.9.1 用上述过程找出所有平坦的(即 $K=0$)旋转曲面(见练习 3.5.9)，可能会用到下列命令：

```
> h:=t->h(t);
> surfrev:=<u|h(u)*cos(v)|h(u)*sin(v)>;
> gauss:=GK(surfrev);
> numer(gauss);
```

```
> sol:=rhs(dsolve(numer(gauss)=0,h(u)));
> func1:=subs({_C1=1,_C2=0},sol);
> func2:=subs({_C1=0,_C2=1},sol);
> func3:=subs({_C1=1,_C2=1},sol);
> plot3d([u,func1*cos(v),func1*sin(v)],u=0..2,v=0..2*Pi,
scaling=constrained,shading=zhue,lightmodel=light3,
grid=[5,25],orientation=[55,35],axes=boxed);
> plot3d([u,func2*cos(v),func2*sin(v)],u=0..2,v=0..2*Pi,
scaling=constrained,shading=zhue,lightmodel=light3,
grid=[5,25],orientation=[55,35],axes=boxed);
> plot3d([u,func3*cos(v),func3*sin(v)],u=-1..2,v=0..2*Pi,
scaling=constrained,shading=zhue,lightmodel=light3,
216 grid=[5,25],orientation=[55,35],axes=boxed);
```

4.9.4 代数条件

在练习 4.2.3 中，我们提到，在生成蒙日片的函数上附加一个代数条件生成了 Scherk 第一曲面，这个代数条件是 $f(x, y)=g(x)+h(y)$. 这里，利用 Maple 作该练习：

```
> g:=x->g(x); h:=y->h(y);
```

$$g := g$$
$$h := h$$

```
> z:=(x,y)->g(x)+h(y);
```

$$z := (x,y) \to g(x)+h(y)$$

该函数的极小曲面方程是

```
> minsurfeq:=(1+diff(z(u,v),v)^2)*diff(z(u,v),u$2) -
2*diff(z(u,v),u)*diff(z(u,v),v)*diff(diff(z(u,v),u),v) +
(1+diff(z(u,v),u)^2)*diff(z(u,v),v$2)=0;
```

$$minsurfeq := \left(1+\left(\frac{\mathrm{d}h(v)}{\mathrm{d}v}\right)^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2 g(u)}{\mathrm{d}u^2}\right)+\left(1+\left(\frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u}\right)^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2 h(v)}{\mathrm{d}v^2}\right)=0$$

这是一个变量可分离的微分方程，分离 u 部在左边，v 部在右边.

```
> leftside:=diff(g(u),'$'(u,2))/(1+diff(g(u),u)^2);
rightside:=-diff(h(v),'$'(v,2))/(1+diff(h(v),v)^2);
```

$$leftside := \frac{\frac{\mathrm{d}^2 g(u)}{\mathrm{d}u^2}}{1+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}g(u)\right)^2}$$

$$rightside := -\frac{\frac{\mathrm{d}^2 h(v)}{\mathrm{d}v^2}}{1+\left(\frac{\mathrm{d}h(v)}{\mathrm{d}v}\right)^2}$$

若 u, v 的函数总是相等，只能是两个函数等于相同的常数 C. 对两边分别求解，再相加就得

到 $f(u, v)$.

```
> dsolve(leftside=C,g(u));
```

$$g(u) = -\frac{\ln(_C1\sin(Cu) - _C2\cos(Cu))}{C}$$ 217

```
> dsolve(rightside=C,h(v));
```

$$h(v) = \frac{\ln(-_C1\sin(Cv) + _C2\cos(Cv))}{C}$$

```
> gg:=rhs(subs({_C1=0,_C2=-1},dsolve(leftside=C,g(u))));
```

$$gg := -\frac{\ln(\cos(Cu))}{C}$$

```
> hh:=rhs(subs({_C1=0,_C2=1},dsolve(rightaids=C,h(v))));
```

$$hh := \frac{\ln(\cos(Cv))}{C}$$

```
> combine(gg+hh);
```

$$\frac{-\ln(\cos(Cu)) + \ln(\cos(Cv))}{C}$$

手工化简得到生成 Scherk 第一曲面的函数.

```
> zz:=ln(cos(v)/cos(u));
```

$$zz := \ln\left(\frac{\cos(v)}{\cos(u)}\right)$$

4.9.5 Maple 和极小化面积

利用 Maple 可以画出极小曲面，当然 Maple 有更多的用处. 首先 Weierstrass-Enneper 表示可编写成程序，该程序输入全纯函数(在某个定义域)，输出极小曲面的等温参数方程. 具体细节可见[Opr00]，其中有很多极小曲面的例子，这里不再重复. 在这里，只是看一看对于一个具体的例子，利用 Maple 如何作图与计算，即对确定的边界曲线，可以证明 Enneper 曲面虽然是极小曲面，但它不是产生最小面积的曲面. 这个问题提出了一个面积较小的候选曲面——广义倒柱面，它甚至不是极小曲面. 下面用 Maple 解决这个问题.

```
> with(plots):
> enneper:=<u-u^3/3+u*v^2|-v+v^3/3-v*u^2|u^2-v^2>;
```

$$enneper := \left[u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, -v + \frac{1}{3}v^3 - vu^2, u^2 - v^2\right]$$

为方便确定一条特定的边界曲线，将 Enneper 表示转换为极坐标形式. 218

```
> ennpolar:=simplify(subs({u=r*cos(theta),v=r*sin(theta)},
enneper));
```

$$ennpolar := \left[-\frac{1}{3}r\cos(\theta)(-3+4r^2\cos^2(\theta)-3r^2),\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}r\sin(\theta)(3-r^2+4r^2\cos^2(\theta)),r^2(2\cos^2(\theta)-1)\right] \quad (4.9.1)$$

下列程序建立了由 $R=1.5$ 的 Enneper 曲面的边界曲线生成的柱面的参数方程. 为了绘制这个柱面，考虑两种情形，ytheta 为正和 ytheta 为负. 当 v 从 0 变到 π 时，第二个坐标 ytheta 为负，故 u 在 0 到 2 间变化，当 v 从 π 变到 2π 时，u 的值域为 -2 到 0.

```
> CylEnn := proc(r)
local xtheta,ytheta,ztheta,n,X;
xtheta := r*cos(theta)-1/3*r^3*cos(3*theta);
ytheta := -r*sin(theta)-1/3*r^3*sin(3*theta);
ztheta := r^2*cos(2*theta);
n := abs(ytheta);
X := [xtheta,ytheta+u*n,ztheta];
end:
```

因为要分别绘制两种情形，所以要通过指定名字并用冒号代替分号来保存图形，这样做的目的是为了压缩绘图结构的输出.

```
> cyl1:=plot3d(CylEnn(1.5),u=0..2,theta=0..Pi,scaling=
constrained,grid=[5,50],style=patch):
> cyl2:=plot3d(CylEnn(1.5),u=-2..0,theta=Pi..2*Pi,scaling=
constrained,grid=[5,50],style=patch):
```

类似地，保存极坐标形式下的 Enneper 曲面图.

```
> enn:=plot3d(ennpolar,r=0..1.5,theta=0..2*Pi,scaling=
constrained,grid=[5,50],style=patch):
```

下面描述的若尔当曲线是 $R=1.5$ 的 Enneper 曲面和上述柱面的边界曲线.

```
> jorcurve:=subs(r=1.51,ennpolar);
```

$$jorcurve := [-0.5033333333\cos(\theta)(-9.8403+9.1204\cos^2(\theta)),$$
$$-0.5033333333\sin(\theta)(0.7199+9.1204\cos^2(\theta)),4.5602\cos^2(\theta)-2.2801] \quad (4.9.2)$$

219 用“tubeplot”建立环绕管道，画出边界曲线. 若采用“spacecurve”效果看起来会更好.

```
> bound:=tubeplot(convert(jorcurve,list),theta=0..2*Pi,
radius=0.025,color=black):
```

现在我们可以显示相同边界曲线形成的两个曲面，如图 4-11 和图 4-12 所示.

```
> display({bound,enn},scaling=constrained,style=
wireframe,orientation=[154,-106]);
> display({bound,cyl1,cyl2},scaling=constrained,
orientation=[154,-106]);
```

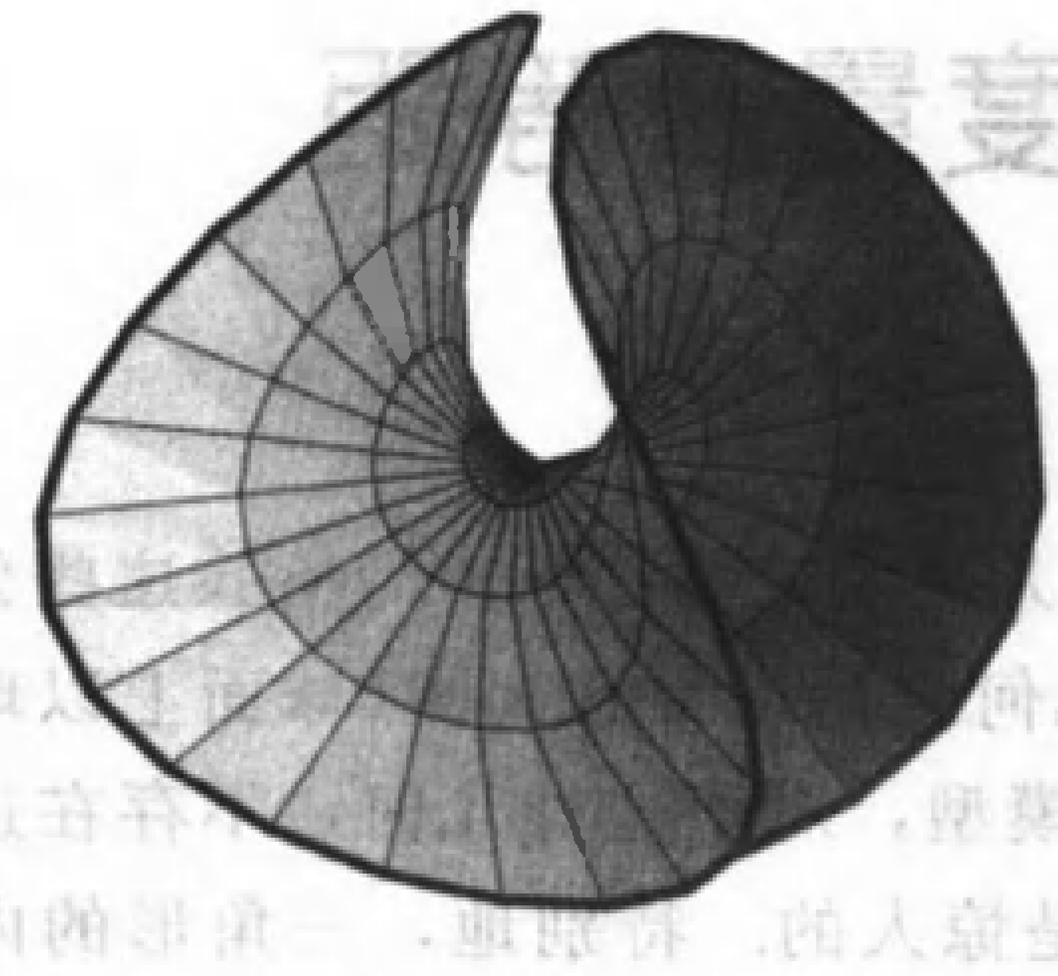


图 4-11 若尔当曲线围成的 Enneper 曲面



图 4-12 若尔当曲线围成的柱面

现在计算面积．柱面面积由下述程序得到．

```
> ytheta:=subs(r=1.5,ennpolar[2]);
```

$$ytheta := -0.5000000000\sin(\theta)(0.75+9.00\cos^2(\theta))$$ 220

```
> x1:=diff(subs(r=1.5,ennpolar[1]),theta);
z1:=diff(subs(r=1.5,ennpolar[3]),theta);
```

$$x1 := 0.5000000000\sin(\theta)(-9.75+9.00\cos^2(\theta))+9.000000000\cos^2(\theta)\sin(\theta)$$

$$z1 := -9.00\cos(\theta)\sin(\theta)$$

我们可以估计这个柱面面积积分（限定在边界的若尔当曲线上）的数值．

```
> evalf(Int(2*abs(ytheta)*sqrt(x1^2+z1^2),theta=0..Pi));
```

31.66323514

这就是边界曲线围成的柱面的面积．另一方面，半径为 r 的 Enneper 曲面的面积等于 $\pi r^2(1+r^2+(r^4)/3)$．当 $r=1.5$ 时，有

```
> evalf(subs(r=1.5, Pi*r^2*(1+r^2+(r^4)/3)));
```

34.90113089

所以虽然 Enneper 曲面是极小曲面，但不是若尔当曲线围成的最小面积的曲面．当然不用 Maple 也可以数值计算出柱面面积．但将计算机代数系统推广到数学、教育、社会正是它的方便、与所得结果相比程序的简单和即时可见的完美视图．下面作为本节的最后一个练习．

练习 4.9.2 半径为 r 的 Enneper 曲面的面积为 $\pi r^2(1+r^2+(r^4)/3)$．提示：利用 4.2 节介绍的曲面面积积分．

练习 4.9.3 比较半径变化时柱面和 Enneper 曲面的面积． 221

第5章 测地线、度量及等距

5.1 引言

在公理几何学中，公理主要考虑的是点、线等基本几何对象的特征. 为检验这些公理，自然要建立相应的几何模型. 例如，黎曼的非欧几里得几何就是以带有大圆(球面上以球心为圆心的圆)的球面为模型. 根据定义，球面是一种几何的模型. 对于这种几何，不存在过已知点平行于已知直线的直线. 当然，这一结果产生的分歧是惊人的. 特别地，三角形的内角和大于 180°.

如果要建立微分几何与传统的公理几何之间的联系，那么就必须给出线的抽象的定义(以区别于欧几里得公理化几何的无定义)，并且证明此定义与欧几里得和非欧几里得几何中的典型模型相符合. 特别地，若有线的正确概念，就能证明(而不是假设或定义)球面上的线是大圆.

那么，微分几何中线是什么呢？先前已经证明，平面上的直线给出了两点间的最短距离. 可以利用"距离最小化"这一标准作为定义，但是这样定义的缺点是难于验证这个条件. 取而代之，可以用直线二阶导数为零的性质来定义"线". 这一性质易于计算且能描述直线的特征.

现在，我们不能在$\mathbb{R}^3$ 的曲面 M 上取曲线 α 要求 $\alpha''=0$. 因为：第一，$\alpha''=0$ 给出的是$\mathbb{R}^3$ 中的直线，第二，对于任意 M(例如球面)，没有理由说明为什么在 M 上存在这样的线. 但是，
223 让我们从 M 上的居民的角度考虑这一切. 即从生活在 M 上的生物的角度考虑，它没有单位法向量 U 给出的第 3 维的概念. 因为这种生物不能看到切平面 T_pM 外的任何东西，所以也就不能看到加速度在法向量方向的分量. 假设 α 是单位速度的曲线，那么我们取两个垂直的单位向量 $T=\alpha'$ 和 U(M 的单位法向量)，第三个这样的向量可由 $U\times T$ 得到. 现在这 3 个互相垂直的向量构成$\mathbb{R}^3$ 的一组基，任意向量都是它们的线性组合. 因此，可以写出 $\alpha''=AT+B(U\times T)+CU$，计算系数：

$$\alpha''\cdot T=A,\quad \alpha''\cdot U\times T=B,\quad \alpha''\cdot U=C,$$

其中用到 T，$U\times T$ 和 U 都是单位向量. 因此，

$$\alpha''=(\alpha''\cdot T)T+\alpha''\cdot(U\times T)(U\times T)+(\alpha''\cdot U)U.$$

而且，因 α 有单位速度，$\alpha'\cdot\alpha'=1$. 由微分的乘积法则得 $\alpha''\cdot\alpha'+\alpha'\cdot\alpha''=2\alpha'\cdot\alpha''=0$. 因此 $\alpha'\cdot\alpha''=T\cdot\alpha''=0$，所以 α''没有 T 分量，

$$\alpha''=\alpha''\cdot(U\times T)(U\times T)+(\alpha''\cdot U)U.$$

由通常的点积和叉积公式得 $U\cdot(U\times T)=0$ 和 $\alpha''\cdot(U\times T)=U\cdot(\alpha'\times\alpha'')$. 故对任意的 $p\in M$，$U\times T$ 在 T_pM 上，且

$$\begin{aligned}\alpha''\cdot(U\times T)&=U\cdot(\alpha'\times\alpha'')\\&=|U||\alpha'\times\alpha''|\cos\theta\\&=|\alpha'\times\alpha''|\cos\theta\\&=\kappa_\alpha\cos\theta,\end{aligned}$$

其中 κ_α 是曲线 α 的曲率，θ 是 $\alpha'\times\alpha''=T\times\kappa N$ 和 U 之间的夹角. $\kappa_\alpha\cos\theta$ 通常称为 α 的测地曲率，记为

$$\kappa_g=\kappa_\alpha\cos\theta.$$

练习 5.1.1 证明 α 的曲率 κ_α、α' 的法曲率 $k(\alpha')$ 和 α 的测地曲率 κ_g 之间有下述关系：

$$\kappa_\alpha^2=\kappa(\alpha')^2+\kappa_g^2.$$

提示：(1)直接考虑 α'' 的表达式，回忆法曲率的计算方法；(2)考虑 α' 的法曲率与 α 的曲率的联系，并注意 N, B, U 在垂直于 T 的平面内且 N 垂直于 B.

练习 5.1.2 计算环面的顶端平行线$\left(即\ u=\frac{\pi}{2}\right)$的 κ, κ_g 和 k，并证明此时上述关系成立. 224

练习 5.1.3 设 $\alpha(s)$ 是 M 上单位速度曲线. 方便起见，设 $\alpha(0)=0\in\mathbb{R}^3$. 定义 α 到 $\alpha(0)$ 点处的切平面的投影为 $\beta(s)=\alpha(s)+\rho(s)U_0$，其中 $\rho(s)=-\alpha(s)\cdot U_0$，$U_0$ 是 M 在 $\alpha(0)$ 处的单位法向量. 证明 α 的测地曲率等于 β 通常的曲率：$(\kappa_g)_\alpha=\kappa_\beta$. 提示：利用 $\rho(0)=0$, $\rho'(0)=0$ 以及 $\alpha(0)$ 处的法曲率 $\rho''(0)=k$. 证明 $|\beta'\times\beta''|=\kappa_g$. 这一练习是说，测地曲率仅仅是曲面 M 上的二维定居者沿曲面看到的通常的曲率.

练习 5.1.4 修改例 1.3.29 证明对于曲面 M 上有单位速度的弧长为 L 的闭合曲线 α，当 α 沿法向量方向变化时，L 的初始变化率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_\beta(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=-\int\kappa_g(U\times T)\cdot\delta\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\beta=\alpha+\epsilon\delta$ 且变化的向量场 δ 满足 $\alpha'\cdot\delta=0$, $\delta\cdot U=0$. 后一条件保证对很小的 ϵ，曲线停留在"曲面"上. 在练习 7.6.12 中要用到这一结果.

在定理 3.4.1 中我们看到高斯曲率仅仅依赖于度量系数 E, F, G. 正如我们将从定理 5.5.1 见到的那样，这意味着高斯曲率是所谓的"弯曲不变量"，即称为等距的某些曲面变换保持高斯曲率不变. 事实上，对测地曲率也有类似结论.

定理 5.1.5 *测地曲率仅依赖于度量. 实际上为方便起见取 $F=0$，测地曲率由公式*

$$\kappa_g=\sqrt{EG}\left(-\frac{E_v}{2G}u'^3+\left(\frac{G_u}{G}-\frac{E_v}{2E}\right)u'^2v'+\left(\frac{G_v}{2G}-\frac{E_u}{E}\right)u'v'^2+\frac{G_u}{2E}v'^3+u'v''-u''v'\right)$$

给出.

证明 $\kappa_g=\alpha''\cdot U\times T$，且

$$\alpha'=x_uu'+x_vv'$$

$$\alpha''=x_{uu}u'^2+x_{uv}u'v'+x_uu''+x_{vu}u'v'+x_{vv}v'^2+x_vv''.$$

又由假设 $F=0$，故 $\{x_u/\sqrt{E},\ x_v/\sqrt{G},\ U\}$ 为标准正交系. 计算可得(利用公式 3.4.3)

$$U\times T=\left(\frac{x_u}{\sqrt{E}}\times\frac{x_v}{\sqrt{G}}\right)\times(x_uu'+x_vv')=\left[\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}x_vu'-\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}x_uv'\right],$$ 225

$$x_{uu}\cdot U\times T=\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\left(\frac{-E_v}{2}\right)u'-\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\left(\frac{E_u}{2}\right)v',$$

$$x_{uv}\cdot U\times T=\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\left(\frac{G_u}{2}\right)u'-\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\left(\frac{E_v}{2}\right)v',$$

$$x_{vv}\cdot U\times T=\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\left(\frac{G_v}{2}\right)u'-\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\left(\frac{-G_u}{2}\right)v',$$

$$x_u\cdot U\times T=-\sqrt{EG}v',$$

$$x_v\cdot U\times T=\sqrt{EG}u'.$$

然后，将上述结果代入 $\kappa_g=\alpha''\cdot(U\times T)$，化简得到定理中的公式. ■

我们已经见到可将加速度分解为切向量分量和法向量分量

$$\alpha''_{\tan}=\kappa_g U\times T \quad 和 \quad \alpha''_{\text{normal}}=(\alpha''\cdot U)U.$$

当 $\alpha''_{\tan}=0$ 时，我们看不到加速度. 因此，可作如下定义. 若 $\alpha''_{\tan}=0$，则 M 上的单位速度曲线 α 为测地线.

练习 5.1.6 $\alpha(t)$是速度为 ν 的非单位速度曲线，证明

$$\alpha''=\frac{d\nu}{dt}T+\kappa_g\nu^2U\times T+(\alpha''\cdot U)U.$$

提示：(1)回忆 $T=\frac{\alpha'}{\nu}$ 且微分 $\alpha'\cdot\alpha'=\nu^2$ 得到 $\alpha''\cdot T=\frac{d\nu}{dt}$. (2)利用非单位速度曲线的曲率公式，证明 $\alpha''\cdot\left(\frac{\alpha'}{\nu}\times U\right)=\kappa_g\nu^2$.

曲面的测地线就是我们的几何意义的直线. 首先注意测地线的一个简单的性质(也可从上述练习推出).

引理 5.1.7 *测地曲线有固定速度.*

证明 α 的速度 $\nu=|\alpha'|$，故 $\nu^2=\alpha'\cdot\alpha'$. 因为 $\alpha''=\alpha''_{\text{normal}}$，$\alpha''_{\text{normal}}\cdot\alpha'=0$，所以对上式求微分可得 $2\nu\frac{d\nu}{dt}=\alpha''\cdot\alpha'+\alpha'\cdot\alpha''=2\alpha'\cdot\alpha''=0$. 因此 $\frac{d\nu}{dt}=0$，故 ν 为常值. ■

同时注意，因为 $\alpha''=0$，所以 M 上的直线 $\alpha(t)=p+tq$ 必是测地线. 当然，我们希望这个条件能够刻画熟知的欧几里得几何中的测地线. 为此，假设 P 是法向量为 U 的平面，α 是 P 上的测地线. 根据定义 $\alpha''_{\tan}=0$，故 $\alpha''=(\alpha''\cdot U)U$. 但是因为 α 在 P 上，故 $\alpha'\cdot U=0$. 又因为 U 为常值，由乘法法则得到

226 $$0=(\alpha'\cdot U)'=\alpha''\cdot U+\alpha'\cdot U'=\alpha''\cdot U.$$

这样，因为 α''的切向量分量和法向量分量都是零. 所以 $\alpha''=0$，故 α 必为直线.

旋转曲面是另一类例子. 设 $\alpha(u)=(g(u),h(u),0)$是参数化的单位速度曲线. 回忆由此曲线沿 x 轴旋转所得的旋转曲面的参数方程为 $x(u,v)=(g(u),h(u)\cos v,h(u)\sin v)$，且

$$E=x_u\cdot x_u=1,\quad F=0,\quad G=x_v\cdot x_v=h^2>0.$$

取 E，F 对 u 的微分，也就是说取这两个函数 E. F 在 x_u 方向的方向导数. 因为 $E=1$，$F=0$，且 $x_u\cdot x_{uv}=(g',h'\cos v,h'\sin v)\cdot(0,-h'\sin v,h'\cos v)=0$，所以

$$\begin{aligned}0&=x_u[E] & 0&=x_u[F]\\ &=x_u[x_u\cdot x_u] & &=x_u[x_u\cdot x_v]\\ &=x_{uu}\cdot x_u+x_u\cdot x_{uu} & &=x_{uu}\cdot x_v+x_u\cdot x_{uv}\\ &=2x_u\cdot x_{uu} & &=x_{uu}\cdot x_v.\end{aligned}$$

因此，$x_{uu}\cdot x_u=0$，$x_{uu}\cdot x_v=0$，故 x_{uu} 垂直于 $T_p(M)$. 也就是$(x_{uu})_{tan}=0$. 所以旋转曲面的子午线是测地线. 当我们考虑克莱罗参数方程时，将简要归纳这一陈述(见命题 5.2.7).

例 5.1.8(S_R^2 的测地线) 令 S_R^2 是半径为 R 的球面，它的参数方程为 $x(u,v)=(R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v)$. 实际上 S_R^2 是由 $g(v)=R\sin v$，$h(v)=R\cos v$ 生成的旋转曲面，故 v-参数曲线是测地线. 也就是说从北极到南极的经线是测地线. 因为球面是中心对称的，经过适当的旋转，可认为它是旋转轴为任意经过圆心的直线的旋转曲面. v-参数曲线是球面上的圆，它连结球面和旋转轴的交点. 因为这些点在旋转作用下对应于北极和南极，所以这个连结它们的圆是 S_R^2 上的大圆. 回忆，大圆是 R-球面上半径为 R 的圆，因此大圆的圆心即为球心. 这一讨论说明 S_R^2 上的大圆为测地线. 为说明 S_R^2 的测地线只有大圆，假设 α 是单位速度的测地线. 由定义 $\alpha''_{tan}=\alpha''-(\alpha''\cdot U)U=0$，故 $\alpha''=(\alpha''\cdot U)U$. 但是在 S_R^2 上，$U(\alpha(t))=\dfrac{\alpha(t)}{R}$，故$\alpha''=\dfrac{1}{R^2}(\alpha''\cdot\alpha)\alpha$. 因为 α''平行于α，α'平行于α'，所以

$$\begin{aligned}(\alpha'\times U)' &= \frac{1}{R}(\alpha'\times\alpha)'\\ &= \frac{1}{R}(\alpha''\times\alpha+\alpha'\times\alpha')\\ &= 0.\end{aligned}$$

因为N垂直于 $U=\dfrac{\alpha}{R}$，故 $\alpha'\times U\overset{\text{def}}{=}N$是常量且 $\alpha\cdot N=0$. 这意味着 α 位于以N为法向量的平面上. 进而，因为 $U=\dfrac{\alpha}{R}$位于这一平面，所以从(0，0，0)到任意 $\alpha(t)$的曲线位于该平面. 因此平面经过(0，0，0). 因 α 也在 S_R^2 上，所以它在球面与过原点的平面的交上. 那么它为大圆(的部分)(如图 5-1 所示). 下面练习根据 Frenet 公式给出了另外一种表达球面测地线特征的方法.

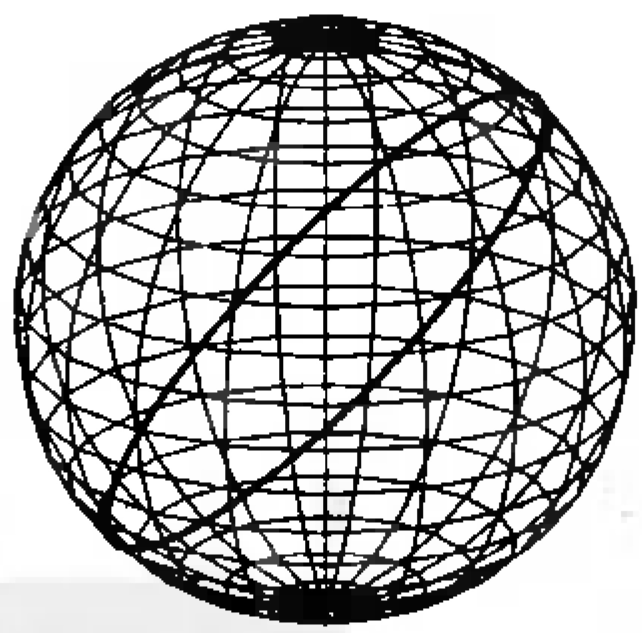


图 5-1 球面上的测地线

练习 5.1.9 证明 S_R^2 上的曲线α 是测地线当且仅当它为大圆. 提示：(1)假设 α 是单位速度的测地线，$\alpha'=T$，$\alpha''=T'=\kappa N$，证明 $S(T)=\kappa_n T-\tau_g B=\dfrac{T}{R}$，其中 S 为 S_R^2 的形状算子(注意 $S(T)=\kappa_n T-\tau_g B$ 总是成立的). (2)对 κ_n 和 τ_g，这意味着什么?

练习 5.1.10 证明 若 M 上的测地线α 是平面曲线，则它是曲率线. 提示：$\tau_g=0$；面法向量 B 是这一平面的法向量；$B\cdot U=0$. 这一问题的另一证明方法见练习 6.3.7.

练习 5.1.11 证明曲面 M 上的曲线α 既是测地线又是曲率线当且仅当α 位于垂直于M 的平面P 上(即U 在P 内). 提示：Frenet 公式；$N=U$；$U'=\alpha T$. 这一问题的另一证明方法见练习 6.3.6.

227~228 **练习 5.1.12** 求圆柱面 M: $x^2+y^2=R^2$ 的测地线(如图 5-2 所示). 提示: (1)记 $\alpha(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))=(R\cos u(t), R\sin u(t), bv(t))$, 求 α''; (2)$U=(\cos u, \sin u, 0)$是单位法向量. 分解 $\alpha''=-R\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2U+\alpha''_{\tan}$, 求 $\alpha''_{\tan}$. 并令 $\alpha''_{\tan}=0$; (3)$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$和$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}$必须满足什么条件?

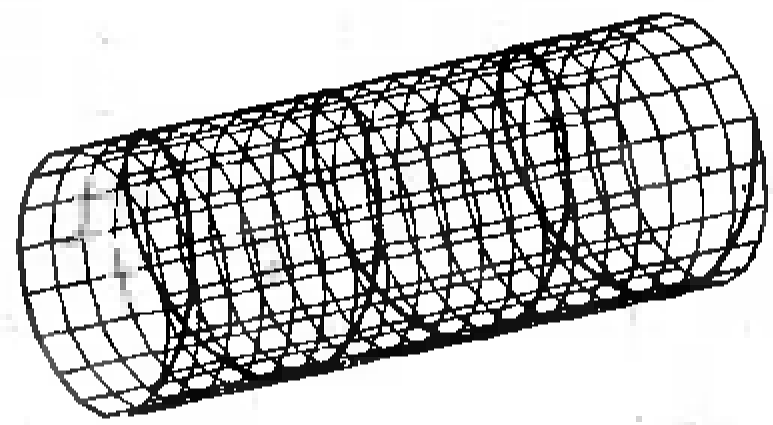


图 5-2 圆柱面上的测地线

考虑下述特殊情形，也可以发现测地线的概念是正确的. 假设 M 是坐标补片 $\mathbf{x}$(在给定点附近)满足 $E=1, F=0, G>0$ 的曲面(事实上，在给定点附近，这样的坐标补片总是存在的，这种坐标补片被称为测地极坐标补片，见第 6 章). 例如，由单位速度曲线产生的旋转曲面满足 $E=1$, $F=0$, $G=h(u)^2>0$. 设 α: $[s_0, s_1]\to M$ 是单位速度的测地线，则 α 的弧长为

$$L(\alpha)=\int_{s_0}^{s_1}|\alpha'|\,\mathrm{d}s=\int_{s_0}^{s_1}1\mathrm{d}s=s_1-s_0.$$

取另一条曲线 β: $[s_0, s_1]\to M$, 其中 $\beta(s_0)=\alpha(s_0)$, $\beta(s_1)=\alpha(s_1)$. 注意通过参数变换，总能取到相同的区间$[s_0, s_1]$. 由隐函数定理，对 s 的某个函数 g, $\beta(s)=\mathbf{x}(s, g(s))$. 因 $G>0$, 所以

$$\begin{aligned}\beta'(s)&=\mathbf{x}_u\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}+\mathbf{x}_v\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}\\&=\mathbf{x}_u+\mathbf{x}_vg'\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}|\beta'(s)|&=\sqrt{\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u+2\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_vg'+\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_vg'^2}\\&=\sqrt{E+Gg'^2}\\&=\sqrt{1+Gg'^2}\\&>1.\end{aligned}$$

因此，对于 β, 有下述长度的估计:

229 $$L(\beta)=\int_{s_0}^{s_1}|\beta'|\,\mathrm{d}s=\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{1+Gg'^2}\mathrm{d}s>\int_{s_0}^{s_1}1\mathrm{d}s=s_1-s_0=L(\alpha).$$

这就是说，测地线给出了 M 上(某特定区域)两点间的最短距离.

练习 5.1.13 取圆柱面 $x^2+y^2=1$ 上的两点$(0, 1, 0)$, $(0, 1, u_0)$. 考虑连结这两个点的直线和螺旋测地线. 显然螺旋测地线不是这两点间最短的距离，那么在上述讨论中出现了什么疏漏呢? 提示: 曲面不能完全地由单个坐标补片覆盖的几何含义.

5.2 测地线方程和克莱罗关系式

现在我们试找出计算测地线的一般方法. 下面只考虑正交坐标补片 $\mathbf{x}(u, v)$(即 $F=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=0$). 设 α 是坐标补片 $\mathbf{x}$ 的测地线，则 $\alpha=\mathbf{x}(u(t), v(t))$, $\alpha'=\mathbf{x}_uu'+\mathbf{x}_vv'$, 且

$$\alpha''=\mathbf{x}_{uu}u'^2+\mathbf{x}_{uv}v'u'+\mathbf{x}_uu''+\mathbf{x}_{vu}u'v'+\mathbf{x}_{vv}v'^2+\mathbf{x}_vv''.$$

利用第 3 章中 $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$, $\mathbf{x}_{vv}$的公式，得

$$\alpha'' = x_u\left[u'' + \frac{E_u}{2E}u'^2 + \frac{E_v}{E}u'v' - \frac{G_u}{2E}v'^2\right]$$
$$+ x_v\left[v'' - \frac{E_v}{2G}u'^2 + \frac{G_u}{G}u'v' + \frac{G_v}{2G}v'^2\right] + U[lu'^2 + 2mu'v' + nv'^2].$$

其中前两项是 α''的切向量分量. α 为测地线的充分必要条件是满足下述测地线方程(geodesic equation):

$$u'' + \frac{E_u}{2E}u'^2 + \frac{E_v}{E}u'v' - \frac{G_u}{2E}v'^2 = 0$$
$$v'' - \frac{E_v}{2G}u'^2 + \frac{G_u}{G}u'v' + \frac{G_v}{2G}v'^2 = 0.$$

练习 5.2.1 利用测地线方程求圆柱面 $x^2+y^2=1$ 的测地线.

练习 5.2.2 假设曲线 α 满足第一个测地线方程，且有固定速度(也就是说 $|\alpha'|^2 = u'^2E+v'^2G=c$). 微分固定速度关系式，代入第一个测地线方程中消去 u''，得到第二个测地线方程. 因此，曲线有固定速度时，固定速度关系可取代第二个测地线方程. 同样地，可以证明这两个测地线方程暗示曲线必须有固定速度. 这一事实隐含在测地线方程中，但这是本质的. 230
提示：在第一部分，要细心使用链式法则.

测地线方程是 2 阶微分方程组. 给定 M 上初给点及该点的切向量，常微分方程理论保证在 M 上存在唯一的测地线，它经过初始点且速度向量等于给定的切向量. 正式表述如下.

定理 5.2.3 *设 $p=x(u_0, v_0)$是曲面 M: $x(u, v)$上的一点，且$v \in T_pM$，则存在唯一的测地曲线 α: $(-r, r)\to M$，满足 $\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=v$.*

证明 要得到测地线 $\alpha(t)=x(u(t), v(t))$，且 $\alpha'(0)=u'(0)x_u(u_0, v_0)+v'(0)x_v(u_0, v_0)=v$. 因为$v$是固定的，所以这给出了 $u'(0)$和 $v'(0)$的值. 结合初值条件 $u(0)=u_0$，$v(0)=v_0$，再由微分方程解的存在唯一性定理，就足以确定测地线方程的唯一解(在某包含 0 的区间). ■

练习 5.2.4 平面和球面的测地线都是平面曲线. 证明这一特性刻画了平面和球面. 也就是说，若曲面 M 的任意一条测地线是平面曲线，则 M 必为平面或球面的一部分. 提示：利用练习 5.1.10、定理 5.2.3 及定理 3.5.2.

例 5.2.5(单位球面 S^2) 取标准坐标补片

$$x(u,v) = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v),$$

计算 $E=\cos^2 v$，$F=0$，$G=1$. 测地线方程为

$$u'' - 2\tan v u'v' = 0, \quad v'' + \sin v\cos v u'^2 = 0.$$

这是较难处理的非线性微分方程组. 事实上，直接求解测地线方程是很困难的. 可以用常用的技巧决定球面的测地线. 首先，不失一般性，假设 $\alpha(t)=x(u(t), v(t))$是单位速度的测地线. 除了测地线方程，还可得 $\alpha'=u'x_u+v'x_v$，由此式可导出单位速度关系式 $1=Eu'^2+Gv'^2$. 在单位球上，这就是 $1=\cos^2 v u'^2+v'^2$. 解第一个测地线方程：

$$\int \frac{u''}{u'} = \int 2\tan v v'$$
$$\ln u' = -2\ln\cos v + C$$

231 $$u'=\frac{c}{\cos^2 v}\quad 其中\ c=e^C.$$

在单位速度关系式中以 $c/\cos^2 v$ 代替 u'，得

$$1=\frac{c^2}{\cos^4 v}\cos^2 v+v'^2,$$

$$v'^2=1-\frac{c^2}{\cos^2 v},$$

$$v'=\pm\sqrt{\frac{\cos^2 v-c^2}{\cos^2 v}}.$$

u'除以v'得到分离变量的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{\pm c}{\cos v\sqrt{\cos^2 v-c^2}},$$

积分(在下面的第 4 步和第 5 步分别作代换 $w=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\tan v$，$w=\sin\theta$，方便起见取正号)，得

$$\begin{aligned}
u&=\int\frac{c}{\cos v\sqrt{\cos^2 v-c^2}}\mathrm{d}v\\
&=\int\frac{c\sec^2 v}{\sqrt{1-c^2\sec^2 v}}\mathrm{d}v\\
&=\int\frac{c\sec^2 v}{\sqrt{1-c^2-c^2\tan^2 v}}\mathrm{d}v\\
&=\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1-w^2}}\\
&=\int\mathrm{d}\theta\\
&=\arcsin\left(\frac{c\tan v}{\sqrt{1-c^2}}\right)+d.
\end{aligned}$$

因此

$$\sin(u-d)=\lambda\tan v,$$

其中 $\lambda=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$. 又 $\sin(u-d)=\sin u\cos d-\sin d\cos u$，除以公分母 $\cos v$，得

$$\frac{\sin u\cos v}{\cos v}\cos d-\sin d\,\frac{\cos u\cos v}{\cos v}-\frac{\lambda\sin v}{\cos v}=0.$$

作替换 $x=\cos u\cos v$，$y=\sin u\cos v$，$z=\sin v$，且仅考虑分子，得

$$y\cos d-x\sin d-\lambda z=0.$$

因此，测地线方程意味着 α 在经过原点的平面 $ax+by+cz=0$ 上. 就像先前关于球面的讨论一
232 样，这就是说 α 在经过原点的平面和球面的交线上——大圆.

在结束球面的讨论之前，再来看一下由测地线方程提供的其他信息. 设 ϕ 表示单位速度曲线 α 任意点处 α' 和 x_v 的夹角(较小的一个)，则有$\left(利用\frac{\pi}{2}-\phi 是 \alpha' 与 x_u 的夹角及恒等式 \sin\phi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\right)$

$$\sin\phi = \frac{\alpha' \cdot x_u}{|\alpha'||x_u|} = \frac{1}{\sqrt{E}}[(u'x_u + v'x_v) \cdot x_u] = u'\sqrt{E} = u'\cos v.$$

α'与x_u的夹角实际上为$\frac{\pi}{2}\pm\phi$，故方程的最左端项为$\pm\sin\phi$. 必要的时候可以翻转α的方向，使$\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 在这种情形下，上述方程就是正确的. 现在由测地线方程得$u'=\frac{c}{\cos^2 v}$，故(若有必要改变c的符号)

$$\sin\phi = \frac{c}{\cos v}.$$

这就是众所周知的克莱罗关系式的特殊情形(见练习 5.2.12). 稍后将讨论一般情形. 首先看什么关系可以导出球面的测地线(即大圆). 假设测地线α平行于纬线圆(即u-参数曲线)$x(u, v_0)$，也就是说，$\alpha'(0)$平行于$x_u(u_0, v_0)$，故ϕ为$\frac{\pi}{2}$. 克莱罗关系式为$1=\sin\frac{\pi}{2}=\frac{c}{\cos v_0}$，故$c=\cos v_0$. 沿$\alpha$有$\cos v\sin\phi=\cos v_0$，因$|\sin\phi|\leqslant 1$，所以$\cos^2 v\geqslant\cos^2 v_0$. 由$-\frac{\pi}{2}\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\cos v\geqslant\cos v_0$. 得到以下情形：

$$\begin{cases} v \leqslant v_0 & \text{for } 0 \leqslant v, v_0 \leqslant \frac{\pi}{2} \\ v \geqslant v_0 & \text{for } -\frac{\pi}{2} \leqslant v, v_0 \leqslant 0. \end{cases}$$

因为v表示纬线，这些不等式说明大圆α把纬线v_0上和纬线v_0下两部分粘在一起.

例 5.2.6(环面) 环面M的坐标补片的参数方程为

$$x(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u).$$

我们知道$E=r^2$，$F=0$，$G=(R+r\cos u)^2$，故测地线方程为

$$u'' + \frac{(R + r\cos u)}{r}\sin u v'^2 = 0, \quad v'' - 2\frac{r\sin u}{(R + r\cos u)}u'v' = 0.$$

第二个方程是可分离变量的，解得$v'=\frac{c}{(R+r\cos u)^2}$. 再假设$\alpha$是单位速度的，在单位速度关系中用$\frac{c}{(R+r\cos u)^2}$代替$v'$，得

$$1 = r^2 u'^2 + \frac{c^2}{(R + r\cos u)^2}$$

$$u' = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{c^2}{(R + r\cos u)^2}}.$$

再用u'除v'，得

$$\frac{dv}{du} = \frac{cr}{(R + r\cos u)\sqrt{(R + r\cos u)^2 - c^2}}$$

$$v = \int \frac{cr}{(R + r\cos u)\sqrt{(R + r\cos u)^2 - c^2}}du.$$

可是，不像球面那样可以给出右端项的确切积分．因此克莱罗关系式就显得尤为重要，因为它可以帮助我们观察测地线的轨迹．例如对于环面，克莱罗关系式是$(R+r\cos u)\sin\phi=c$，其中ϕ是α'与x_u的夹角．假设α起始时平行于顶端平行圆$x\left(\frac{\pi}{2}, v\right)=(R\cos v, R\sin v, r)$，则$\phi=\frac{\pi}{2}$，且由克莱罗关系式得$R=c$．因为$|\sin\phi|\leqslant 1$，所以沿$\alpha$有$R+r\cos u\geqslant R$．这说明$\cos u\geqslant 0$，即$-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$．因此测地线被限制在环的外面．实际上，它在顶端平行圆和底端平行圆间跳跃(见图 5-3)．

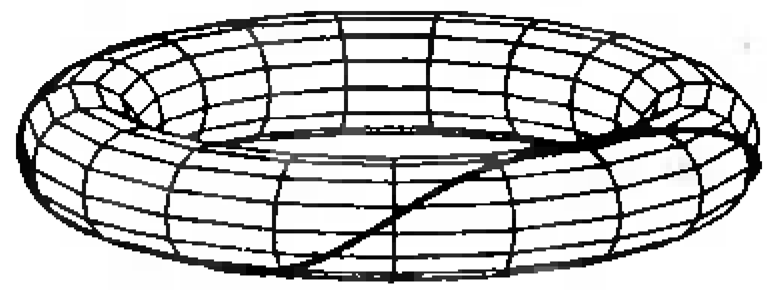


图 5-3　环面上的测地线

这两个例子有什么共同之处呢？球面和环面都是正交坐标补片，E和G仅依赖于u或v．若$E_v=0$，$G_v=0$，称正交坐标补片$x(u, v)$是关于u的**克莱罗参数化**．若$E_u=0$，$G_u=0$，称正交坐标补片$x(u, v)$是关于v的**克莱罗参数化**．当然，上面给出的是球面关于v的克莱罗参数化，而环面是关于u的克莱罗参数化．这一情形下的测地线方程可化简为

(u-克莱罗测地线方程)
$$u''+\frac{E_u}{2E}u'^2-\frac{G_u}{2E}v'^2=0$$
$$v''+\frac{G_u}{G}u'v'=0$$

(v-克莱罗测地线方程)
$$u''+\frac{E_v}{E}u'v'=0$$

233~234
$$v''-\frac{E_v}{2G}u'^2+\frac{G_v}{2G}v'^2=0.$$

下面我们着重讨论u-克莱罗参数化，对于v-克莱罗参数化，也有相同的结论．在u-克莱罗参数化的情形下．由测地线方程立刻可得有关曲线的一些性质．

命题 5.2.7　*若曲面M的坐标补片$x(u, v)$为u-克莱罗参数形式，则u-参数曲线(参数化为固定速度时)为测地线．*

证明　取u-克莱罗参数化坐标补片x的u-参数曲线$x(u, v_0)$，记为$\alpha(t)=x(t, v_0)$．注意$u(t)=t$，$v(t)=v_0$，且$u'=1$，$v'=0$．因为测地线方程成立时必有固定速度关系式，所以必须将α重新参数化使之有固定速度．因为我们需要下面明确的关系式，所以给出详细的计算．因$\alpha'(t)=x_u\cdot u'=x_u$，所以$\alpha$的弧长为

$$s(t)=\int_0^t|\alpha'(\gamma)|\,d\gamma=\int_0^t\sqrt{E(\gamma)}\,d\gamma.$$

由此可得$\frac{ds}{dt}=\sqrt{E(t)}>0$．所以有反函数$t=t(s)$，并定义$\alpha$的单位速度参数方程为$\beta(s)=\alpha(t(s))$．也就是说

$$\beta(s)=x(t(s), v_0),$$

其中$u(s)=t(s)$，$v(s)=v_0$．有

$$\frac{du}{ds}=\frac{du}{dt}\frac{dt}{ds}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}=\frac{1}{\sqrt{E}},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}s^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{E^{3/2}}E_u\frac{1}{\sqrt{E}}=-\frac{E_u}{2E^2}.$$

因为 $v'=v''=0$，所以第二个 u-克莱罗测地线方程自然成立．替换上述两个 u 的导数(其中 u'表示 u 对 s 的导数)，第一个测地线方程为

$$u''+\frac{E_u}{2E}u'^2=-\frac{E_u}{2E^2}+\frac{E_u}{2E}\left(\frac{1}{E}\right)=0.$$

因此 u-克莱罗测地线方程成立，且重新参数化后的 u-参数曲线 $\beta(s)$ 就是测地线． ■

所以对 u-克莱罗参数方程，u-参数曲线为测地线．显然这是前面讨论的旋转曲面的一般情形．注意要将 u-参数曲线参数化为单位速度曲线．虽然每条曲线都能参数化为单位速度，但并不是说 u-参数曲线自然就是单位速度的曲线．一些作者将这些没有固定速度的曲线称为准测地线．当它们参数化为固定速度后，就成了测地线．本书将这些曲线统称为测地线． 235

因为 u-克莱罗坐标补片的 u-参数曲线是测地线，那么自然要问 u-克莱罗坐标补片的 v-参数曲线 $x(u_0, v)$ 是否也是测地线呢？测地线方程是

$$0=-\frac{G_u}{2E}v'^2=-\frac{G_u}{2E},$$

其中 $v'=1$，G_u 取 u_0 处的值．显然，v-参数曲线 $x(u_0, v)$ 是测地线当且仅当 $G_u(u_0)=0$．特别地，把这个等价关系应用到 $G(u)=h^2(u)$ 的旋转曲面．综合上面的讨论，给出下列定理．

定理 5.2.8 *若曲面 M: $x(u, v)$ 的坐标补片 x 是 u-克莱罗坐标补片，那么任意 u-参数曲线都是测地线．当 $G_u(u_0)=0$ 时，$u=u_0$ 的 v-参数曲线为测地线．*

推论 5.2.9 *对于参数方程为 $x(u, v)=(g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v)$ 的旋转曲面，任意子午线是测地线．当 $h'(u_0)=0$ 时，平行圆为测地线．*

练习 5.2.10 构造一个函数 $h(u)$，使得参数方程为 $x(u, v)=(u, h(u)\cos v, h(u)\sin v)$ 的旋转曲面在 $u=u_0$ 的平行圆为测地线，而 u_0 不是 $h(u)$ 的最大或最小点．

一般地，对于 u-克莱罗参数方程 $x(u, v)$ 和单位速度的测地线 α，可将第二个测地线方程化简为十分简单的一阶形式．同上述球面和环面的例子一样，方程 $v''+\frac{G_u}{G}u'v'=0$ 可化为

$$\frac{v''}{v'}=-\frac{G_u}{G}u',$$

$$\int\frac{v''}{v'}\mathrm{d}t=-\int\frac{G_u}{G}u'\mathrm{d}t,$$

$$\ln v'=-\ln G+c,$$

$$v'=\frac{c}{G}.$$ 236

用 $\frac{c}{G}$ 代替单位速度关系中的 v'，得到

$$1=Eu'^2+Gv'^2,$$

$$1=Eu'^2+G\frac{c^2}{G^2},$$

$$1=Eu'^2+\frac{c^2}{G},$$

$$u'^2=\frac{G-c^2}{EG},$$

$$u'=\pm\sqrt{\frac{G-c^2}{EG}}.$$

练习 5.2.11 证明微分后两个方程中的任意一个可得到第一个测地线方程. 因此在克莱罗参数的情形下，单位速度关系可以取代测地线方程.

用 v'除以 u'，得到 u-克莱罗参数化下适于描述测地线的一个简单积分.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{v'}{u'}=\frac{\frac{c}{G}}{\pm\sqrt{\frac{G-c^2}{EG}}}=\frac{\pm c\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-c^2}}$$

$$v=\pm\int\frac{c\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-c^2}}\mathrm{d}u.$$

练习 5.2.12 假设 $\alpha(t)=\mathbf{x}(u(t),\ v(t))$是单位速度测地线，且 $\mathbf{x}$ 是 u-克莱罗参数方程. 证明克莱罗关系$\sqrt{G}\sin\phi=c$ 成立，其中 c 为定值，ϕ 是从 $\mathbf{x}_u$ 到α'的角. 因此说明 α 不能离开曲面上$G\geqslant c^2$ 的区域.

练习 5.2.13 证明平面的测地线是直线. 提示：用极坐标 $\mathbf{x}(u,\ v)=(u\cos v,\ u\sin v)$.

练习 5.2.14 设 M: $\mathbf{x}(u,\ v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ au)$表示圆锥面. 证明圆锥上的单位速度的测地线 $\alpha(t)=\mathbf{x}(u(t),\ v(t))$由方程 $u=c\sec\left(\frac{v}{\sqrt{1+a^2}}+D\right)$的解决定. 当 $a=1$ 时，确定连结(1, 0, 1), (0, 1, 1)两点的测地线的 c 和
237 D，并比较连结这两点的平行圆和测地线的弧长(如图 5-4 所示). 提示：见 5.6.2 节.

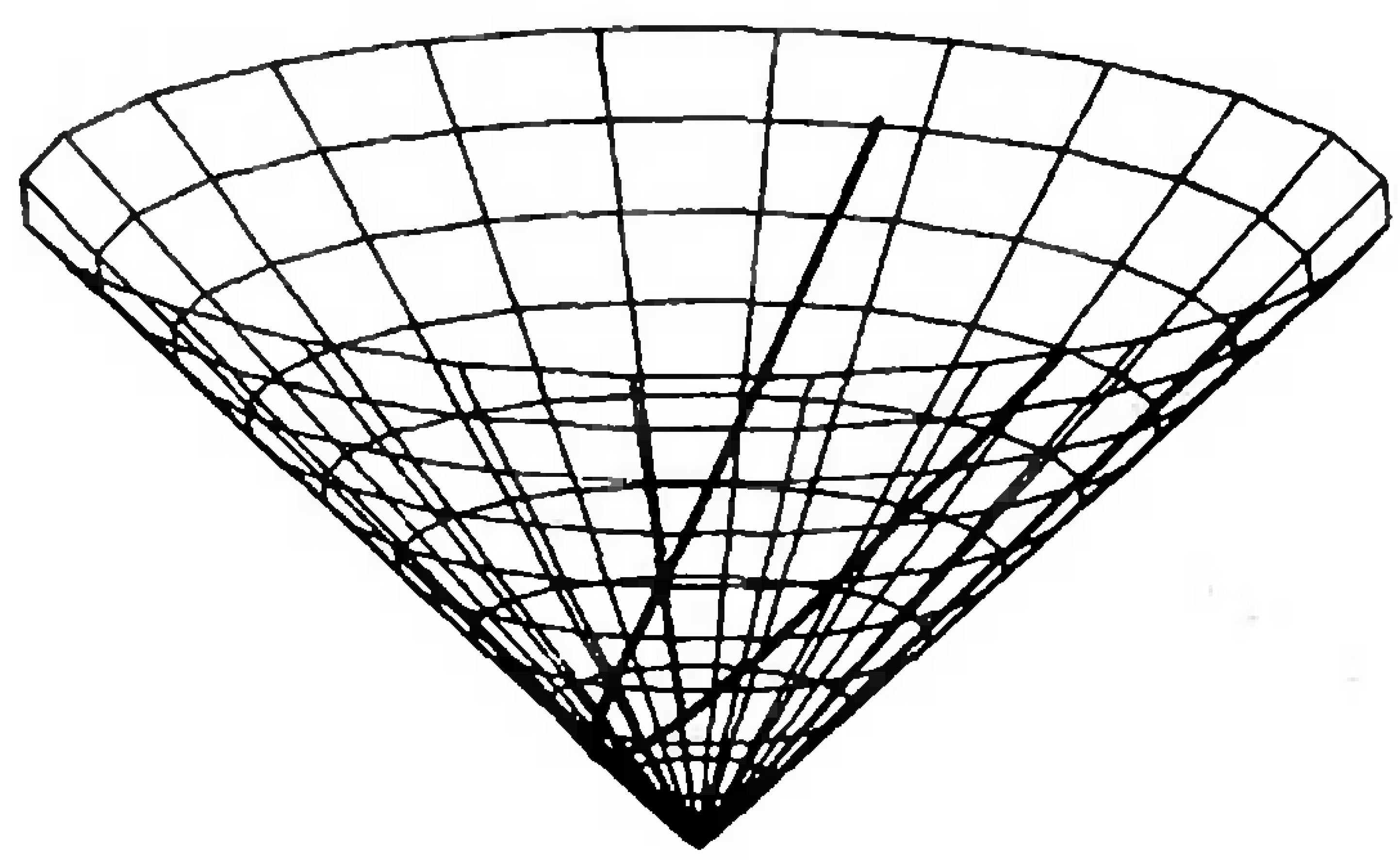


图 5-4 圆锥面上的测地线

练习 5.2.15 图 5-5 显示了由旋转箕舌线得到的旋转曲面上的测地线. 这些测地线起始时平行于 $u=\frac{\pi}{3}$的平行圆. 用克莱罗关系式解释这些测地线.

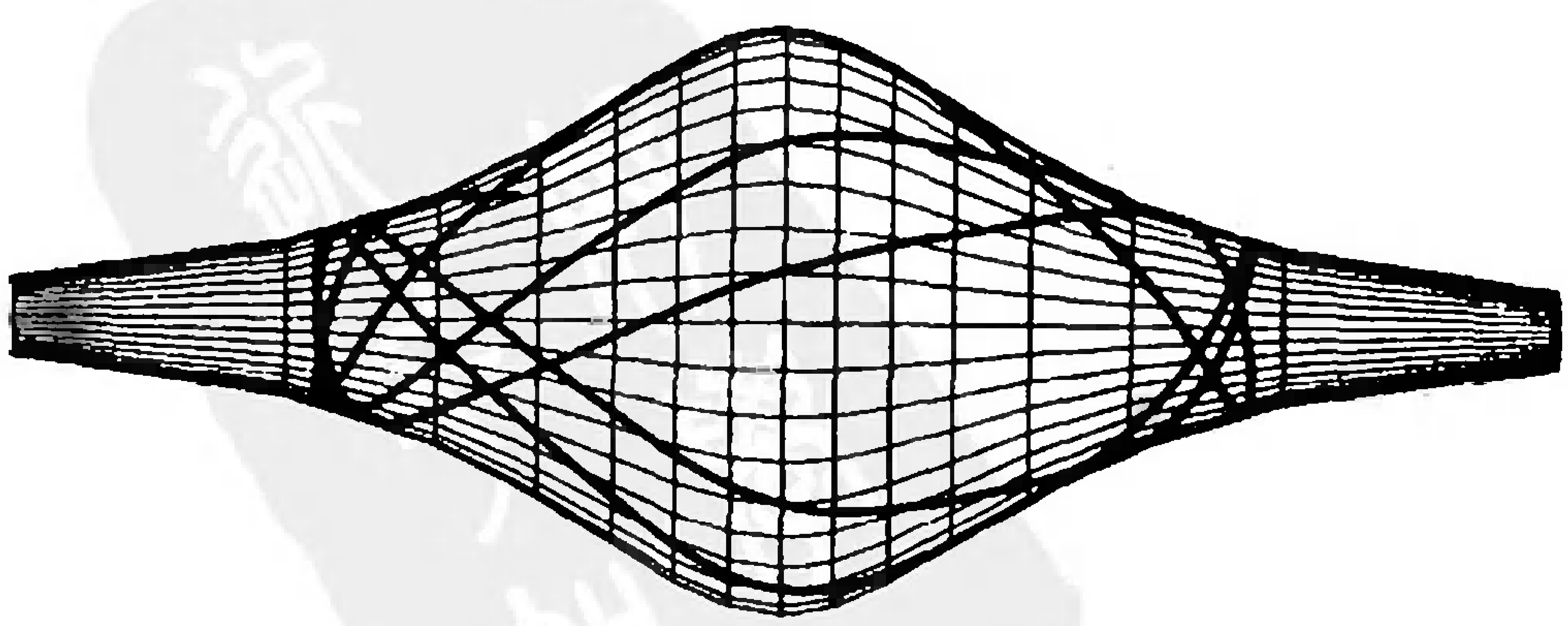


图 5-5 旋转箕舌面上的测地线

在我们开始下述内容之前，从物理的观点研究一下克莱罗关系式. 考虑 M 和一个被约束在 M 上移动的粒子，不受其他外力作用. 机械学中的达朗贝尔原理(见[Arn78])表明约束力 F

垂直于曲面，故由牛顿定律知 $|F|U=m\alpha''$，其中 $|F|$ 表示 F 的大小，U 为 M 的单位法向量，$\alpha(t)$ 为粒子的移动曲线. 取 $m=1$，由牛顿定律，加速度在 x_u 和 x_v 方向分量都为零. 这就导出了测地线方程. 因此限制在曲面 M 上自由移动粒子的轨迹为测地线. 现在假设 M 是参数方程为 $x(u, v)=(h(u)\cos v, h(u)\sin v, g(u))$ 的旋转曲面. 沿曲面，始于原点的半径向量为 238
$r=(h(u)\cos v, h(u)\sin v, g(u))$，粒子的动量向量为 $p=\alpha'=u'x_u+v'x_v$（因为 $m=1$）. 注意因为 α 是测地线，所以可以假设它有固定速度（也可从能量守恒得出类似结论）. 计算粒子关于原点的角动量：

$$L=r\times p=((g'h-gh')u'\sin v-ghv'\cos v, -(g'h-gh')u'\cos v-ghv'\sin v, h^2v').$$

因为粒子不受其他外力（更准确地说是力矩）作用（同样见[Lun91]），所以有以下命题.

命题 5.2.16 角动量的 z 分量不变.

证明 以 $L_z=k\cdot(\alpha\times\alpha')$ 表示 L 的 z 分量（其中 $\alpha=r$，$\alpha'=p$）. 因为 α 是测地线，所以

$$\frac{dL_z}{dt}=k\cdot(\alpha'\times\alpha')+k\cdot(\alpha\times\alpha'')$$
$$=|\alpha''|k\cdot(\alpha\times U),$$

记 $\alpha=x(u, v)=(h(u)\cos v, h(u)\sin v, g(u))$，又

$$U=\frac{x_u\times x_v}{|x_u\times x_v|}=\frac{(-g'h\cos v, -g'h\sin v, hh')}{|x_u\times x_v|},$$

则 $\alpha\times U$ 的 z 坐标为零. 从而 $k\cdot(\alpha\times U)=0$，所以 $dL_z/dt=0$，因此 L_z 是定值. ■

因此 $h^2v'=C$，其中 C 为定值. 进一步若 ϕ 是从 x_u 到 α' 的角，由于 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)=\sin\phi$，且 $x_v\cdot x_v=h^2$，则

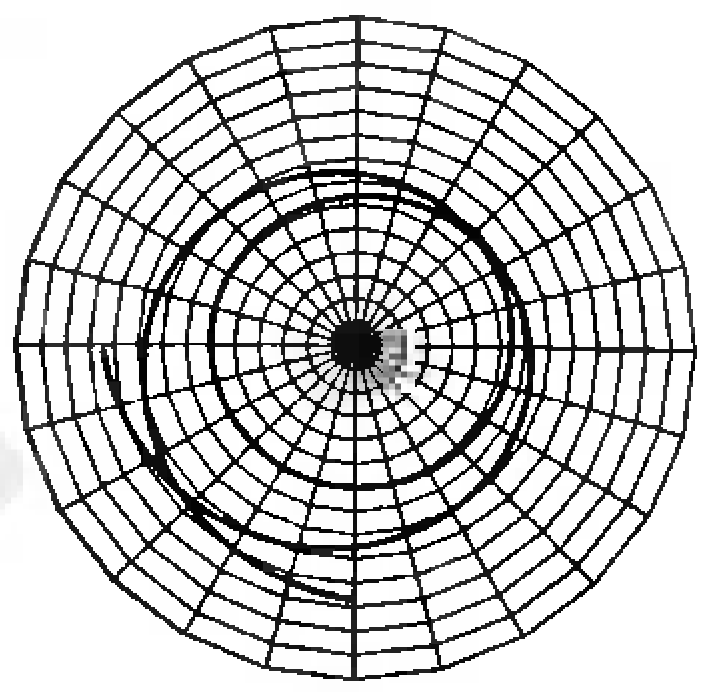
$$|\alpha'|h\sin\phi=\alpha'\cdot x_v=(u'x_u+v'x_v)\cdot x_v=h^2v'=C.$$

又 $|\alpha'|$ 为定值，则

$$h\sin\phi=\text{常数}.$$

由于 $h=\sqrt{G}$，上式恰好就是克莱罗关系式. 这样一来克莱罗关系式既是一个物理现象，也是一个数学关系式.（利用哈密顿原理推导克莱罗关系见练习 7.6.16.）

练习 5.2.17 M 为椭圆抛物面 $z=x^2+y^2$，$x(u, v)=(u\cos v, u\sin v, u^2)$ 是此旋转曲面的坐标补片，并设 $\alpha=x(u(t), v(t))$ 为单位速度的测地线. 用 u 表示 v 并证明克莱罗关系式为 $u\sin\phi=c$. 证明非子午线的测地线在抛物面上螺旋上升并和每条子午线相交无穷多次（如图 5-6 所示）. 提示：(1)利用克莱罗关系式；(2)对 v 的积分发散，可见 α 无法逼近子午线.


图 5-6 抛物面上的测地线

练习 5.2.18 对上述的抛物面 M 及其测地线 α，根据克莱罗关系式的中常数 c，确定 α 在 M 上最低点的位置. 当到达最低点的时候，观察测地线的情形. 由此证明非子午线的测地线与自身相交无数次. 提示：可利用下述不予

证明的结论：定理([dC76, section4-7, p. 302])），测地线以平行圆为极限，那么这个平行圆就是测地线. 抛物面上什么样的平行圆是测地线?

练习 5.2.19 确定悬链面上测地线的积分 v. 证明克莱罗关系式 $\cosh u\sin\phi=c$ 可推出测地线逼近 $u_0=0$ 的平行圆. 提示：取开始于 $x(u_0, v_0)$ 的测地线，其中 $\phi=\phi_0$. 考虑下述三种情形：$\cosh u_0\sin\phi_0=c<1$；$\cosh u_0\sin\phi_0=c=1$；$\cosh u_0\sin\phi_0=c>1$.

练习 5.2.20 确定单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上测地线的积分 v，并给出克莱罗关系式. 直接证明经过(1，0，0)的母线满足克莱罗关系式. 求双曲面上的闭合测地线. 提示：(1)母线的参数方程是 $\alpha(v)=(1, \tan v, \tan v)$(为什么?)，平行圆的参数方程是 $\beta(v)=(\cosh u_0\cos v, \cosh u_0\sin v, \sinh u_0)$. 中心平行圆$(\cos v, \sin v, 0)$是什么? (2)若 $\alpha(a)=\alpha(b)$，称测地线 $\alpha: [a, b]\to M$ 为闭合的. 什么时候平行圆是测地线?

239~240 5.3 关于完备性的简要讨论

在上述讨论中，都隐含假设测地线可以“无限延伸”，也就是想当然地认为测地线为单位速度曲线 $\alpha: \mathbb{R}\to M$，它的定义域是实数域. 事实上并非总是如此. 例如平面减去原点 $M=\mathbb{R}^2-\{(0, 0)\}$. 我们知道平面的测地线为直线，而 M 与平面有相同的测地线方程，所以 M 的测地线也应该是直线. 假设测地线起始点是(r, s)，方向是$(-r, -s)$. 由定理 5.2.3 知，在(0，0)点处存在唯一的测地线. 因为测地线是单位速度的，它的弧长(即经过的距离)对应于它的定义区间$[a, b]$的长度. 因为测地线不能经过原点，所以它历经的距离只能小于$\sqrt{r^2+s^2}$. 因此，区间$[a, b]$不能拓展到$\mathbb{R}$. 为什么会出现这样的情况呢?

为了回答这一问题，首先给出一个定义. 若每条(单位速度)测地线的定义域都是$\mathbb{R}$，则称曲面 M 是*测地完备的*. 下面优美的结论反映了这一定义的重要性，这里省去了定理的证明.

定理 5.3.1(霍普夫-瑞诺) *若 M 是测地完备的，则在所有连结 M 上两点的曲面的曲线中，测地线最短.*

当提到作为曲面 M 的居民时，自然假设可以以最短距离从一个点到达另外一个点. 然而如果生活在非测地完备的曲面上，那么就不是这种情况. 在 $M=\mathbb{R}^2-\{(0, 0)\}$上，就没有连结$(-1, 0)$，$(1, 0)$的测地线. 事实上，这些点之间不存在最短的路经. 所以现在的问题是，什么样的曲面是测地完备的曲面? 平面减去原点的例子给了我们提示. 回忆子集 $M\subseteq\mathbb{R}^3$ 为闭子集，若任意收敛序列 $z_i\to z$，当 $z_i\in M$ 时，有 $z\in M$. 下面的定理给出了曲面是测地完备的充分条件.

定理 5.3.2 *闭曲面 $M\subseteq\mathbb{R}^3$ 是测地完备的.*

证明 设 α 是 M 上的单位速度测地线. 若 $\alpha(s)$有定义，因为 α 是测地线方程的解，所以对某个 r，α 可以定义在一个开区间$(s-r, s+r)$上. 这意味着对于 $\alpha(s)$有定义的 $s\in\mathbb{R}$，存在一个小区间，使得 α 在这个小区间都有定义. 因此，α 有定义的点组成$\mathbb{R}$ 的开集——也就是开区间的并. 设 $I=(a, b)$为其中的一个开区间. $b<\infty$且 b 是 I 的最小上界. 事实上，可以证明 α 在 b 也有定义. 因此 I 不存在最小的上界(也就是说 $b=\infty$). 对 a 也有类似的结论，因此 α 的定义域是是整个实轴.

设 $z_i\to b$ 是 I 上收敛于 b 的点列. 因为点列收敛，所以它是柯西序列. 也就是对于任意给

定的 $\varepsilon>0$，存在整数 N，使得对任意的 n，$m>N$，有 $|z_n-z_m|<\varepsilon$. 因为 α 是单位速度的，所以从 $\alpha(z_n)$ 到 $\alpha(z_m)$ 的弧长为 $|z_n-z_m|<\varepsilon$. 由第 1 章中的知识，两点 p，$q\in\mathbb{R}^3$ 间的(最短的)距离是 $|q-p|$，这个距离由连结这两点间的线段给出. 因此， 241

$$|\alpha(z_n)-\alpha(z_m)|\leqslant|z_n-z_m|<\varepsilon.$$

这说明$\{\alpha(z_j)\}$也是柯西序列. 由数学分析知，对任意 n，欧几里得空间$\mathbb{R}^n$ 是完备的，故$\mathbb{R}^n$ 中的任意柯西序列都收敛. 所以存在 $w\in\mathbb{R}^3$，使得 $\alpha(z_j)\to w$. 而对于任意的 j，$\alpha(z_j)\in M$，又由假设 M 闭，故 $w\in M$. 因此可定义 $\alpha(b)=w$，即 α 在 b 处有定义，这与 b 的定义矛盾. 注意这里仅仅证明了 α 的定义域可连续地延拓到 b. 事实上，还需要一些技巧证明延拓是光滑的. ■

练习 5.3.3 到目前为止，我们研究过的哪些曲面是测地完备的?

5.4 非$\mathbb{R}^3$ 中的曲面

到目前为止，我们研究的都是 3 维空间中的曲面. 这个空间再加上通常的内积结构构成了一个欧几里得空间，其中自然具有欧几里得空间相关的内积——点积. 当然存在其他有意义的内积. 事实上，对于任意 $n\times n$ 的正定矩阵 A，x，$y\in\mathbb{R}^n$，由以下矩阵乘法

$$\langle x,y\rangle=x^tAy$$

可给出$\mathbb{R}^n$ 的一个内积，其中 x^t 表示 x 的转置，将列向量变为行向量. 取 A 为单位矩阵，就是通常意义下的内积. 在某种意义下，3 维空间中曲面的几何性质也反映了 3 维空间本身的性质. 若要把几何概念拓展到 3 维以上的空间中，就必须摆脱对点积的依赖——至少要修改这一概念. 回忆$\mathbb{R}^2$ 中点积的定义.（因为曲面的切平面是二维的，所以要用到$\mathbb{R}^2$ 中的向量.）设 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$，定义

$$x\cdot y=(x_1,x_2)\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2.$$

将矩阵变为$\begin{bmatrix}1/a&0\\0&1/a\end{bmatrix}$，其中 $a>0$，得到

$$x\circ y=(x_1,x_2)\begin{bmatrix}1/a&0\\0&1/a\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\frac{x_1y_1+x_2y_2}{a}=\frac{x\cdot y}{a},$$ 242

其中"$\cdot$"是点积，"$\circ$"是修正后的点积. 修正后的点积依然具有通常点积的性质(如对称性、双线性等). 对于曲面 M 的切平面中的内积，数 a 在每点 $p\in M$ 可能是不一样的. 也就是 a 为 M 上的函数，

$$a=f^2(p),\quad 其中\quad f:M\to\mathbb{R}且 p\in M.$$

这里取函数 $f(p)$的平方是为了保证 a 在每一点都是正的. 对任意的切向量v，$w\in T_p(M)$，有

$$v\circ w=\frac{v\cdot w}{f(p)^2}.$$

称 $\cdot$ 和 $\circ$ 是 M 的度量，因为可以利用它们计算 E，F，G，即沿 M 的距离的基本分量. 点积通常被称为欧几里得度量，$\circ$ 称为带有缩放因子 f 的共形度量(相对于欧几里得度量).

若曲面不再采用欧几里得度量那会是怎样呢? 虽然作为集合仍属于$\mathbb{R}^3$，但不同的度量使得它不能继承$\mathbb{R}^3$ 的一些几何性质. 故带有度量的曲面就不是$\mathbb{R}^3$ 中的曲面. 但如果不能使用$\mathbb{R}^3$ 的

结构(如单位法向量)怎样才能研究这些曲面的几何性质呢？数学中典型的方法是，若脱离了通常的情况就用之前的定理作为定义．因此不再用单位法向量来定义高斯曲率 K，而相应地利用定理 3.4.1 定义 K．注意，因为定理 3.4.1 保证 K 仅依赖于度量，所以这样的定义是有意义的．因此

定义 5.4.1(重要定义) 正交度量的曲面(即 $F=0$)的高斯曲率

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right).$$

当然，因为该公式是$\mathbb{R}^3$ 中曲面的一个定理，所以这一定义与前面的定义并不冲突．也就是说，若 M 取由$\mathbb{R}^3$ 的欧几里得度量诱导的度量时，此公式也成立．

练习 5.4.2 对于缩放因于 f 的共形度量，证明

$$K=f(f_{uu}+f_{vv})-(f_u^2+f_v^2).$$

若 $f_{uu}+f_{vv}=0$，则函数 f 称为调和的．若 f 为调和的，显然 $K\leqslant 0$．仅在 f 的临界点 $K=0$．取$\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$上缩放因子是 $f=\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)$的共形度量．计算 K，在平面上绘制 K 为常数时的曲线．

如下例所示，依然可以通过$\mathbb{R}^3$ 中的坐标补片 x 定义曲面，只是它的度量是共形度量而不

243 是诱导度量．这些和前面的做法一样．而了解这些抽象的微分几何是研究高维几何的第一步．

例 5.4.3(庞加莱平面) P 是上半平面 $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y>0\}$，坐标补片是 $x(u,v)=(u,v)$，共形度量是

$$w_1\circ w_2=\frac{w_1\cdot w_2}{v^2},\quad 其中\quad w_1,w_2\in T_p(P),且\ p=(u,v).$$

这一度量定义的长度是通常点积定义的 $1/p$(即 $1/v$)．计算 p 点的 E，F，G，得

$$x_u=(1,0),\quad x_v=(0,1);$$

$$E=x_u\circ x_u=\frac{1}{v^2},\quad F=x_u\circ x_v=0,\quad G=x_v\circ x_v=\frac{1}{v^2}.$$

注意 $G_u=0$，$E_v=-\frac{2}{v^3}$．因此

$$\begin{aligned}K&=-\frac{1}{2\sqrt{1/v^4}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-2/v^3}{\sqrt{1/v^4}}\right)\right)\\&=-\frac{v^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{2}{v}\right)\right)\\&=-\frac{v^2}{2}\cdot\frac{2}{v^2}\\&=-1.\end{aligned}$$

故 P 在每一点的曲率都等于-1．P 同$\mathbb{R}^3$ 中的单位球面一样是“负曲率”曲面．

练习 5.4.4 上半空间构成的曲面 $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y>0\}$的坐标补片是 $x(u,v)=(u,v)$，共形度量是

$$w_1 \circ w_2 = \frac{w_1 \cdot w_2}{v}, \quad 其中 \quad w_1, w_2 \in T_p(P), \quad 且\ p = (u, v).$$

计算 M 的高斯曲率 K.

例 5.4.5（双曲平面 H） H 是平面上半径为 2 的不包含边界圆的圆盘，其坐标补片为 $x(u,\ v)=(u\cos v,\ u\sin v)$，$0 \leqslant u < 2$，$0 \leqslant v < 2\pi$，共形度量是

$$w_1 \circ w_2 = \frac{w_1 \cdot w_2}{(1-u^2/4)^2}, \quad 其中 \quad w_1, w_2 \in T_p(H), \quad 且\ p = (u\cos v, u\sin v).$$

练习 5.4.6 证明 $K=-1$.

例 5.4.7（球极球面 S_N^2） 设 S_N^2 表示除去北极点的单位球面 $S^2-\{(0,\ 0,\ 1,)\}$，定义映射 St：$S_N^2 \to \mathbb{R}^2$（其中$\mathbb{R}^2$ 是 xy 平面），映射的像是原像与北极的连线与$\mathbb{R}^2$ 的交点．给定 S_N^2 上的点 $p=(\cos u\cos v,\ \sin u\cos v,\ \sin v)$，连结 p 和 N 的直线是 244

$$\gamma(t) = (0,0,1) + t(\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v - 1).$$

第三个坐标为零的点是直线 γ 与$\mathbb{R}^2$ 的交点，即 $1+t(\sin v-1)=0$，$t=1/(1-\sin v)$．因此，

$$\mathrm{St}(\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v) = \left(\frac{\cos u\cos v}{1-\sin v}, \frac{\sin u\cos v}{1-\sin v}, 0\right).$$

显然，St 是 S_N^2 到$\mathbb{R}^2$ 的一一的到上的映射．回忆对 u，v 曲线的像取相应的导数，就可以得到切向量诱导的线性变换 St_*．例如取定 v，微分得

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_*(x_u) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\cos u\cos v}{1-\sin v}, \frac{\sin u\cos v}{1-\sin v}, 0\right) \\ &= \left(\frac{-\sin u\cos v}{1-\sin v}, \frac{\cos u\cos v}{1-\sin v}, 0\right).\end{aligned}$$

类似地对 v 微分，得

$$\mathrm{St}_*(x_v) = \left(\frac{\cos u}{1-\sin v}, \frac{\sin u}{1-\sin v}, 0\right).$$

在 S_N^2 上定义新的度量

$$w_1 \circ w_2 = \mathrm{St}_*(w_1) \cdot \mathrm{St}_*(w_2),$$

其中 $\cdot$ 表示球面在$\mathbb{R}^3$ 中的诱导度量.

练习 5.4.8 对于 S_N^2 的度量是 $\circ$，证明

$$E = \frac{\cos^2 v}{(1-\sin v)^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{(1-\sin v)^2}.$$

并计算高斯曲率 K，解释答案.

例 5.4.9（平坦的环面 T_{flat}） 虽然标题是"非$\mathbb{R}^3$ 的曲面"，但前面的曲面作为集合都是$\mathbb{R}^3$中的集合．当然也可以定义维数不为 3 的欧几里得空间点的集合，并给这个集合一个诱导的度量．一个著名的例子就是$\mathbb{R}^4$ 中平坦的环面．设 T_{flat} 的坐标补片为 $x(u,\ v)=(\cos u,\ \sin u,\ \cos v,\ \sin v)$，其中 $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant v \leqslant 2\pi$，值域在$\mathbb{R}^4$ 中，度量是$\mathbb{R}^4$ 的度量（即点积）．和前面一样计算 x_u，x_v，得 $E=1$，$F=0$，$G=1$．因此 $K=0$，T_{flat}是平坦的．再次强调此例中没有采用共形度量，而是用了高维的欧几里得度量. 245

练习 5.4.10 验证上述平坦环面 T_{flat}的结果，证明可以定义从 T_{flat}到通常环面的一一的、

到上的映射，从而这个名字是有意义的. 因为平坦的环面在$\mathbb{R}^4$中是闭的而且有界，所以它是紧的. 可以将这个平坦的环面嵌入为$\mathbb{R}^3$中一个曲面吗(即$T_{flat}\subseteq\mathbb{R}^3$，度量是$\mathbb{R}^3$的诱导度量)? 试说明.

撇开高斯曲率的定义，我们更想通过测地线研究这些曲面的性质. 再次面对刚刚提到的问题，就是从前面所有关于测地线的讨论中抹去单位法向量的痕迹. 有一种很简单的方法. 计算$\mathbf{x}_{uu}$，$\mathbf{x}_{uv}$，$\mathbf{x}_{vv}$的克里斯朵夫记号时没有用到U. 因此对于非$\mathbb{R}^3$的曲面，这些公式仍然成立. 特别地，α''的式子与原先相同，只是不含最后包含U的项. 即

$$\alpha''=\mathbf{x}_u\left[u''+\frac{E_u}{2E}u'^2+\frac{E_v}{E}u'v'-\frac{G_u}{2E}v'^2\right]+\mathbf{x}_v\left[v''-\frac{E_v}{2G}u'^2+\frac{G_u}{G}u'v'+\frac{G_v}{2G}v'^2\right].$$

如前所述，α为测地线的充分必要条件就是满足两个测地线方程. 现在回想一下最初是怎样用测地曲率来定义测地线的. 对单位速度曲线α，有

$$\alpha''=\kappa_g U\times T+(\alpha''\cdot U)U.$$

当然，现在不能用U，所以必须去掉最后一项且使第一项有意义. 前面之所以用切向量$U\times T$是为了得到了$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基$\{T, U\times T, U\}$，其中T和$U\times T$是曲面在任意点处切平面的标准正交基. 虽然在非$\mathbb{R}^3$中的曲面上没有单位法向量，但是仍可以在每个切平面内找到垂直于T的切向量. 方法如下：给定坐标补片$\mathbf{x}(u, v)$，定义每个切平面的线性变换J：

$$J\left(\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}\right)=\frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}},\quad J\left(\frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}\right)=-\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}.$$

注意，定义了J在每个切平面的基上的作用，自然就得到J在整个切平面上的作用. 同时，J把单位向量变为单位向量. 即J不影响向量的长度，而只是旋转切平面上的向量.

练习 5.4.11 假设α: $I\to M$是$\mathbb{R}^3$中曲面M上的曲线(即有$\mathbb{R}^3$中的诱导度量). 为方便起见，设α是单位速度的. 假定坐标补片是正交的，即$F=0$. 证明$J(T)=U\times T$. 提示：$\alpha'=$
246 $u'\mathbf{x}_u+v'\mathbf{x}_v$且$J$是线性的.

因为对$\mathbb{R}^3$中的曲面有$J(T)=U\times T$(根据练习 5.4.11)，所以可以用下述方程定义单位速度曲线$\alpha(t)$的测地曲率. 非单位速度的情形也是一样，只是没有U项.

$$\begin{aligned}\alpha''&=\kappa_g J(T)\\ J(T)&=J(u'\mathbf{x}_u+v'\mathbf{x}_v)\\ &=u'J(\mathbf{x}_u)+v'J(\mathbf{x}_v)\\ &=u'\sqrt{\frac{E}{G}}\mathbf{x}_v-v'\sqrt{\frac{G}{E}}\mathbf{x}_u,\end{aligned}$$

故

$$\alpha''=-\kappa_g v'\sqrt{\frac{G}{E}}\mathbf{x}_u+\kappa_g u'\sqrt{\frac{E}{G}}\mathbf{x}_v.$$

比较α''表达式中$\mathbf{x}_u$的系数和前面用来定义测地线方程的α''对应的系数，有

$$-\kappa_g v'\sqrt{\frac{G}{E}}=u''+\frac{E_u}{2E}u'^2+\frac{E_v}{E}u'v'-\frac{G_u}{2E}v'^2,$$

$$\kappa_g=\frac{-u''}{v'}\sqrt{\frac{E}{G}}-\frac{E_u}{2\sqrt{EG}}\frac{u'^2}{v'}-\frac{E_v}{\sqrt{EG}}u'+\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}v'.$$

我们给出一个更易于理解的记法. 设 θ 表示 α' 和 x_u 之间的夹角，因为 α 是单位速度的，所以

$$\begin{aligned}\alpha' &= u'x_u+v'x_v\\ &=\cos\theta\frac{x_u}{\sqrt{E}}+\sin\theta\frac{x_v}{\sqrt{G}}.\end{aligned}$$

因此，$u'\sqrt{E}=\cos\theta$，$v'\sqrt{G}=\sin\theta$.

对第一个式子求导，代入第二式，

$$u''\sqrt{E}+u'\frac{E_uu'+E_vv'}{2\sqrt{E}}=\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$u''\sqrt{E}+\frac{E_uu'^2}{2\sqrt{E}}+\frac{E_vu'v'}{2\sqrt{E}}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$u''\sqrt{E}+\frac{E_uu'^2}{2\sqrt{E}}+\frac{E_vu'v'}{2\sqrt{E}}=-\sqrt{G}v'\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{-u''}{v'}\sqrt{\frac{E}{G}}-\frac{E_uu'^2}{2v'\sqrt{EG}}-\frac{E_vu'}{2\sqrt{EG}}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

比较它和上面 κ_g 的表达式，得到以下定理. 247

定理 5.4.12 *$\alpha(t)$ 为曲面 M: $x(u, v)$ 上的单位速度曲线，θ 表示 α' 和 x_u 之间的夹角. 则 α 的测地曲率是*

$$\kappa_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2\sqrt{EG}}[G_uv'-E_vu'].$$

注意这里并没有指定坐标补片 $x(u, v)$ 的值域，这说明 κ_g 的表达式对于非 $\mathbb{R}^3$ 的曲面仍然成立. 我们将在第 6 章再次讨论测地曲率，届时将用不同的方法得到上面的公式.

以下求具体的测地线. 前面用测地线方程得到测地线的方法依然可行. 特别地，u，v-克莱罗参数化的概念仍有意义，且同样可以简化测地线方程. 注意相比较依赖于 $\mathbb{R}^3$ 中的点积的性质，克莱罗参数化的坐标补片的一些性质实际上依赖于度量的定义.

例 5.4.13（庞加莱平面 P） 坐标补片 $x(u, v)=(u, v)$ 是 v-克莱罗参数方程，其共形度量是

$$w_1\cdot w_2=\frac{w_1\cdot w_2}{v^2}\quad 其中\quad w_1, w_2\in T_p(P),\quad 且\ p=(u,v),$$

故对 $\alpha=x(u(t), v(t))$，由测地线方程得

$$u''-\frac{2}{v}u'v'=0,\quad v''+\frac{1}{v}u'^2-\frac{1}{v}v'^2=0.$$

因为坐标补片是 v-克莱罗参数化的，所以从第一个测地线方程，由通常的计算测地线的方法，得 $u'=0$ 或者

$$\frac{u''}{u'}=\frac{2}{v}v'$$

$$\ln(u')=2\ln(v)+c$$

$$u'=cv^2.$$

代入单位速度关系 $1=u'^2(1/v^2)+v'^2(1/v^2)$，得 $v'=\pm v\sqrt{1-c^2v^2}$．用 u' 除 v'，积分得

$$\int du=\int\frac{cv}{\sqrt{1-c^2v^2}}dv$$

$$u-d=\frac{1}{c}\int \sin w dw \quad 其中\ v=\frac{1}{c}\sin w$$

$$=\frac{-1}{c}\cos w$$

$$=\frac{-1}{c}\sqrt{1-c^2v^2}$$

$$c^2(u-d)^2=1-c^2v^2$$

248 $$(u-d)^2+v^2=\frac{1}{c^2}.$$

这是圆心在 u 轴上的圆．同样因为坐标补片是 v-克莱罗参数化的，竖直线（即 v-参数曲线）也是测地线，这是 $u'=0$ 的情形．所以庞加莱平面 P 的测地线是圆心在 u 轴上的圆弧和竖直线（如图 5-7 所示）．这些都是 P 的"直线"．

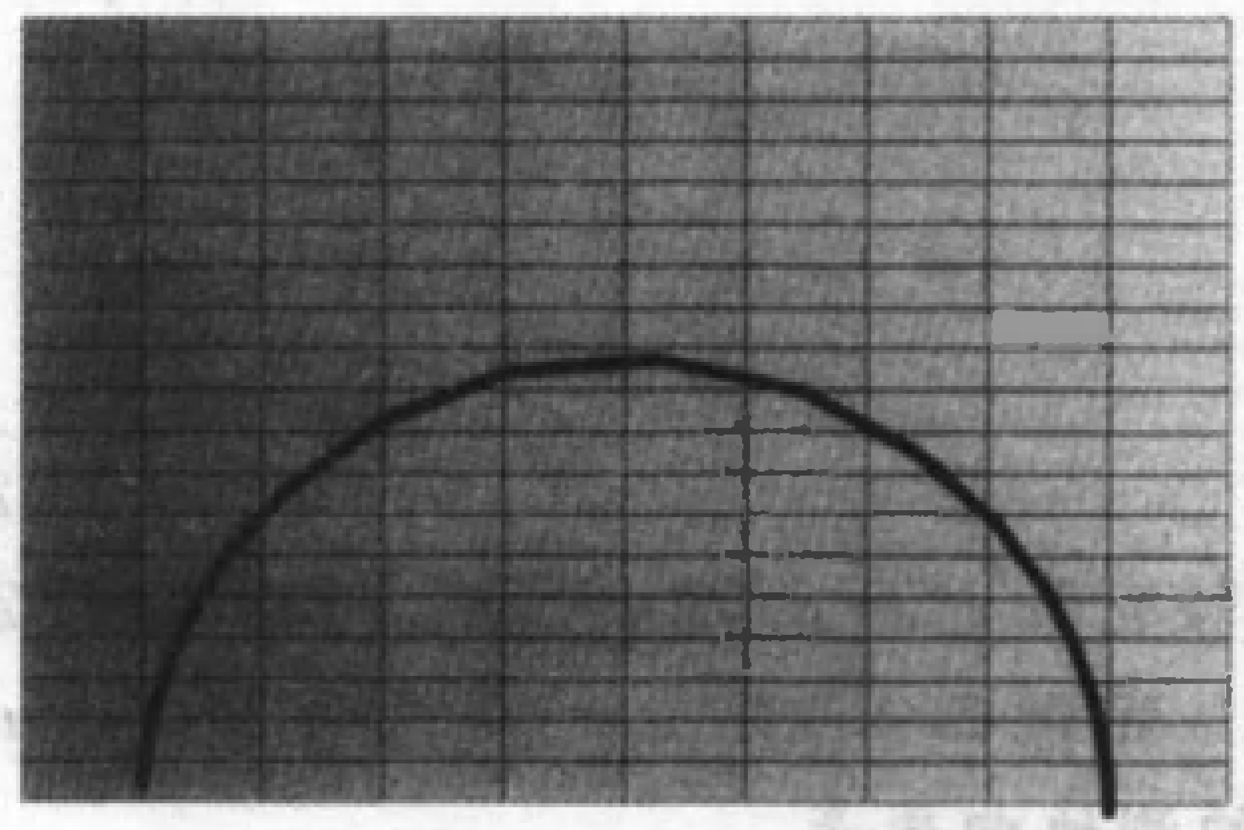


图 5-7　庞加莱平面的测地线

练习 5.4.14　证明对庞加莱平面平行公理不成立．平行公理是：过直线外一点，存在唯一的一条直线平行于已知直线．庞加莱平面是高斯、罗巴切夫斯基、鲍耶的非欧几里得几何的一个典型例子．

练习 5.4.15　求练习 5.4.4 中曲面 M 的测地线．

例 5.4.16（双曲平面 H）　如下计算测地线：因为 x 是 u-克莱罗参数化的，u-参数曲线为测地线．因此，经过(0，0)的径向线是测地线．对于非 u-参数曲线的测地线，应用克莱罗积分公式（化简后）得

$$v=\int\frac{c(1-u^2/4)}{u^2\sqrt{1-\left(\frac{c(1-u^2/4)}{u}\right)^2}}du.$$

虽然很复杂，但是可以作如下处理．

249 **练习 5.4.17**　设 $w=\frac{c}{u\sqrt{1+c^2}}(1+u^2/4)$，证明 $dv=\mp\frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}$．

那么，$\int dv=\int\frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}$，$v-v_0=\cos^{-1}w$．记为 $\cos(v-v_0)=w$ 或者

$$\cos(v-v_0)=\frac{c}{u\sqrt{1+c^2}}(1+u^2/4)$$

$$\frac{4u\sqrt{1+c^2}}{c}\cos(v-v_0)=4+u^2$$

$$u^2+4-\frac{4u\sqrt{1+c^2}}{c}\cos(v-v_0)=0.$$

为了更好地说明这一方程，用直角坐标(x, y)：$x=u\cos v$，$y=u\sin v$ 代替极坐标(u, v)，将$\cos(v-v_0)$展开为 $\cos v\cos v_0+\sin v\sin v_0$，配方，有

$$u^2+4-\frac{4\sqrt{1+c^2}}{c}\cos v_0 u\cos v-\frac{4\sqrt{1+c^2}}{c}\sin v_0 u\sin v=0$$

$$x^2+y^2+4-\frac{4\sqrt{1+c^2}}{c}\cos v_0 x-\frac{4\sqrt{1+c^2}}{c}\sin v_0 y=0$$

$$\left(x-\frac{2\sqrt{1+c^2}}{c}\cos v_0\right)^2+\left(y-\frac{2\sqrt{1+c^2}}{c}\sin v_0\right)^2-\frac{4(1+c^2)}{c^2}+4=0$$

$$\left(x-\frac{2\sqrt{1+c^2}}{c}\cos v_0\right)^2+\left(y-\frac{2\sqrt{1+c^2}}{c}\sin v_0\right)^2=\frac{4}{c^2}.$$

这个方程描述了一个圆心在 H 外的圆$\left(因为\frac{2\sqrt{1+c^2}}{c}>2\right)$，而且该圆和 H 的边界圆 $x^2+y^2=4$ 相交为直角. 因此双曲平面的测地线是从原点出发的径向线和圆心在 H 外半径为 2 且与 H 正交的圆.

练习 5.4.18 证明上述圆与 $x^2+y^2=4$ 相交为直角. 提示：$\left(\frac{2\sqrt{1+c^2}}{c}\right)^2=2^2+\left(\frac{2}{c}\right)^2$.

再次注意，给定测地线外一点，过此点与已知的测地线平行的线存在无数条. 双曲平面也是高斯、罗巴切夫斯基、鲍耶的非欧几里得几何的一个典型代表. 事实上，双曲平面与庞加莱平面等距，也就是从微分几何的观点来看，它们没有区别. 下面是更深入的简短讨论.

练习 5.4.19 求球极球面 S^2_N 的测地线. 提示：(1)坐标补片为 v 克莱罗参数化的；(2)作代换$\frac{\cos v}{1-\sin v}=c\sec\theta$；(3)如同一般球面，测地线位于某一类平面——这些平面经过球面的一个特定点. 250

练习 5.4.20 设 $x(r, \theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$为 xy 平面的极坐标形式的坐标补片. 证明球极平面射影的逆是

$$\mathrm{St}^{-1}(r\cos\theta, r\sin\theta)=\left(\frac{2r\cos\theta}{1+r^2},\frac{2r\sin\theta}{1+r^2},\frac{r^2-1}{1+r^2}\right).$$

以 $w_1\circ w_2=\mathrm{St}^{-1}(w_1)\cdot\mathrm{St}^{-1}(w_2)$作为平面度量的定义，其中 $\cdot$ 表示通常球面的度量. 这一曲面称为球极平面. 证明

$$E=\frac{4}{(1+r^2)^2},\quad F=0,\quad G=\frac{4r^2}{(1+r^2)^2},$$

且 $K=\pm 1$. 仿照双曲平面的方法，求球极平面的测地线. 特别地，代换 $w=c(1-r^2)/2r\sqrt{1-c^2}$很有用. 单位圆和经过原点的直线是测地线，为什么？最后，证明所有的测地线都与单位圆相交，而且交角 β 满足 $\cos\beta=c$，其中 c 为克莱罗常数且测地线的公式变为$(x+\tan\beta\cos\theta_0)^2+(y+\tan\beta\sin\theta_0)^2=\sec^2\beta$(这是一个圆). 见 5.6.5 小节.

5.5 等距和共形映射

M：$x(u, v)$和 N：$y(r, s)$是两个曲面. 若存在从 x 的定义域到 y 的定义域的光滑函数 r，s，可定义曲面的映射 I：$M\to N$，$I(x(u, v))=y(r(u, v), s(u, v))$. 称 I 是(局部)等距的，若

$$E_x = x_u \circ_x x_u = I_*(x_u) \circ_y I_*(x_u),\quad G_x = x_v \circ_x x_v = I_*(x_v) \circ_y I_*(x_v).$$

这里和以往一样，假设坐标补片是正交坐标补片，因此 $0=F_x=I_*(x_u)\circ_y I_*(x_v)$，因为由链式法则可得 $I_*(x_u)=y_r r_u+y_s s_u$，$I_*(x_v)=y_r r_v+y_s s_v$，所以可以用一个很清楚的公式判断映射是否为等距的. 即

$$E_x = x_u \circ_x x_u = E_y r_u^2 + G_y s_u^2\quad G_x = x_v \circ_x x_v = E_y r_v^2 + G_y s_v^2.$$

在练习 3.2.4 中，对于同一曲面的两种参数形式（I 是恒等映射）的特殊情形，也得到了同样的公式. 而且相同的计算得到（这里 $F=0$）$E_xG_x=[r_u s_v - r_v s_u]^2 E_y G_y$，将其代入定义 K 的公式（相当冗长的计算），得到如下基本定理.

定理 5.5.1　若 I：$M\to N$ 是等距的，则在对应点处有相同的高斯曲率. 即对任意 $p\in M$，
251 $K_M(p)=K_N(I(p))$.

练习 5.5.2　由练习 3.4.2，曲面（如图 5-8 所示）

$$x(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

$$y(r,s) = (r\cos s, r\sin s, \ln r)$$

的高斯曲率都是 $K=-1/(1+w^2)^2$，其中 w 分别代表 u 和 r. 证明这两个曲面不等距. 提示：若是等距，必有 $r(u,v)=u$（不考虑符号），$E_x=E_y r_u^2+G_y s_u^2$ 是否成立？

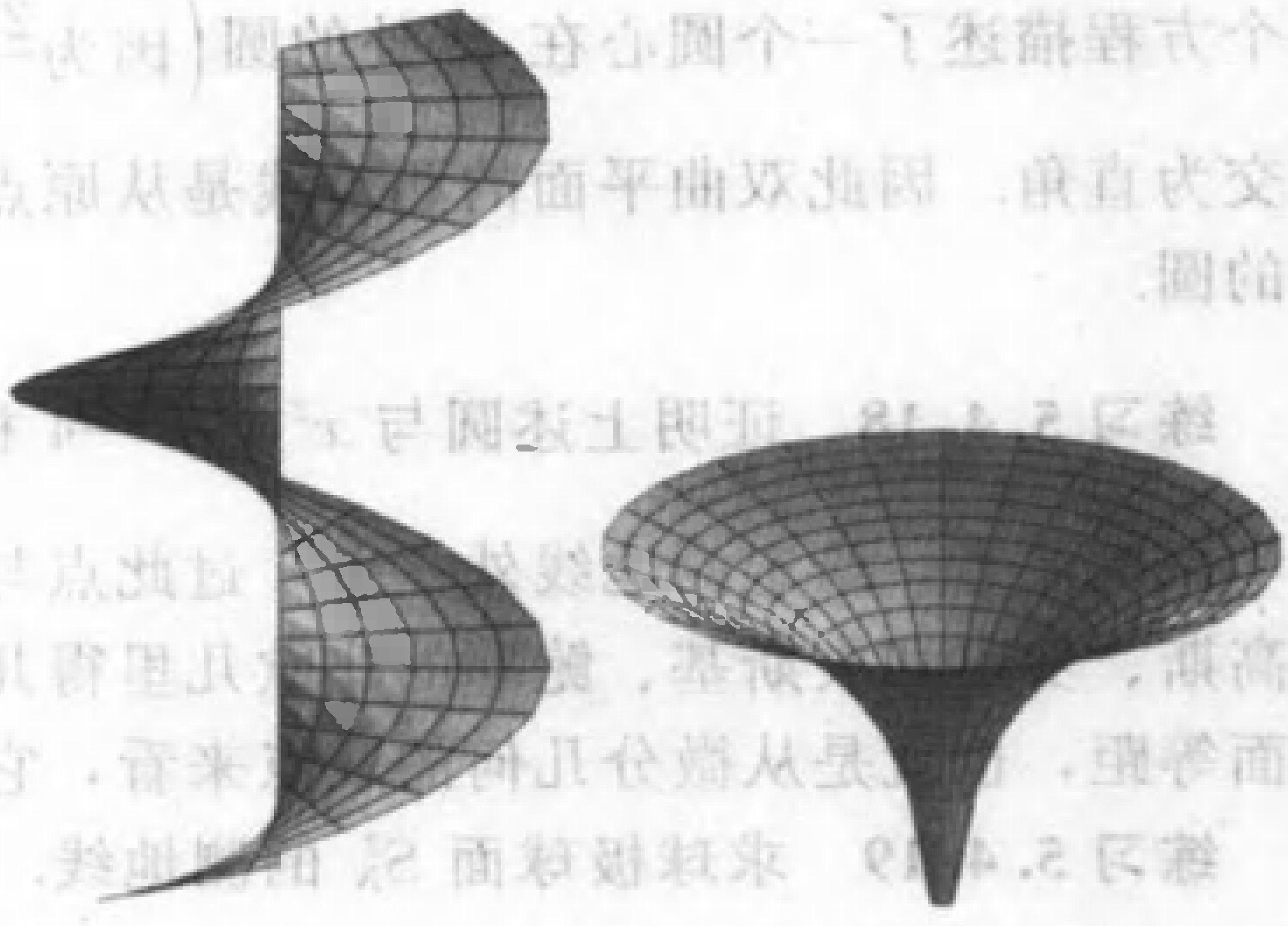


图 5-8　K 相同的非等距曲面

注记 5.5.3　若参数的定义域相同，且函数 r，s 为投射，$r(u,v)=u$，$s(u,v)=v$，则等距保持度量：

$$E_x = E_y,\quad F_x = F_y,\quad G_x = G_y. \tag{5.5.1}$$

事实上，很多学者称 $r(u,v)$ 和 $s(u,v)$ 给出曲面 N 新的参数形式 $\bar{y}(u,v)=y(r(u,v),s(u,v))$. 映射可定义为 $I(x(u,v))=\bar{y}(u,v)$，是否等距的问题就简化为判断上面的等式是否成立. 当然需要验证这个特殊的映射是可参数化的. 为避免这一点且使得下面练习和例子更加清楚，我们选择确定的函数 r，s. 但事实上，上面的例子是很重要的. 只要映射 I：$M\to N$ 是局部一一对应（即选取 M 上每点的一个小邻域，在这个领域上 I 为一一的）且 I 满足
252 (5.5.1)，则 I 给出了 N（M 的邻域的像）新的参数形式，且在此邻域上 I 是一一的.

显然，等距保持切向量的长度（因为每个切向量都是 x_u 和 x_v 的线性组合）. 事实上，"等距"是由古希腊语的"相同度量"演化而来，而且公式（其中 · 表示内积）

$$\cos(\theta) = \frac{v\cdot w}{|v||w|}$$

表明等距也保持向量间的夹角，其中 θ 为向量 v，w 之间的夹角.

由反函数定理，对于 M 上每点存在一个小开邻域，使得 I 在此邻域内有光滑的反函数. 当 I 是一一到上的，且存在光滑的整体的反函数 I^{-1}：$N\to M$，称 I 是整体等距的. 虽然这里给出的不是等距最一般的定义，但对于本书中的例子已经足够. 下面验证其中一些例子.

例 5.5.4（螺旋面）　曲面 M，N 的坐标补片分别是 $x(u,v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ v)$，

$\mathbf{y}(r,\ s)=(\sinh r\cos s,\ \sinh r\sin s,\ s)$. 将第一个曲面看作标准的螺旋面，定义映射 $I: M\to N$，$I(\mathbf{x}(u,\ v))=\mathbf{y}(\sinh^{-1}u,\ v)$. 令 $r=\sinh^{-1}u$，$s=v$，相应的非零偏导数是 $r_u=1/\cosh r=1/\sqrt{1+u^2}$，$s_v=1$. 而 $E_x=1=(1/\cosh^2 r)\cosh^2 r=E_y r_u^2$，$G_x=1+u^2=\cosh^2 r=G_y s_v^2$. 因此 I 为等距. 显然，I 是一一的、到上的，且有光滑的反函数 $I^{-1}(\mathbf{y}(r,\ s))=\mathbf{x}(\sinh r,\ s)$，故 I 是整体等距的.

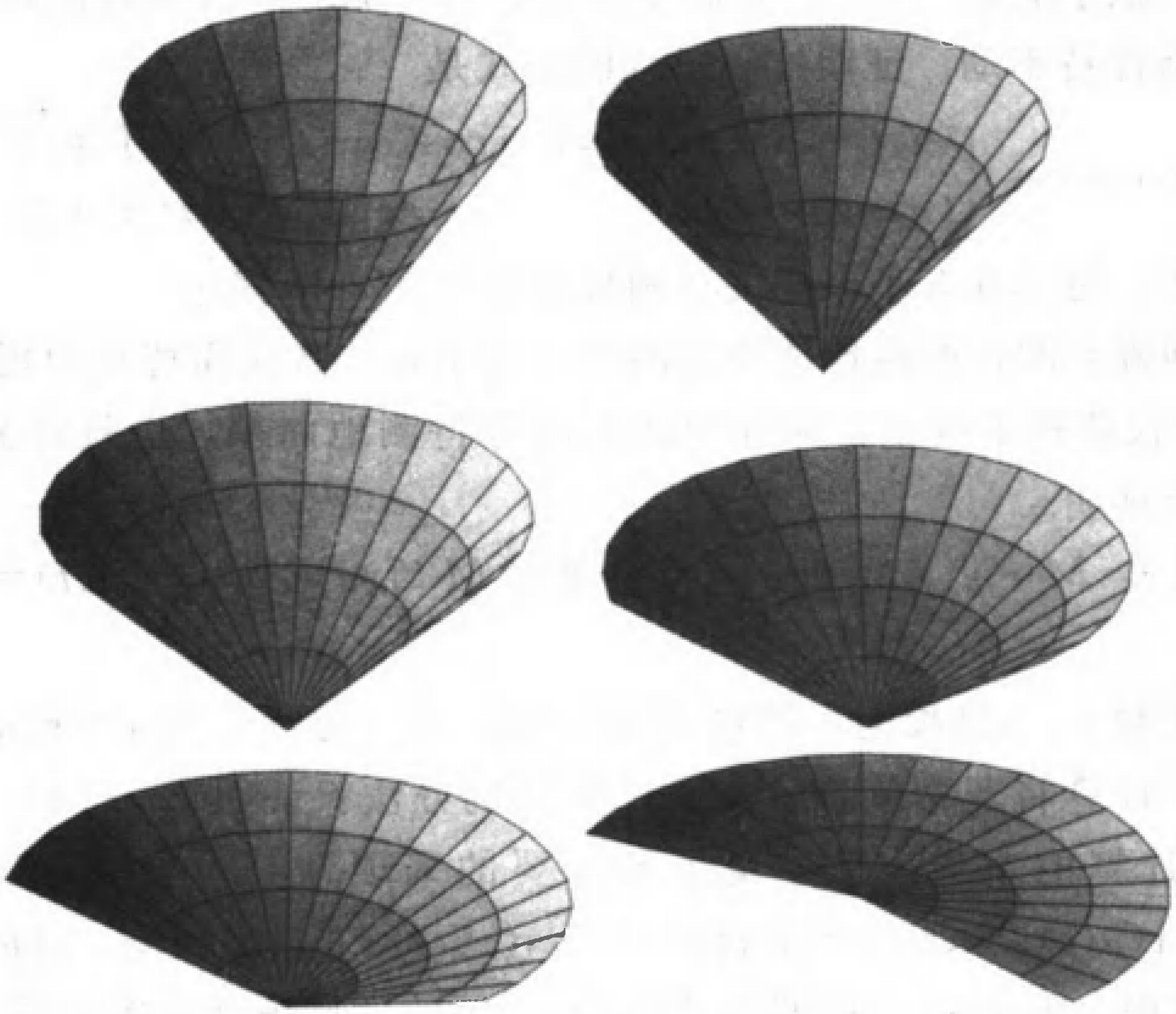


图 5-9 圆锥的展开过程

练习 5.5.5 设圆锥面 $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ 的坐标补片为 $\mathbf{x}(u,\ v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ au)$，$\phi$ 表示圆锥面的顶角. 证明 $\sin\phi=1/\sqrt{1+a^2}$. 若沿母线将圆锥剪开，可将其展成一个扇形(如图 5-9 所示). 设扇形的顶角为 θ，证明 $\theta=2\pi\sin\phi$. 对于 $0\leqslant t\leqslant 1$，

$$\left(u\sqrt{1+ta^2}\cos\left(\frac{v}{\sqrt{1+ta^2}}\right), u\sqrt{1+ta^2}\sin\left(\frac{v}{\sqrt{1+ta^2}}\right), au\sqrt{1-t}\right)$$

给出了展开的过程. 验证这一映射给出了上述展开. 证明对于任意固定的 t，映射 $I(u\cos v,\ u\sin v,\ au)=\mathbf{y}^t(u,\ v)$ 是等距的. 最后说明 I 将圆锥上的测地线映为平面的测地线(即直线). 提示：在最后一步作代换 $w=AB/(A-B\tan(v/\sqrt{1+a^2}))$，其中 $A=c/\sin D$，$B=c/\cos D$，其中 c，D 是圆锥的测地线的参数. 见练习 5.6.6.

练习 5.5.6 转动顶角为 ϕ 的圆锥面，使其底面位于 xy 平面上. 将一个长为 L 的带圈的绳索套到圆锥上(如图 5-10 所示)，拉绳索的自由端，使圆圈紧绕在圆锥上. 绳索是什么形状？更特别地，绳索是从顶端往下滑呢，还是固定不动呢？答案是否依赖于顶角呢？试说明. 提示：(1)绳索变成了什么样的曲线？如果绳索不动，那么它受

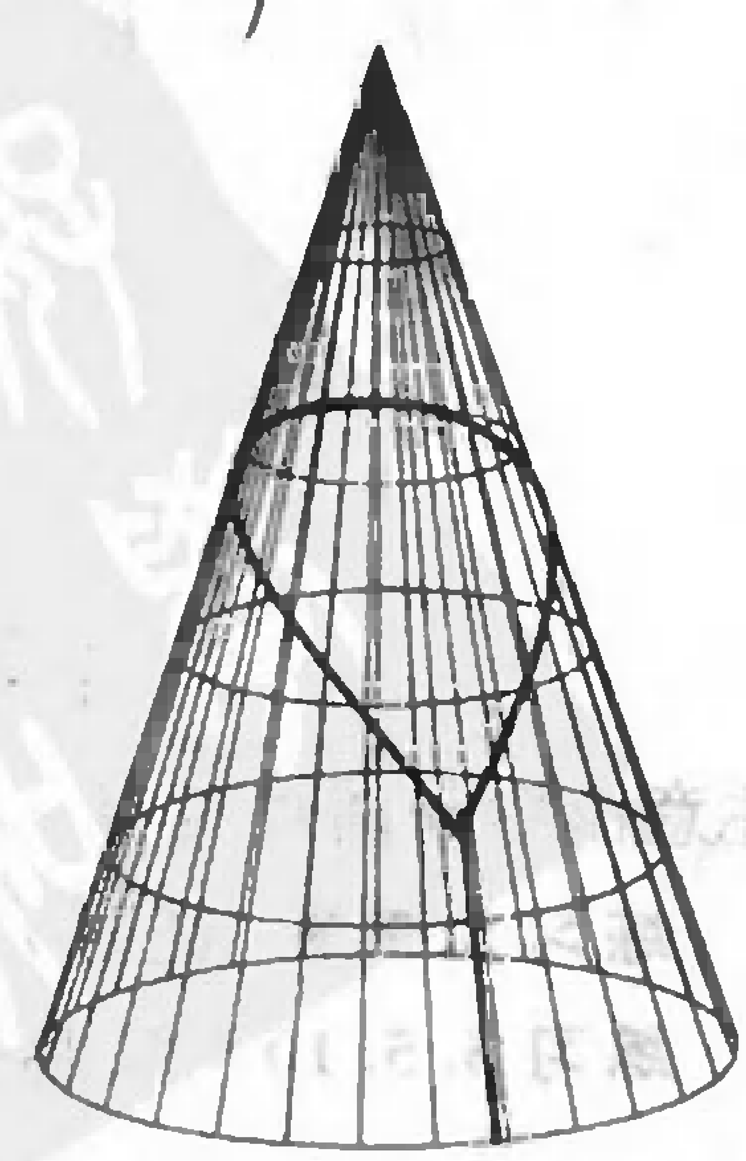


图 5-10 带有绳索的圆锥

那些力的作用？是否有切方向上的力？若无，曲线的加速度沿哪个方向？(2)沿绳索结点所在的母线展开圆锥，曲线变成什么样子？若 ϕ 很大又会怎样？

练习 5.5.7 对于位于 x 轴的圆柱 $\mathbf{x}(u, v)=(u, \cos v, 1+\sin v)$，求它的展开映射(从圆柱的上面往下剪开)．证明对任意固定的 t，这一映射为等距．进而证明圆柱上的测地线在等距 I 的作用下映成了平面的直线．提示：分别考虑左侧和右侧．向右旋转圆柱的右半边，当有一点接触到 x 轴时，就保持不动．证明这一过程的公式是

$$I(u,v,t)=\begin{cases}(u,t+\sin(v-t),1-\cos(v-t)) & \text{对于 } t\leqslant v;\\ (u,v,0) & \text{对于 } t\geqslant v.\end{cases}$$

给出左侧的展开公式，见 5.6.3 小节中关于圆柱展开的 Maple 程序．

展开映射 I 将圆锥和圆柱的测地线映为测地线并不是这些曲面特有的现象．实际上，由定理 5.1.5，测地曲率仅依赖于度量，因此等距必然保持测地曲率，也就将测地线映为测地线．下面给出另外的一个证明．

定理 5.5.8 *设 I：$M\to N$ 为等距，$\alpha(t)$ 是曲面 M 的测地线，则 $\beta(t)=I(\alpha(t))$ 是 N 的测地线.*

证明 若上述函数 r，s 是投射，结论是显然的．另一方面，若 $r=r(u, v)$，$s=s(u, v)$ 是一般的光滑函数，计算将非常复杂．取一个折中的办法，证明 $r=r(u)$，$s=s(v)$ 时定理成立．这样既包含了计算的本质，又避免了不必要的繁琐计算．取 $I(\mathbf{x}(u, v))=\mathbf{y}(r(u), s(v))$，$I(\alpha(t))=I(\mathbf{x}(u(t), v(t)))=\mathbf{y}(r(u(t)), s(v(t)))$．只需证明，$r(u(t))$，$s(v(t))$满足 $\mathbf{y}$ 度量下的测地线方程．关于 r，s 的假设意味着 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ 的度量满足下述关系：

253~255

$$E_x=E_y r_u^2,\quad G_x=G_y s_v^2,\quad E_y=E_x u_r^2,\quad G_y=G_x v_s^2.$$

由链式法则，得

$$r'=r_u u',\quad s'=s_v v',\quad u'=u_r r',\quad v'=v_s s',\quad r''=r_{uu}u'^2+r_u u''.$$

现将 r，s 代入第一个测地线方程，并且利用上面的计算结果．因为 α 满足 M 的测地线方程，所以有

$$\begin{aligned}
r''+\frac{E_{y_r}}{2E_y}r'^2+\frac{E_{y_s}}{E_y}r's'-\frac{G_{y_r}}{2E_y}s'^2 &= r''+\frac{E_{x_u}u_r^3+2E_x u_r u_{rr}}{2E_x u_r^2}r'^2+\frac{E_{x_v}v_s u_r^2}{E_x u_r^2}r's'-\frac{G_{x_u}v_s^2 u_r}{2E_x u_r^2}s'^2\\
&= r''+\frac{E_{x_u}}{2E_x}u_r r'^2+\frac{u_{rr}}{u_r}r'^2+\frac{E_{x_v}}{E_x}v_s r's'-\frac{G_{x_u}}{2E_x}\frac{v_s^2 s'^2}{u_r}\\
&= r''+\frac{E_{x_u}}{2E_x}u'^2 r_u+\frac{u''}{u_r}-r''+\frac{E_{x_v}}{E_x}r_u u'v'-\frac{G_{x_u}}{2E_x}\frac{v'^2}{u_r}\\
&= \frac{1}{u_r}\left[u''+\frac{E_u}{2E}u'^2+\frac{E_v}{E}u'v'-\frac{G_u}{2E}v'^2\right]=0.
\end{aligned}$$

(注意由中间两项可得 $r_u u_r=1$．)所以 β 满足 N 的测地线方程． ■

练习 5.5.9 证明 r 和 s 也满足第二个测地方程．

练习 5.5.10 双曲平面 H 的标准极坐标补片是 $\mathbf{x}(u, v)=(u\cos v, u\sin v)$．定义映射 I：$H\to P$．$I(\mathbf{x}(u, v))=\left(\frac{4u\sin v}{u^2+4u\cos v+4}, \frac{4-u^2}{u^2+4u\cos v+4}, 0\right)=\mathbf{y}(r(u, v), s(u, v))$，其中

P 是参数方程为 $y(r, s)=(r, s)$ 的庞加莱平面. 证明 I 是等距. 事实上, I 是到上半平面的一一的、到上的(有光滑反函数)映射, 故是整体等距的. 上述公式出自复变量理论中的默比乌斯变换(或线性分式变换):

$$T(z) = -\mathrm{i}\frac{z-2}{z+2},$$

其中 $z=x+\mathrm{i}y$. 从第 4 章可以看出复分析在微分几何中有很重要的作用. 这里给出的是一个我们熟知的例子. 考虑双曲平面 H 的标准极坐标 u 克莱罗参数方程 $\mathbf{x}(u, v)=(u\cos v, u\sin v)$. 因为经过原点的径向线是 u-参数曲线, 所以它们是测地线. 给定 $u=2$ 圆盘上的任意点 $p=(u_0, v_0)$, 存在以下线性分式变换: 256

$$T(z) = \frac{az+2\bar{c}}{\frac{c}{2}z+\bar{a}}, \quad |a|^2-|c|^2=1,$$

而且在实平面坐标和双曲平面度量意义下, 这个变换是 H 的等距, 且把原点映为 p 点. 因此, 过 p 点的测地线是过原点的径向线的像. 而线性分式变换将圆变为圆, 将直线变为直线. 又因 T 是等距且过原点的径向线与 $u=2$ 垂直相交, 所以测地线必经过 p. 因此, 经过 p 的测地线一定是圆, 且与 $u=2$ 的边界圆相交为直角. 这正是之前计算的结果.

练习 5.5.11 假设螺旋面的坐标补片为 $\mathbf{x}(u, v)=(\sinh u\cos v, \sinh u\sin v, v)$. 从 $t=\frac{\pi}{2}$ 到 $t=\pi$, 可由以下定义

$$\mathbf{x}^t(u,v) = (\sin t\sinh u\cos v - \cos t\cosh u\sin v, \sin t\sinh u\sin v + \cos t\cosh u\cos v, u\cos t + v\sin t)$$

将螺旋面光滑地弯曲成悬链面. 但最后一步不是一一对应. 证明对任意 $\frac{\pi}{2}\leqslant t<\pi$, $I(\mathbf{x}(u, v))=\mathbf{x}^t(u, v)$ 是整体等距; 当 $t=\pi$ 时, I 是局部等距. 并证明在任一种情况下都保持高斯曲率不变(因为它由度量决定)且每个中间曲面都是极小的.

注意从一般球面(即非球极球面) $S^2\setminus\{N\}$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的球极平面射影不是等距. 回忆对于切向量, 有

$$\mathrm{St}_*(\mathbf{x}_u) = \left(\frac{-\sin u\cos v}{1-\sin v}, \frac{\cos u\cos v}{1-\sin v}, 0\right)$$

$$\mathrm{St}_*(\mathbf{x}_v) = \left(\frac{\cos u}{1-\sin v}, \frac{\sin u}{1-\sin v}, 0\right).$$

因此, 取 $\mathbb{R}^3$ 中的点积, 得 $\mathrm{St}_*(\mathbf{x}_u)\cdot\mathrm{St}_*(\mathbf{x}_v)=0$. 又

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_*(\mathbf{x}_u)\cdot\mathrm{St}_*(\mathbf{x}_u) &= \frac{\cos^2 v}{(1-\sin v)^2}\\ &= \frac{1}{(1-\sin v)^2}\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u,\\ \mathrm{St}_*(\mathbf{x}_v)\cdot\mathrm{St}_*(\mathbf{x}_v) &= \frac{1}{(1-\sin v)^2}\\ &= \frac{1}{(1-\sin v)^2}\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v.\end{aligned}$$ 257

因为因子 $1/(1-\sin v)$ 表示出现了伸缩变换，所以 St 不是等距. 同时，证明伸缩变换是一致的而且保持角度. 以球极平面射影作为基本的例子，减弱等距条件：只要求映射 $I: M\to N$ 满足下面的比例条件. 对于正交坐标补片 x，y，称 $I(x(u, v))=y(r(u, v), s(u, v))$ 是共形映射，如果 $0=I_*(x_u)\cdot I_*(x_v)$，且

$$E_x=\lambda(u,v)^2[E_y r_u^2+G_y s_u^2],\quad G_x=\lambda(u,v)^2[E_y r_v^2+G_y s_v^2],$$

其中函数 $\lambda(u, v)$ 称为缩放因子. 注意，若 $r(u, v)=u$，$s(u, v)=v$，I 是共形映射当且仅当对任意的 $p\in M$，$I(p)\in N$，度量对应成比例. 即

$$E_x=\lambda(u,v)^2E_y,\quad G_x=\lambda(u,v)^2E_y.$$

练习 5.5.12 证明如果 I 是共形的，则它保持切向量间的夹角. 提示：只要证明保持 x_u 和 x_v 的夹角不变就可以.

球极平面射影是从球面到平面(R^3 的诱导度量)的共形映射. 这是第 4 章中用复分析方法研究极小曲面的本质.

练习 5.5.13 半径为 R 的球面的常用坐标补片是 $x(u, v)=(R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v)$. 定义

$$\begin{aligned}I(x(u,v)) &= \left(u,\ln\tan\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right),0\right)\\ &= y(r(u,v),s(u,v)),\end{aligned}$$

其中 $y(r, s)=(r, s, 0)$ 是坐标平面的坐标补片. 证明 I 是缩放因子为 $\lambda(u, v)=R\cos v$ 的共形映射.

假设 $\alpha=x(u, v(u))$ 是球面上曲线，且与每条经线(即 v-参数曲线)相交为定角. 证明 $v(u)=Cu/R^2$，且这样的曲线在 I 作用下的像为直线. 这一映射 I 称为球面到矩形的墨卡托投射. 特别地，墨卡托投射经常用于绘制地图. 早些时候海员们利用这一性质用直线绘制航行图，并利用指南针保持方向航行(也就是说与经线相交为定角). 虽然这些线不是测地线，但却易于指导远距离航行. 对于绘图，在[RW84]中有更详尽的数学讨论.

5.6 测地线和 Maple

5.6.1 绘制测地线

258 几何学家很难想象测地线到底是什么样子的. 这是因为测地线方程的解通常都是数值解，且要将它们带入到曲面的参数方程中. 以前这需要复杂的处理程序，以配合 3D 图形的数值分析. 而今，只需一个短的 Maple 程序即可. 在曲面上可以画出它的测地线，而且可以给出经过严格分析才能得来的一些直观的信息. 例如由图 5-6 可以得到解决练习 5.2.17 的直观想法. 当然，对给定的参数形式，用 Maple 生成测地线方程是很容易的. 下面这段程序就是做这项工作. 首先需要一个度量(其中，和以往一样取 $F=0$).

```
> with(plots):with(LinearAlgebra):
> EFG := proc(X)
local Xu,Xv,E,F,G;
Xu := <diff(X[1],u),diff(X[2],u),diff(X[3],u)>;
```

```
Xv := <diff(X[1],v),diff(X[2],v),diff(X[3],v)>;
E := DotProduct(Xu,Xu,conjugate=false);
F := DotProduct(Xu,Xv,conjugate=false);
G := DotProduct(Xv,Xv,conjugate=false);
simplify([E,F,G]);
end:
```

测地线方程可由以下程序给出.

```
> geoeq:=proc(X)
local M,eq1,eq2;
M:=EFG(X);
eq1:=diff(u(t),t$2)+subs({u=u(t),v=v(t)},
diff(M[1],u)/(2*M[1]))*diff(u(t),t)^2+subs({u=u(t),v=v(t)},
diff(M[1],v)/(M[1]))*diff(u(t),t)*diff(v(t),t)- subs({u=u(t),
v=v(t)},diff(M[3],u)/(2*M[i]))*diff(v(t),t)^2=0:
eq2:=diff(v(t),t$2)-subs({u=u(t),v=v(t)},
diff(M[1],v)/(2*M[3]))*diff(u(t),t)^2+subs({u=u(t),v=v(t)},
diff(M[3],u)/(M[3]))*diff(u(t),t)*diff(v(t),t)+ subs({u=u(t),
v=v(t)},diff(M[3],v)/(2*M[3]))*diff(v(t),t)^2=0;
eq1,eq2;
end:
```

练习 5.6.1 证明下面程序生成 $F\neq 0$ 时的测地线方程.

```
> geoeq2:=proc(X)
local M,G,E,F,D,Eu,Ev,Fu,Fv,Gu,Gv,eq1,eq2;
M:=EFG(X);
E:=M[1]; F:=M[2]; G:=M[3];
D:=E*G-F*F;
Eu:=diff(M[1],u); Ev:=diff(M[1],v);
Fu:=diff(M[2],u); Fv:=diff(M[2],v);
Gu:=diff(M[3],u); Gv:=diff(M[3],v);
eq1:=diff(u(t),t$2) + subs( {u=u(t),v=v(t)} ,
(G*Eu-F*(2*Fu-Ev)) /(2*D) )*diff(u(t),t)^2
+ subs({u=u(t),v=v(t)},(G*Ev-F*Gu) / D)*diff(u(t),t)*
diff(v(t),t) + subs( {u=u(t),v=v(t)} ,
(G*(2*Fv-Gu)-F*Gv)/(2*D))*diff(v(t),t)^2=0;
eq2:=diff(v(t),t$2) + subs( {u=u(t),v=v(t)},
(E*(2*Fu-Ev)-F*Eu) /(2*D))*diff(u(t),t)^2 + subs({u=u(t),
v=v(t)},(E*Gu-F*Ev)/(D))*diff(u(t),t)*diff(v(t),t)
+ subs({u=u(t),v=v(t)},(E*Gv-F*(2*Fv-Gu))/(2*D))*
diff(v(t),t)^2=0;
eq1,eq2;
end:
```

259

最后，回到本小节的中心部分，即用 Maple 绘制曲面的测地线. 这个程序的输入数据容易让人迷惑，每一个都是一个函数. 首先要输入曲面的参数形式，接下来输入 4 个给定曲面的 u，v 参数的边界. $u0$，$v0$ 是测地线的起始点，$Du0$，$Dv0$ 为起始方向，输入 T 给出测地线参数 t 的边界. 输入 N 给出测地线上点的数目. N 越大，测地线看起来就越光滑. 输入"gr"表示允许网格(通常为 25×25)变化的大小. 网格越大，图像越好，弯曲得越慢. 最后输入"theta"和"phi"给定输出图像的方向.

```
> plotgeo:=proc(X,ustart,uend,vstart,vend, u0,v0,Du0,Dv0,
T,N,gr,theta,phi)
local sys,desys,u1,v1,listp,geo,plotX;
sys:=geoeq(X);
desys:=dsolve({sys,u(0)=u0,v(0)=v0,D(u)(0)=Du0,D(v)(0)=Dv0},
{u(t),v(t)},type=numeric, output=listprocedure);
u1:=subs(desys,u(t)); v1:=subs(desys,v(t));
geo:=tubeplot(convert(subs(u='u1'(t),v='v1'(t),X),list),
t=0..T,radius=0.05,color=black,numpoints=N):
plotX:=plot3d(X,u=ustart..uend,v=vstart..vend,grid=[gr[1],
gr[2]],shading=XY,lightmodel=light3):
display({geo,plotX},shading=XY,lightmodel=light2,
scaling=constrained,orientation=[theta,phi]);
end:
```

这里有两个曲面的例子．像下面绘制环面的测地线一样，绘制它们的测地线．

```
> sphere:=<cos(u)*cos(v)|sin(u)*cos(v)|sin(v)>;
```

$$sphere := [\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), \sin(v)]$$

```
> torus:=<(4+cos(u))*cos(v)|(4+cos(u))*sin(v)|sin(u)>;
```

260 $$torus := [(4+\cos(u))\cos(v), (4+\cos(u))\sin(v), \sin(u)]$$

```
> EFG(sphere);
```

$$[\cos(v)^2, 0, 1]$$

```
> geoeq(sphere);
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}u(t)\right) - \frac{2\sin(v(t))\left(\frac{du(t)}{dt}\right)\left(\frac{dv(t)}{dt}\right)}{\cos(v(t))} = 0,$$
$$\left(\frac{d^2 v(t)}{dt^2}\right) + \cos(v(t))\sin(v(t))\left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2 = 0$$

```
> EFG(torus);
```

$$[1, 0, (4+\cos(u))^2]$$

试解释下面的测地线(如图 5-11 所示)．测地线从哪里哪个方向开始？位于哪？为什么？(与克莱罗关系有关吗?)

```
> plotgeo(torus,0,2*Pi,0,2*Pi,Pi/2,0,0,1,30, 150,[15,30],
105,33);

> plotgeo(torus,0,2*Pi,0,2*Pi,0,0,0,1,15, 75,[15,30],
177,68);

> plotgeo(torus,0,2*Pi,0,2*Pi,Pi,0,0,1,15, 165,[15,30],
177,68);
```

图 5-14 描述的例子显示了在任何测地线的计算中计算机可能出现的错误．它的初始数据使得测地线沿内平行圆开始，当取 $t=0$ 到 $t=35$(而不是上面的 $t=15$)，曲线偏离了它的正确轨迹(与图 5-13 比较)．

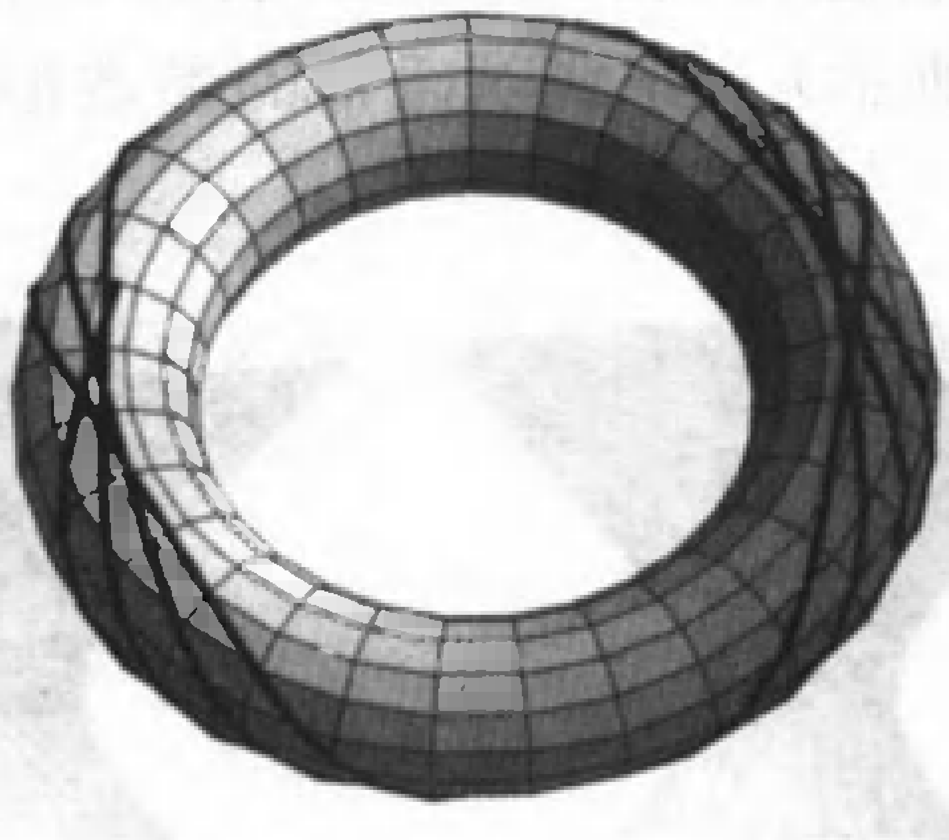


图 5-11　在环面的顶端平行圆与底端平行圆之间跳跃的测地线

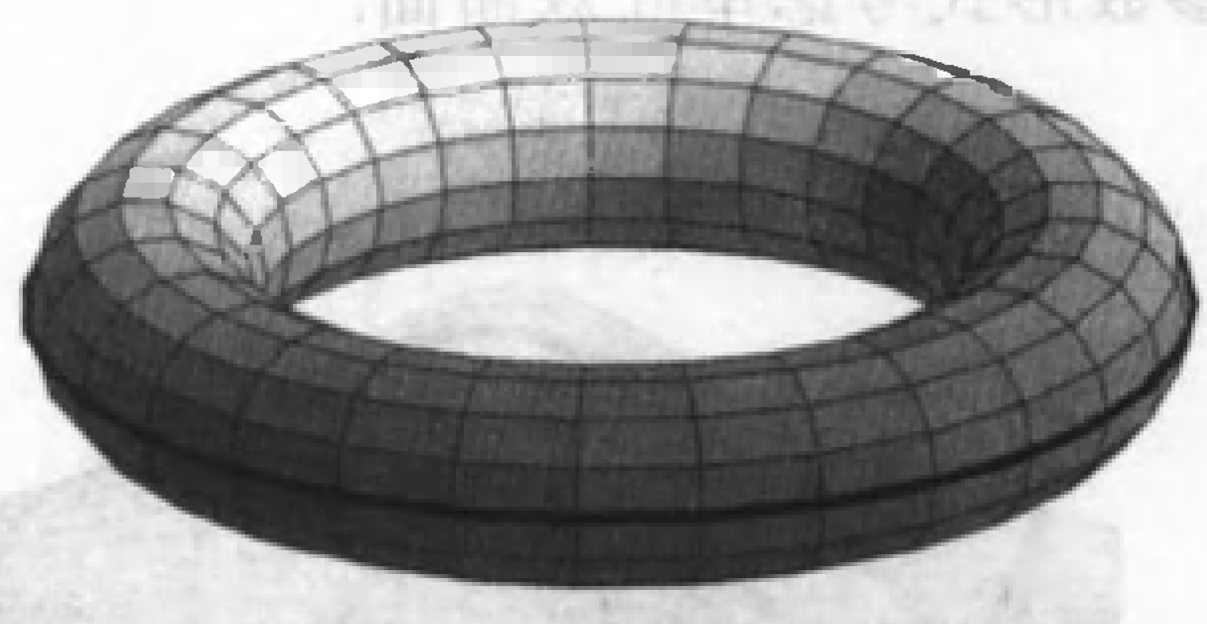


图 5-12　环面外平行圆的测地线

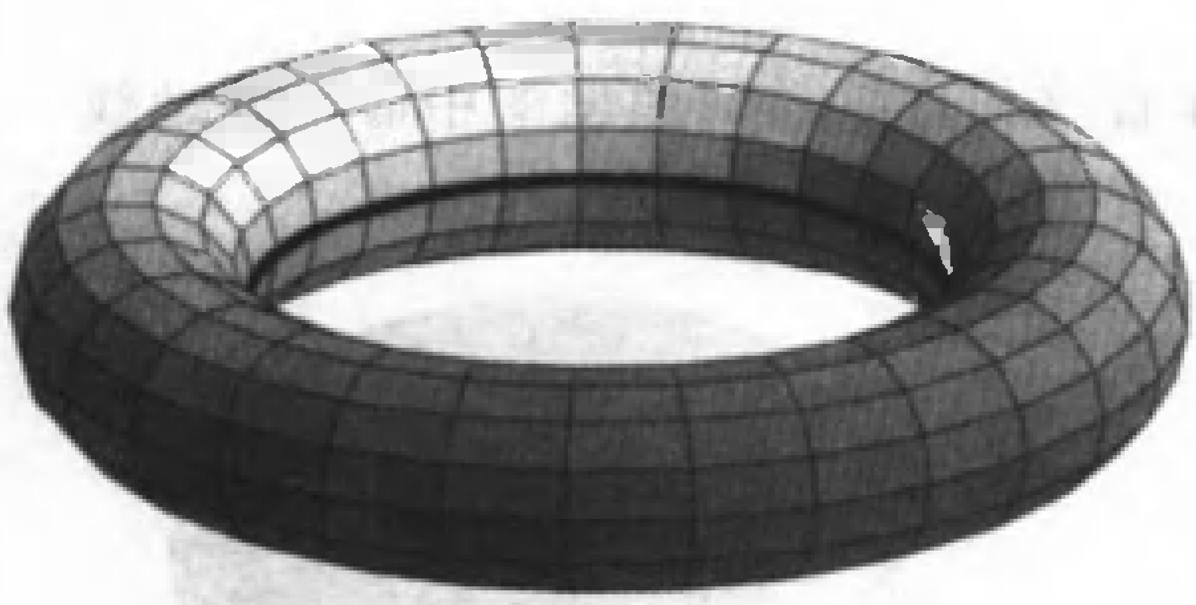


图 5-13　环面内平行圆的测地线

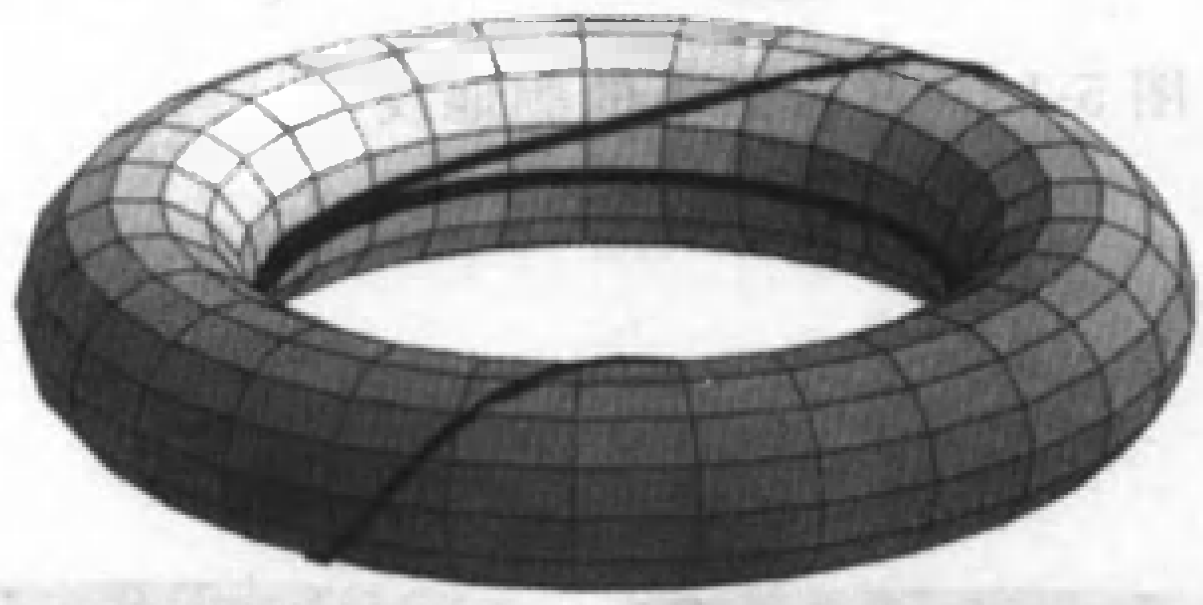


图 5-14　环面内平行圆的测地线：一个出现错误的例子

```
> plotgeo(torus,0,2*Pi,0,2*Pi,Pi,0,0,1,35, 165,[15,30],
177,68);
```

练习 5.6.2　考虑上述环面测地线(即 $R=4$，$r=1$)，它从与顶端平行圆的夹角为 ϕ_0 的平行圆开始到 x_u，由克莱罗关系式，$R\sin\phi_0=c$. 故 $(R+r\cos u)\sin\phi=R\sin\phi_0$. 证明可取 $\phi_0=\arcsin((R-r)/R)$ 使得测地线渐近于 $u=\pi$ 的测地线——内平行圆. 再用 Maple 绘制测地线(注意不要出现错误). 提示：(1)对于第一部分，$u\to\pi$，$\phi\to\pi/2$；(2)对于第二部分，对 ϕ_0 取适当的 $Du0$ 和 $Dv0$，千万小心！角 ϕ_0 是切平面上的角，但是在 uv 平面由 $Du0$ 和 $Dv0$ 决定的向量在参数化的过程中产生畸变. 用度量系数计算这一畸变，求出在 uv 平面的正确方向. 261~262

练习 5.6.3　对练习 5.2.15 以及图 5-5 中的旋转箕舌面，由以下程序绘制测地线.

```
> witch:=<2*tan(u)|2*cos(u)^2*cos(v)|2*cos(u)^2*sin(v)>;
```

$$witch := [2\tan(u), 2\cos^2(u)\cos(v), 2\cos^2(u)\sin(v)]$$

```
> plotgeo(witch,-1.1,1.1,0,2*Pi,Pi/3,0,0,1, 100,200,[15,30],
92,-113);
```

能理解克莱罗关系式所起的作用吗?

练习 5.6.4　对于不同的起始点和初始方向，利用球面、圆柱、圆锥面、抛物面的标准参数方程，绘制测地线，并比较本书中的图例. 特别地，将圆锥面和抛物面的结果与练习 5.2.14 和练习 5.2.17 作个比较.

练习 5.6.5 对于不同的起始点和初始方向，绘制悬链面和单叶双曲面的测地线. 下面的例子会提供一些帮助(如图 5-16、图 5-17 和图 5-18 所示). 分别以通常的参数形式和直纹曲面参数形式考虑单叶双曲面.

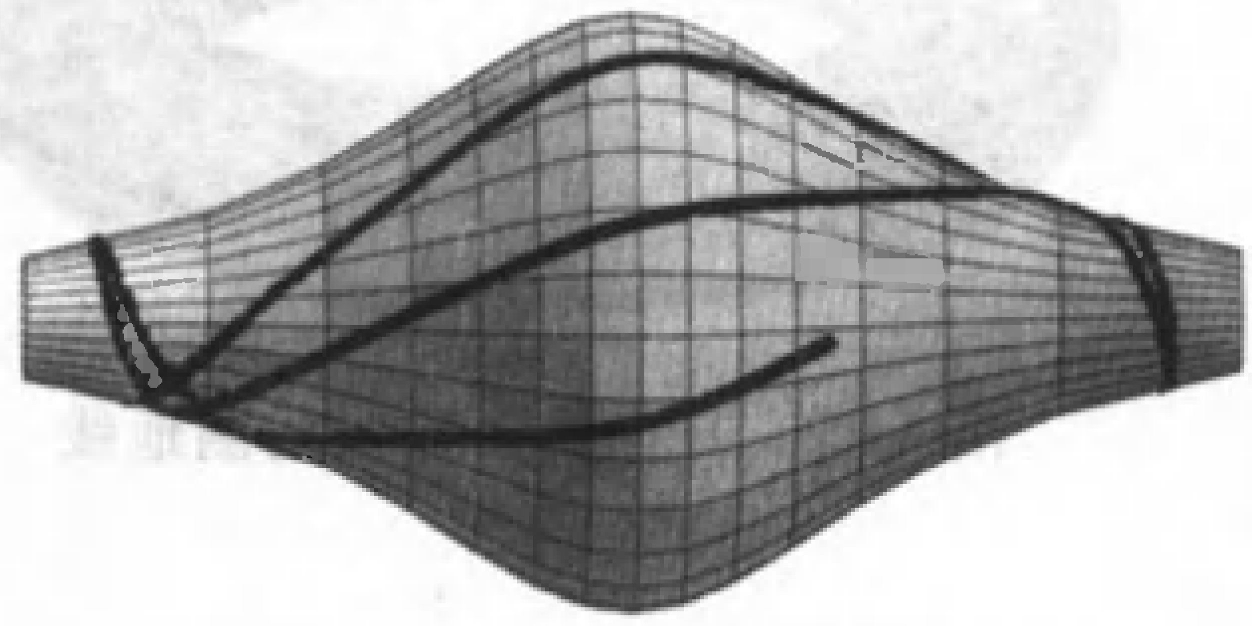


图 5-15 箕舌面上的测地线

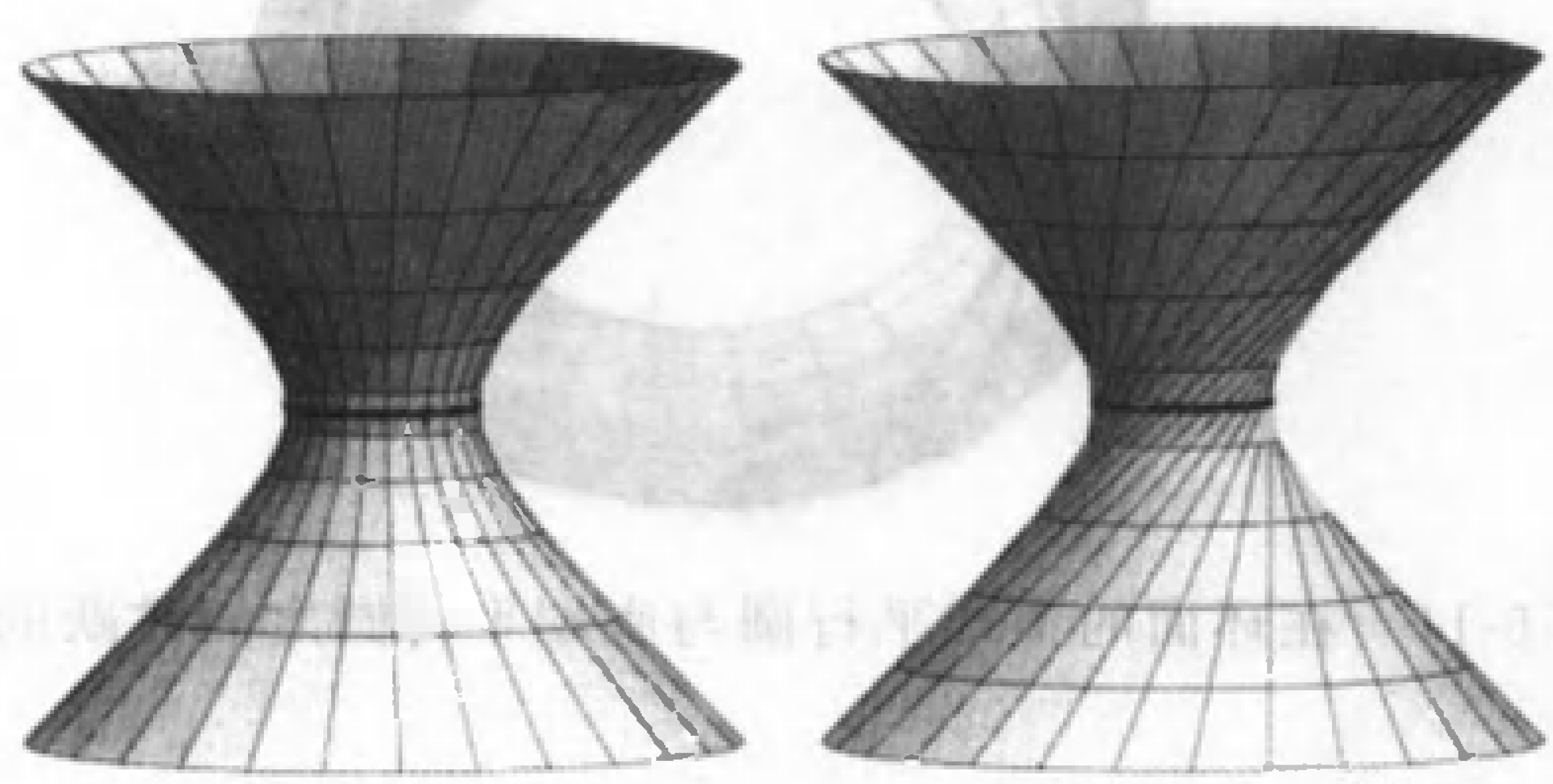


图 5-16 非直纹和直纹的双曲面的中心圆测地线

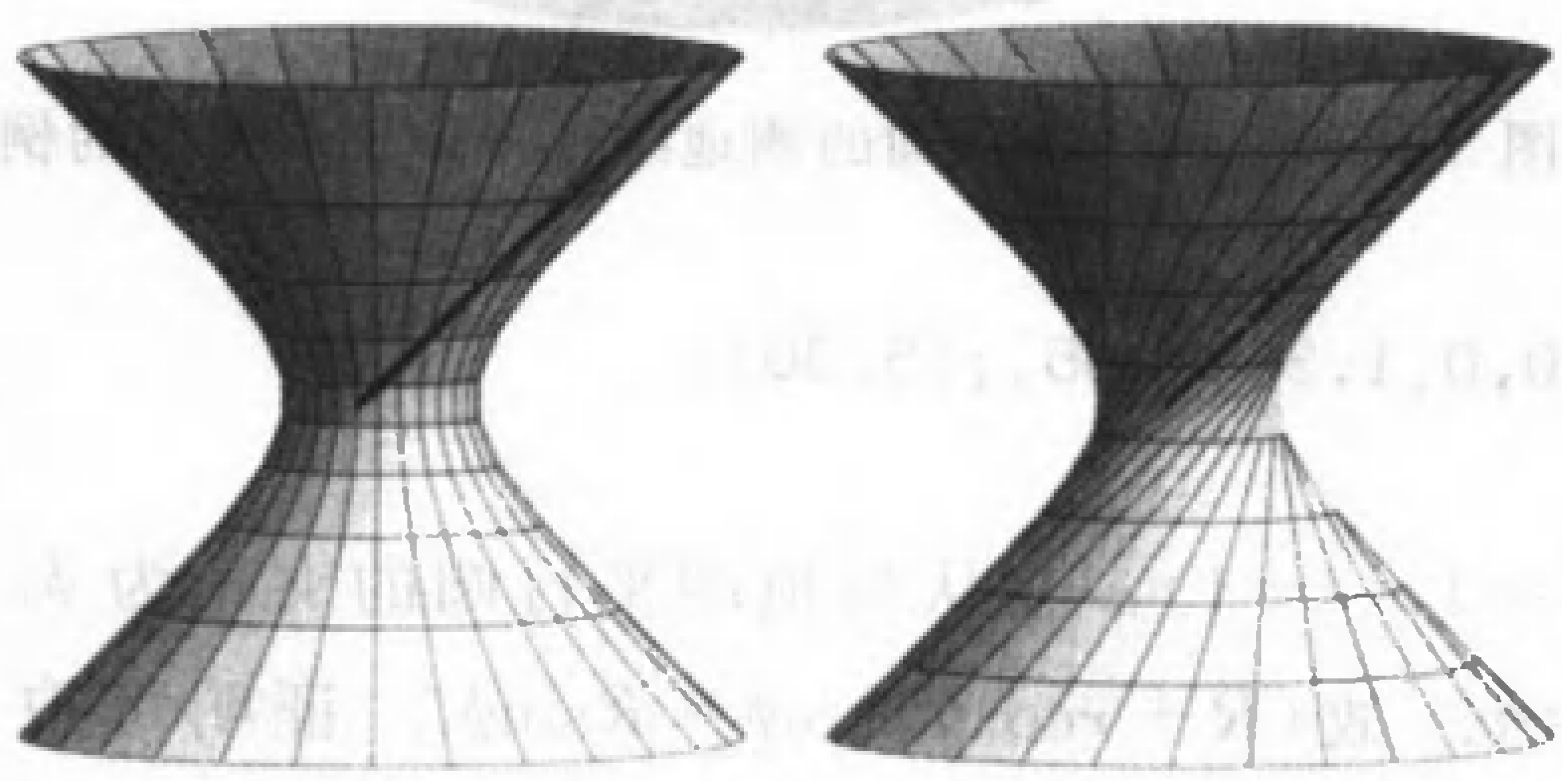


图 5-17 非直纹和直纹的双曲面的母线测地线

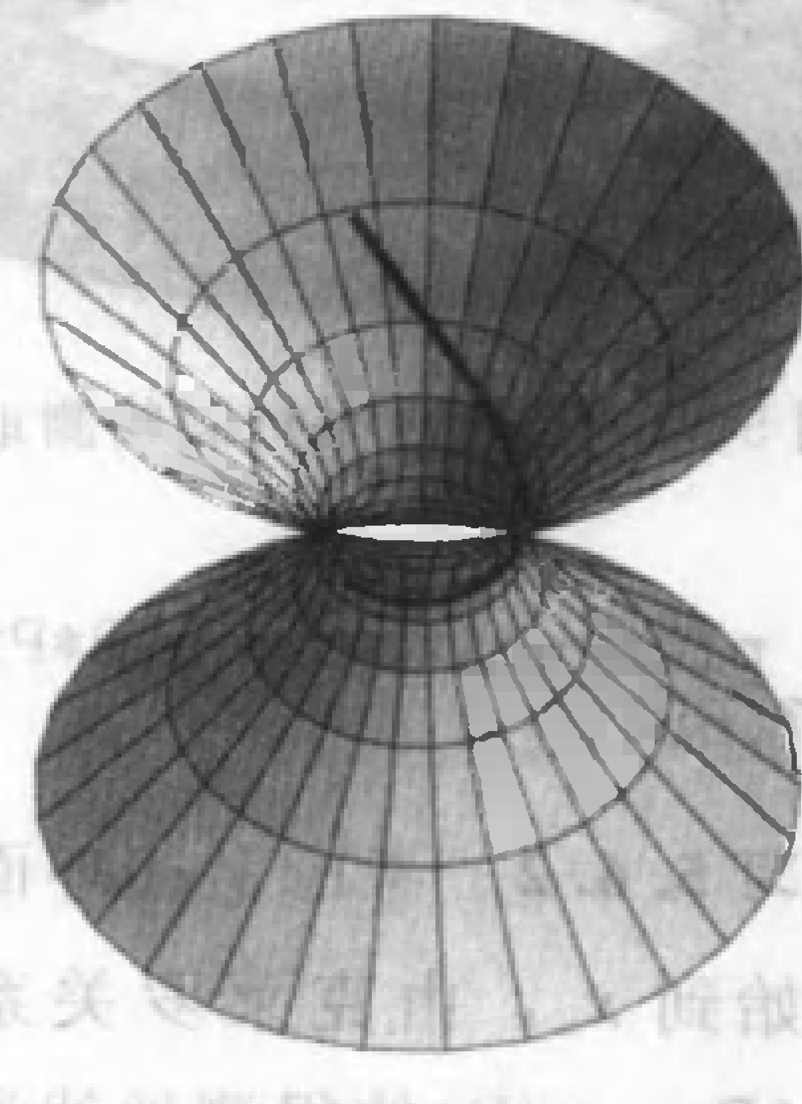


图 5-18 单叶双曲面的测地线

```
> hyperb:=<cosh(u)*cos(v)|cosh(u)*sin(v)|sinh(u)>;
hyperbruled:=<cos(u)-v*sin(u)|sin(u)+v*cos(u)|v>;
```

$$hyperb := [\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), \sinh(u)]$$

$$hyperbruled := [\cos(u) - v\sin(u), \sin(u) + v\cos(u), v]$$

```
> plotgeo(hyperb,-2,2,0,2*Pi,0,0,0,1,10,25,[10,30],47,85);
plotgeo(hyperbruled,0,2*Pi,-4,4,0,0,1,0,10,35,[30,10],
47,85);

> plotgeo(hyperb,-2,2,0,2*Pi,0,0,1,1,3.5,25,[10,30],14,85);
plotgeo(hyperbruled,0,2*Pi,-4,4,0,0,0,1,4,25,[30,10],14,85);

> plotgeo(hyperb,-2,2,0,2*Pi,0.05,0,0,2,3,100,[10,30],
45,45);
plotgeo(hyperbruled,0,2*Pi,-4,4,0,0.5,1,0,5,25,[30,10],
45,45);
```

5.6.2 圆锥上的测地线

现在看圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上一条特殊的测地线.

利用练习 5.2.14 得到圆锥上测地线的公式为

$$u = C\sec\left(\frac{v}{\sqrt{1+a^2}}+D\right),$$

考虑圆锥面上从(1, 0, 1)到(0, 1, 1)的测地线. 这意味着从 $v=0$ 开始以 $v=\pi/2$ 结束时, u 以 1 开始以 1 结束. 将其代入通常的测地线公式, 得

$$1 = C\sec(D),\quad 1 = C\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+D\right).$$

求解可得 $c=\cos D$, 且

$$D = \arctan\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)-1}{\sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)}\right].$$

```
> dd:=evalf(arctan((cos(Pi/(2*sqrt(2)))-1)/
sin(Pi/(2*sqrt(2)))));
```

$$dd := -0.5553603670$$

```
> cc:=cos(dd);
```

$$cc := 0.8497104921$$

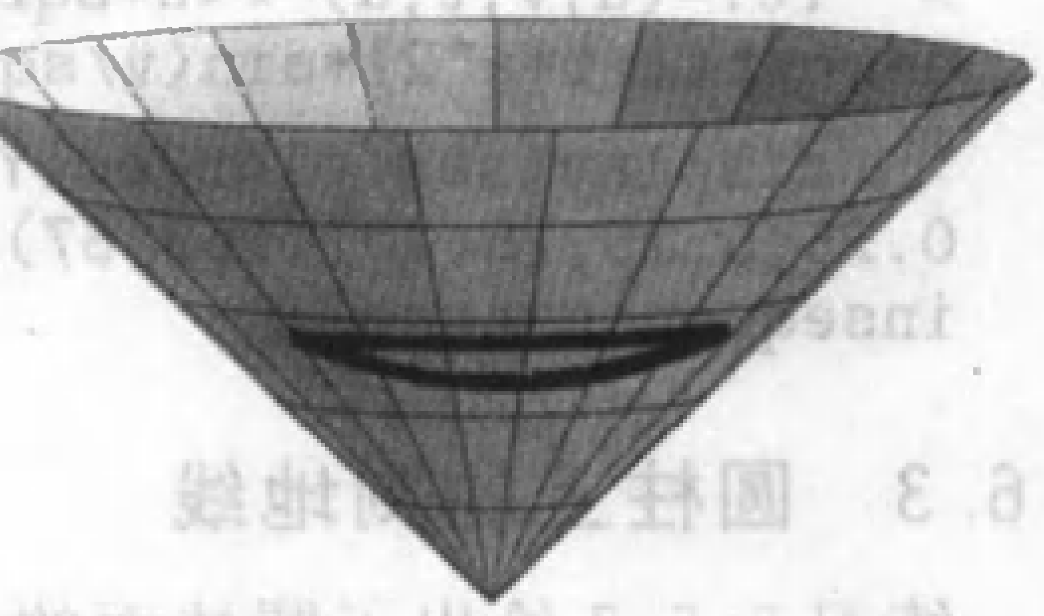


图 5-19 连结(1, 0, 1)和(0, 1, 1)的测地线和平行圆

用刚刚得到的 C, D 决定的 u 的公式代替圆锥面参数方程中的 u, 可以绘制圆锥面上的测地线. 如图 5-19 所示.

```
> geo:=tubeplot([cc*sec(v/sqrt(2)+dd)*cos(v),
cc*sec(v/sqrt(2)+dd)*sin(v),cc*sec(v/sqrt(2)+dd)],
v=0..Pi/2,radius=0.03,color=black):
> cone:=plot3d([u*cos(v),u*sin(v),u],u=0..1.8,v=0..2*Pi,
grid=[6,24],shading=xy,lightmodel=light2):
> circ:=tubeplot([cos(v),sin(v),1],v=0..Pi/2,radius=0.025,
color=blue):
> display({geo,cone,circ},scaling=constrained,orientation=
[40,84]);
```

在图 5-19 中, 可以看出存在过给定点的测地线和平行圆. 计算从(1, 0, 1)到(0, 1, 1)的测地线的弧长, 并比较连结这两点参数形式为($\cos v$, $\sin v$, 1)的圆弧长. 显然该圆半径为 1, 因为相应的圆心角为 $\pi/2$, 故(1, 0, 1)到(0, 1, 1)的弧长为 $\pi/2\approx1.570796327$. 以下计算从(1, 0, 1)到(0, 1, 1)的测地线的弧长.

```
> alpha:=<cc/cos(v/sqrt(2)+dd)*cos(v)|cc/cos(v/sqrt(2)+dd)*
sin(v)|cc/cos(v/sqrt(2)+dd)>;
```

$$a := \left[\frac{0.849\,710\,492\,1\cos(v)}{\cos\left(\frac{v\sqrt{2}}{2}-0.555\,360\,367\,0\right)}, \frac{0.849\,710\,492\,1\sin(v)}{\cos\left(\frac{v\sqrt{2}}{2}-0.555\,360\,367\,0\right)}, \frac{0.849\,710\,492\,1}{\cos\left(\frac{v\sqrt{2}}{2}-0.555\,360\,367\,0\right)}\right]$$

263~266 取其速度向量，计算弧长积分.

```
> alphap:=map(diff,alpha,v):
> evalf(Int(sqrt((alphap[1]^2+alphap[2]^2+alphap[3]^2)),
v=0..Pi/2));
```

$$1.491\,286\,907$$

故测地线的弧长短于圆弧长.

练习 5.6.6 在练习 5.5.5 中，分别取 $t=0$，$t=0.25$，$t=0.5$，$t=0.75$，$t=1$，绘制圆锥展开中相同初值条件的测地线. 这说明等距的展开映射把圆锥上的测地线映为平面上的直线，这和定理 5.5.8 得到的结论一致. 下述命令以动画的形式展示了等距的展开映射如何把圆锥的测地线映为平面直线.

```
> Yt:=(u,v,t,a)-><u*sqrt(1+t*a^2)*cos(v/sqrt(1+t*a^2))|
u*sqrt(1+t*a^2)*sin(v/sqrt(1+t*a^2))|a*u*sqrt(1-t)>:
> display(seq(plotgeo(Yt(u,v,i/20,1.5),0,3,0,2*Pi,3,0, -1,
0.25,5,25,[5,20],163,67),i=0..20),scaling=constrained,
insequence=true);
```

5.6.3 圆柱上的测地线

练习 5.5.7 给出了圆柱面的展开映射. 这里将用这个映射阐述定理 5.5.8. 特别地，将展开带有螺旋测地线的圆柱，可以看出螺旋测地线最终展为平面直线.

这一展开圆柱的想法是假设圆柱的每条边线是绕其中心旋转的轮子. 在此意义下，由类似摆线的讨论(见练习 1.1.13)可获得相应的圆柱的展开映射. 不同在于当圆柱的点触地时，它将停留不动而不是接着滚动. 这意味着我们要将仍然移动的部分和固定不动的部分有效地连结在一起. Maple 的“piecewise”命令可以实现这个想法. 因为圆柱沿不同的方向展开，必须分别处理左边和右边的情形. 这是 Maple 的方法. 先从平行圆开始，再将 u-参数代入图中. 根据练习 5.5.7 的公式，有如下平行圆的渐开线(对右侧和左侧). 注意这里分别处理第二个坐标和第三个坐标(用“fleft”“gleft”和“fright”“gright”).

```
> fright:=(v,t)->piecewise(t<=v,t+sin(v-t),t>v,v);
```

$$fright := (v,t) \to \text{piecewise}(t \leqslant v, t+\sin(v-t), v < t, v)$$

```
> fleft:=(v,t)->piecewise(t<=v,-t-sin(v-t),t>v,-v);
```

267 $$fleft := (v,t) \to \text{piecewise}(t \leqslant v, -t-\sin(v-t), v < t, -v)$$

```
> gright:=(v,t)->piecewise(t<=v,1-cos(v-t),t>v,0);
```

$$gright := (v,t) \to \text{piecewise}(t \leqslant v, 1-\cos(v-t), v < t, 0)$$

```
> gleft:=(v,t)->piecewise(t<=v,1-cos(v-t),t>v,0);
```

$$gleft := (v,t) \to \text{piecewise}(t \leqslant v, 1-\cos(v-t), v < t, 0)$$

考虑参数 u(即在圆柱上的距离)的时候，将左侧和右侧的渐开线代入分离映射. 注意，Maple 可以通过简单的输入列表定义映射并输出向量(或列表).

```
> Ytright:=(t,u,v)->[u,fright(v,t),gright(v,t)];
```

$$Ytright := (t,u,v) \to [u, \text{fright}(v,t), \text{gright}(v,t)]$$

```
> Ytleft:=(t,u,v)->[u,fleft(v,t),gleft(v,t)];
```

$$Ytleft := (t,u,v) \to [u, \text{fleft}(v,t), \text{gleft}(v,t)]$$

当然要描述展开的过程需要建立两个动画——一个左边的，一个右边的——且同时演示它们. 因此，我们将其命名保存(回忆为了压缩画图结构信息，用冒号而不用分号)，再使用“display”命令.

```
> right:=display(seq(plot3d(Ytright(i/20*Pi,u,v),u=-3..3,
v=0..Pi,grid=[8,20]),i=0..20),insequence=true):
> left:=display(seq(plot3d(Ytleft(i/20*Pi,u,v),u=-3..3,
v=0..Pi,grid=[8,20]),i=0..20),insequence=true):
> display({left,right},scaling=constrained,orientation
=[18,76]);
```

我们知道圆柱上的测地线是母线、平行圆或螺旋线. 显然前两个展为平面直线. 螺旋线也展开为平面直线，根据展开映射.(因圆柱位于 xy 平面，例$(u, \sin u, 1-\cos u)$)一条螺旋线的展开过程如图 5-20 所示.

```
> helixevolveright:=(t,s)->[s,fright(s,t),gright(s,t)]:
> helright:=display(seq(tubeplot(helixevolveright(i/20*Pi,
s),s=0..Pi,radius=0.05,color=black),i=0..20),insequence=true):
> helixevolveleft:=(t,s)->[-s,fleft(s,t),gleft(s,t)]:
> helleft:=display(seq(tubeplot(helixevolveleft(i/20*Pi,s),
s=0..Pi,radius=0.05,color=black),i=0..20),insequence=true):
> display({left,right,helright,helleft},scaling=constrained,
orientation=[8,75]);
```

268

通过计算每一情况下的度量，说明展开映射是等距的.

```
> cylR:=<u|t+sin(v-t)|1-cos(v-t)>;
```

$$cylR := [u, t+\sin(v-t), 1-\cos(v-t)]$$

```
> EFG(cylR);
```

$$[1,0,1]$$

练习 5.6.7 由练习 5.5.1 知螺旋面与悬链面等距. 绘制有相同初值条件的测地线，其中 $t=\pi/2$，$t=2\pi/3$，$t=5\pi/6$，$t=\pi$.

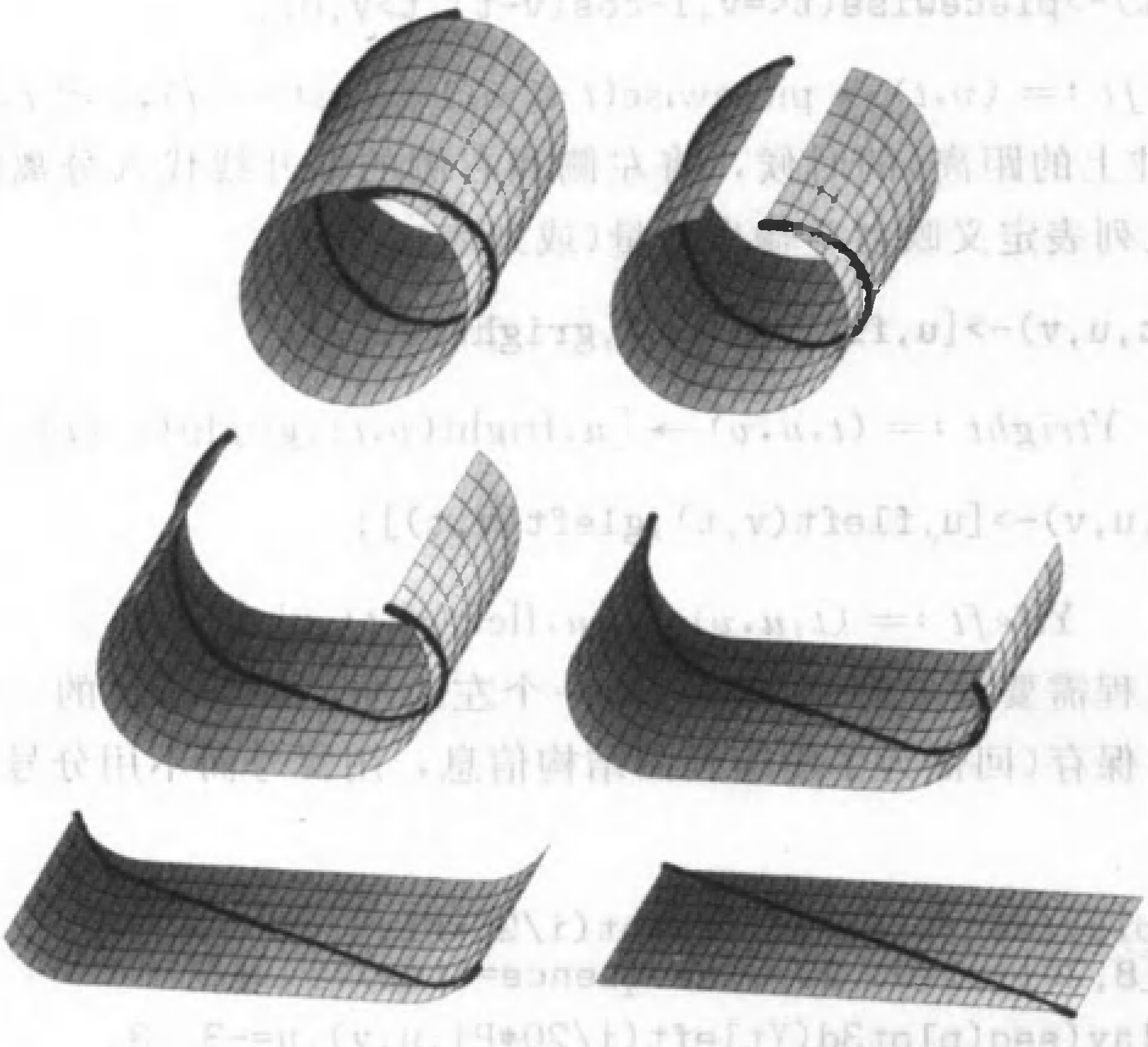


图 5-20 展开圆柱上的测地线

5.6.4 波状体曲面上的测地线

269 定理3.7.7给出了波状体曲面的参数形式，因此也可以绘制它的测地线(如[MO03b])．回忆波状体曲面参数化的度量系数为

$$E = 4a^2\mathrm{dn}^2(u), \quad F = 0, \quad G = a^2(1+\varepsilon)^2\mathrm{dn}^2(u).$$

这些仅依赖于 u 参数(因为波状体是旋转曲面)，故为 u 克莱罗参数化．因此，由克莱罗关系式：

$$\sqrt{G}\sin\theta = a(1+\varepsilon)\mathrm{dn}(u)\sin\theta = c.$$

波状体曲面上的测地线满足克莱罗关系式，故可预测它的走向．而且因为波状体曲面是 u 克莱罗参数化的，故测地线可由积分刻画为

$$\begin{aligned} v &= \pm\int \frac{c\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-c^2}}\mathrm{d}u \\ &= \pm\frac{2\mathrm{dn}(u_0)}{(1+\varepsilon)}\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\mathrm{dn}^2(u)-\mathrm{dn}^2(u_0)}} \\ &= \pm\frac{\mathrm{dn}(u_0)}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\mathrm{sn}^2(u_0)-\mathrm{sn}^2(u)}}. \end{aligned}$$

这里 u_0 是测地线的初始点，且在克莱罗关系式中取 $\phi=\pi/2$ 得 $c=a(1+\varepsilon)\mathrm{dn}(u_0)$，并把这个式子带入一般的积分公式．注意 v 连续且关于 u 单调递增．这解释了为什么所得的测地线总是持续"向前"的．

下面这几步决定了波状体曲面上的闭测地线．

1)编写一个 Maple 程序，它输入 ϵ(确定波状体曲面)和 u_0(测地线的起始点，该测地线起始平行于波状体曲面上的平行圆)，输出测地线的旋转变量 v 等于 π 时对应的 u 值.

2)找等于 0 的输出 u. 因为我们用测地线方程的数值解计算终点，所以不能希望得到 $u=0$. 相反地，因为 v 连续单增，为保证对于起始点 u_0，满足 $v=\pi$ 时 $u=0$，要寻找正的或负的输出.

3)上述过程确定了波状体曲面上的闭测地线因为在波状体参数方程中 $u=0$ 对应于"赤道"测地线，它是波状体曲面驼峰顶端的平行圆. 因为波状体曲面是关于赤道对称的，所以如果知道测地线 u_0 旋转 π 到达 $u=0$，那么由对称性，它到达波状体曲面上对应于 $-u_0$ 的点，需要再旋转 π. 即它将跳出 $-u_0$ 的平行圆，且旋转 2π 后返回初始平行圆. 再者，由对称性知测地线必然为闭. 注意测地线满足克莱罗关系式，且根据[dC76，4-7 节，302 页](见练习 4.2.18)测地线永远不会渐近于非测地线的平行圆. 这样测地线必然一直跳跃. 270

注记 5.6.8 注意一般的情况下测地线的终点不都是连续地依赖于初值条件. 这里之所以如此是因为它的参数方程是 u 克莱罗参数形式.

利用"dsolve"求测地线方程的数值解，并将其代入参数方程可以得到波状体曲面的测地线. 这就是下面这段程序的内容(对波状体曲面用了"plotgeo"). 输入包括参数 ϵ、初始点及导数、运行时间"T"、绘制测地线的点的个数"N"、构成区间$[a, b]$的格子、用"theta"和"phi"给出的绘制时的方向以及测地线的颜色.

```
> undugeo:=proc(eps,u0,v0,Du0,Dv0,T,N, gr,theta,phi,col)
local kk2,del,del0,ulim,desys,u1,v1,geo,plotX,equator;
kk2:=evalf(2*sqrt(eps)/(1+eps));
ulim:=fsolve(JacobiSN(u,kk2)=1,u);
del:=subs(a=1,[-a*(1-eps)*(EllipticK(kk2)+
EllipticF(JacobiSN(u,kk2),kk2))- a*(1+eps)*(EllipticE(kk2)
+ EllipticE(JacobiSN(u,kk2),kk2)),
a*(1+eps)*JacobiDN(u,kk2)*cos(v),a*(1+eps)*
JacobiDN(u,kk2)*sin(v)]);
del0:=subs({a=1,u=0},[-a*(1-eps)*(EllipticK(kk2) +
EllipticF(JacobiSN(u,kk2),kk2)) - a*(1+eps)*(EllipticE(kk2)+
EllipticE(JacobiSN(u,kk2),kk2)),a*(1+eps)*JacobiDN(u,kk2)*
cos(v),a*(1+eps)*JacobiDN(u,kk2)*sin(v)]);
desys:=dsolve({geosq(del),u(0)=u0,v(0)=v0,D(u)(0)=Du0,
D(v)(0)=Dv0},{u(t),v(t)},type=numeric, output=
listprocedure);
u1:=subs(desys,u(t)); v1:=subs(desys,v(t));
geo:=tubeplot(subs(u='u1'(t),v='v1'(t),del),t=0..T,
radius=0.02,color=col,numpoints=N):
equator:=tubeplot(del0,v=0..2*Pi,radius=0.015,color=black);
plotX:=plot3d(subs({u=u(t),v=v(t)},del),u=-ulim..ulim,
v=0..2*Pi,grid=[gr[1],gr[2]],shading=XY):
display({geo,plotX,equator},style=wireframe,scaling=
constrained,orientation=[theta,phi]);
end:
```

当然主要关心 $\epsilon\neq 0$ 的情形. 此时测地线(我们希望它是闭的)在平行圆之间跳跃. 下面程序确定了测地线在波状体曲面上前进 π 时对应的 u 值. 若 $u=0$，由对称性知测地线是闭的. 因为

271 数值解不是100%精确，要用单调性和连续性保证测地线是闭的. 关于程序“halfbouncepoint”，需要注意几件事情. 第一，这个程序能够激起试验的兴趣，也就是通过不断的修正错误才能找到闭测地线. 第二，通过取“$D(v)(0)=1$”和“$D(u)(0)=0$”，找到起始点平行于平行面(在 u_0 处)的测地线. 第三，用“fsolve”命令解出测地线在波状体曲面上绕行 π 的时间“ttt”，再将这个“ttt”代入“uuu”求出对应的 u 值——“$uuu0$”——或者输出这个值，或者对于特殊的时间，由于“fsolve”求不出数值解面输出错误信息.

```
> halfbouncepoint:=proc(u0,eps)
local kk2,del,geosystem,uuu,vvv,ttt,uuu0;
kk2:=2*sqrt(eps)/(1+eps);
del:=subs(a=i,[-a*(1-eps)*(EllipticK(kk2)+
EllipticF(JacobiSN(u,kk2),kk2))
-a*(1+eps)*(EllipticE(kk2)+ EllipticE(JacobiSN(u,kk2),kk2)),
a*(1+eps)*JacobiDN(u,kk2)*cos(v),a*(1+eps)*
JacobiDN(u,kk2)*sin(v)]);
geosystem:=dsolve({geoeq(del),u(0)=u0,v(0)=0,D(u)(0)=0,
D(v)(0)=1},{u(t),v(t)},type=numeric, output=
listprocedure,range=0..25);
uuu:=subs(geosystem,u(t)); vvv:=subs(geosystem,v(t));
ttt:=timelimit(30,fsolve(vvv(t)=evalf(Pi),t));
if type(ttt,float) then
uuu0:=eval(uuu(t),t=ttt);
uuu0;
else print('time error');
end if;
end:
```

下面 $\epsilon=0.3$ 的例子演示了我们的方法. “halfbouncepoint”的第一个应用说明闭测地线的存在性. 也就是说，负值到正值的转变及中值定理保证了存在 u_0 等于0——即测地线为闭的. 进一步的应用可以得到 u_0 的校正值，由此绘制闭测地线(见图5-21).

```
> for jj from -2 to 2 do
print(0.99+jj*0.005,halfbouncepoint(0.99+jj*0.005,0.3)); od;
```

$$0.980,-0.003\,546\,013\,760\,909\,293\,26$$
$$0.985,-0.001\,555\,371\,628\,761\,785\,32$$
$$0.99,0.000\,478\,130\,347\,751\,062\,978$$
$$0.995,0.002\,555\,046\,572\,975\,481\,80$$
272
$$1.000,0.004\,675\,935\,360\,170\,027\,48$$

```
> for jj from -2 to 2 do
print(0.9888+jj*0.0001,halfbouncepoint(0.9888+ jj*0.0001,
0.3));
od;
```

$$0.9886,-0.000\,095\,602\,422\,856\,255\,840\,0$$
$$0.9887,-0.000\,054\,733\,909\,208\,473\,218\,6$$
$$0.9888,-0.000\,013\,848\,294\,186\,654\,753\,0$$
$$0.9889,0.000\,027\,054\,461\,518\,872\,478\,1$$
$$0.9890,0.000\,067\,974\,626\,220\,328\,789\,8$$

```
> for jj from -2 to 2 do
print(0.9888338613+jj*0.0000000001,halfbouncepoint(
0.9888338613+jj*0.0000000001,0.3)): od;
```

$$0.988\,833\,861\,1,-0.215\,471\,528\,640\,376\,330\ 10^{-9}$$
$$0.988\,833\,861\,2,-0.131\,270\,777\,451\,245\,047\ 10^{-9}$$
$$0.988\,833\,861\,3,-0.470\,980\,841\,132\,950\,801\ 10^{-10}$$
$$0.988\,833\,861\,4,0.371\,504\,261\,815\,341\,908\ 10^{-10}$$
$$0.988\,833\,861\,5,0.121\,351\,873\,428\,460\,211\ 10^{-9}$$

可以绘制起始于 $u_0=0.988\,833\,861\,4$ 的闭测地线近似图像. 结果如图 5-21 所示.

```
> undugeo(0.3,0.9888338614,0,0,1,100,200, [20,20],-90,68,
blue);
```

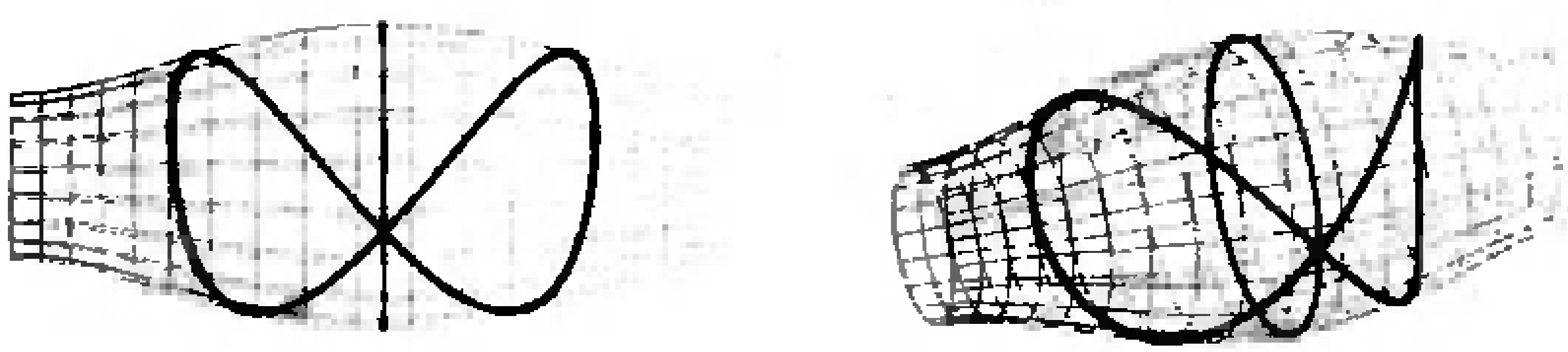


图 5-21 $\varepsilon=0.3$ 的波状体曲面的闭测地线的两个视图

练习 5.6.9 上述用于波状体曲面的关于"驼峰"对称的方法也适用于任意 u-克莱罗参数形式的曲面. 特别地, 也适用于旋转箕舌线(见练习 5.2.15)这样的旋转曲面. 可编写"halfbouncepoint"程序求它的闭测地线.

5.6.5 非 $\mathbb{R}^3$ 中曲面的测地线

最后对于非 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面, 只要它是具有共形度量的平面区域, 就可以编写 Maple 程序计算它的测地线方程. 首先需要的是度量. 现在输入参数形式 X 和比例函数 g.

```
> EFGconf := proc(X,g)
local Xu,Xv,E,F,G;
Xu := <diff(X[1],u),diff(X[2],u),diff(X[3],u)>;
Xv := <diff(X[1],v),diff(X[2],v),diff(X[3],v)>;
E := DotProduct(Xu,Xu,conjugate=false)/g^2;
F := DotProduct(Xu,Xv,conjugate=false)/g^2;
G := DotProduct(Xv,Xv,conjugate=false)/g^2;
simplify([E,F,G]);
end:
```

下面程序给出了共形度量的测地线方程:

```
> geoeqconf:=proc(X,g)
local M,eq1,eq2;
M:=EFGconf(X,g);
eq1:=diff(u(t),t$2)+subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[1],u)/
(2*M[1]))*diff(u(t),t)^2+subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[1],v)/
(M[1]))*diff(u(t),t)*diff(v(t),t)-subs({u=u(t),v=v(t)},
```

```
diff(M[3],u)/(2*M[1]))*diff(v(t),t)^2=0;
eq2:=diff(v(t),t$2)-subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[1],v)/
(2*M[3]))*diff(u(t),t)^2+subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[3],u)/
(M[3]))*diff(u(t),t)*diff(v(t),t)+subs({u=u(t),v=v(t)},
diff(M[3],v)/(2*M[3]))*diff(v(t),t)^2=0;
eq1,eq2;
end:
```

最后可以编写由共形度量定义的曲面上测地线的绘制程序.

```
> plotgeoconf:=proc(X,g,ustart,uend,vstart,vend,u0,v0,Du0,
Dv0,T,N,gr,theta,phi)
local sys,desys,u1,v1,listp,geo,plotX;
sys:=geoeqconf(X,g);
273~274 desys:=dsolve({sys,u(0)=u0,v(0)=v0,D(u)(0)=Du0,D(v)(0)=Dv0},
{u(t),v(t)},type=numeric, output=listprocedure);
u1:=subs(desys,u(t)); v1:=subs(desys,v(t));
geo:=tubeplot(convert(subs(u='u1'(t),v='v1'(t),X),list),
t=0..T,radius=0.025,color=black,thickness=2,numpoints=N):
plotX:=plot3d(X,u=ustart..uend,v=vstart..vend,grid=[gr[1],
gr[2]],shading=XY,lightmodel=light3):
display({geo,plotX},shading=XY,lightmodel=light2,scaling=
constrained,orientation=[theta,phi]);
end:
```

先看练习 5.4.20 中定义的球极平面. 它的测地线可能为径向线或圆(单位圆为特殊情形). 如图 5-22 及图 5-23 所示.

```
> polarplane:=<u*cos(v)|u*sin(v)|0>;
```

$$polarplane := [u\cos(v), u\sin(v), 0]$$

```
> plotgeoconf(polarplane,(1+u^2)/2,0,4,0,2*Pi,1,0,0,1,8,30,
[10,30],0,0) ;
> plotgeoconf(polarplane,(1+u^2)/2,0,4,0,2*Pi,0.5,0,1,0,
1.08,30,[10,30],0,0);
> plotgeoconf(polarplane,(1+u^2)/2,0,4,0,2*Pi,2,0,1,1,8,50,
[10,30],0,0) ;
> plotgeoconf(polarplane,(1+u^2)/2,0,13,0,2*Pi,8,0,4,1,35,
200,[10,30],0,0);
```

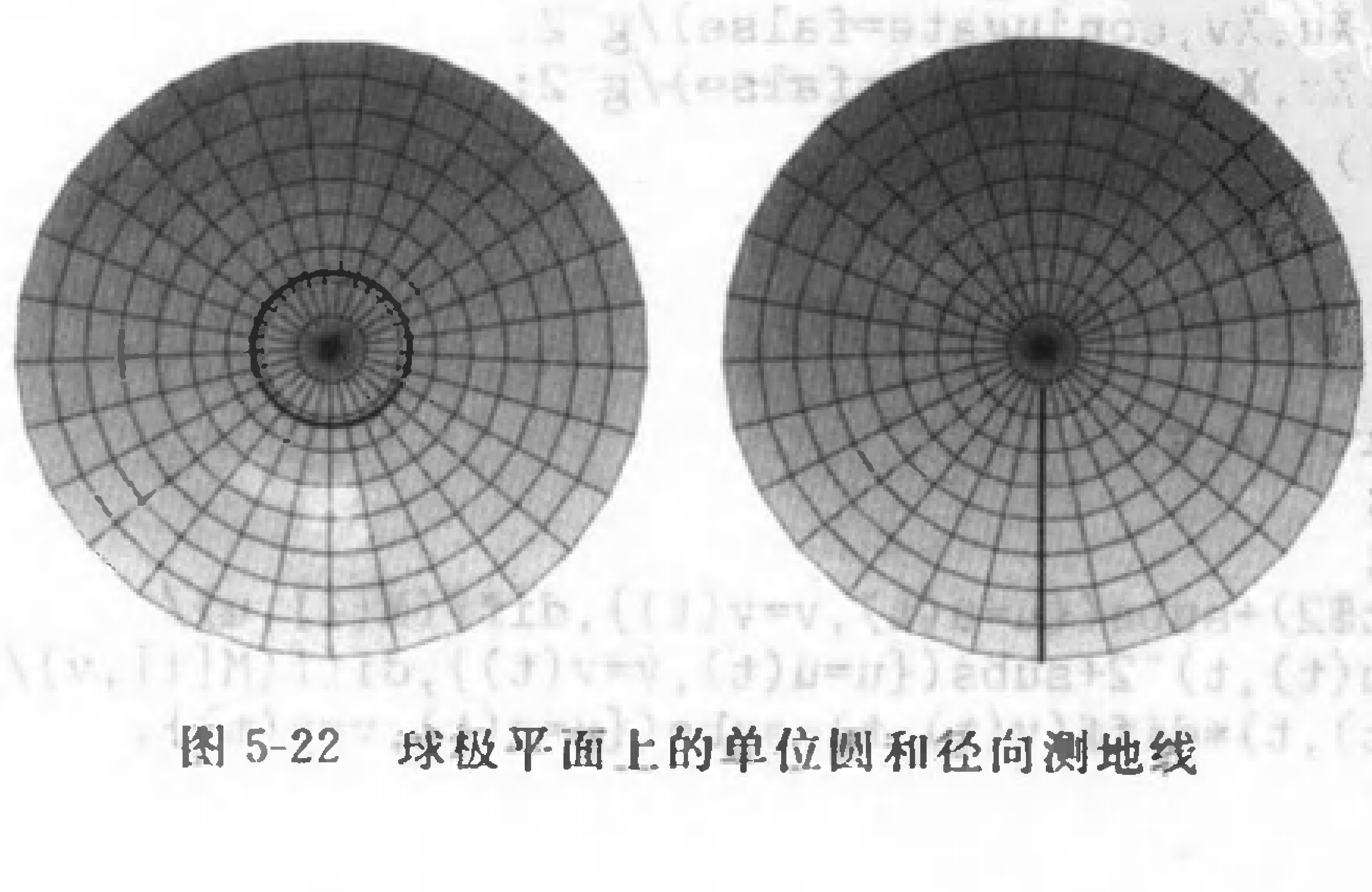


图 5-22 球极平面上的单位圆和径向测地线

练习 5.6.10　试用下述程序求球极球面上的测地线（如图 5-24 所示）.

```
> sphere:=<cos(u)*cos(v)|sin(u)*cos(v)|sin(v)>;
```

$$sphere := [\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), \sin(v)]$$

```
> plotgeoconf(sphere,1-sin(v),0,2*Pi,-Pi/2,Pi/2,0,1,1,-2,
15,650,[25,25],60,66);
```
275

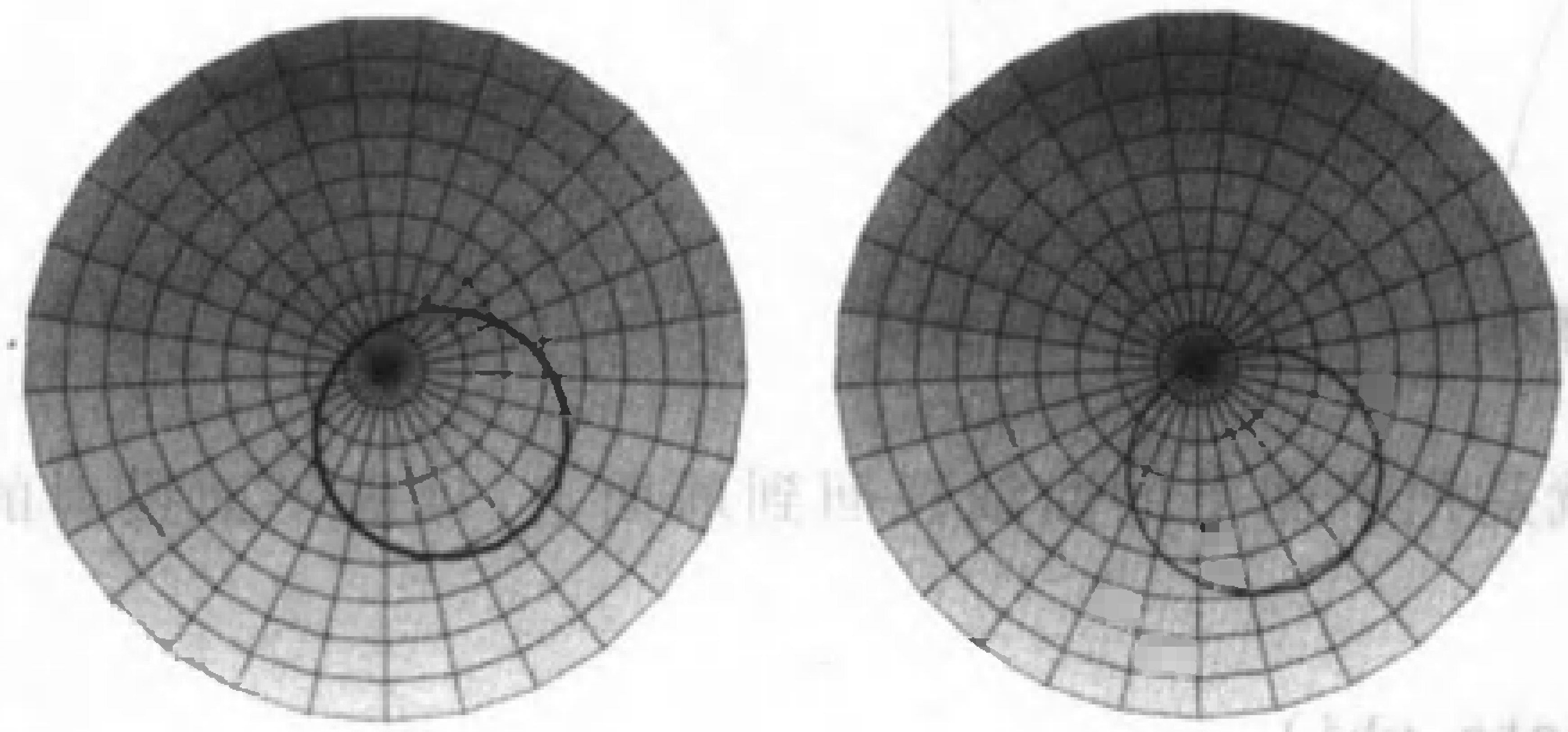


图 5-23　球极平面的圆测地线

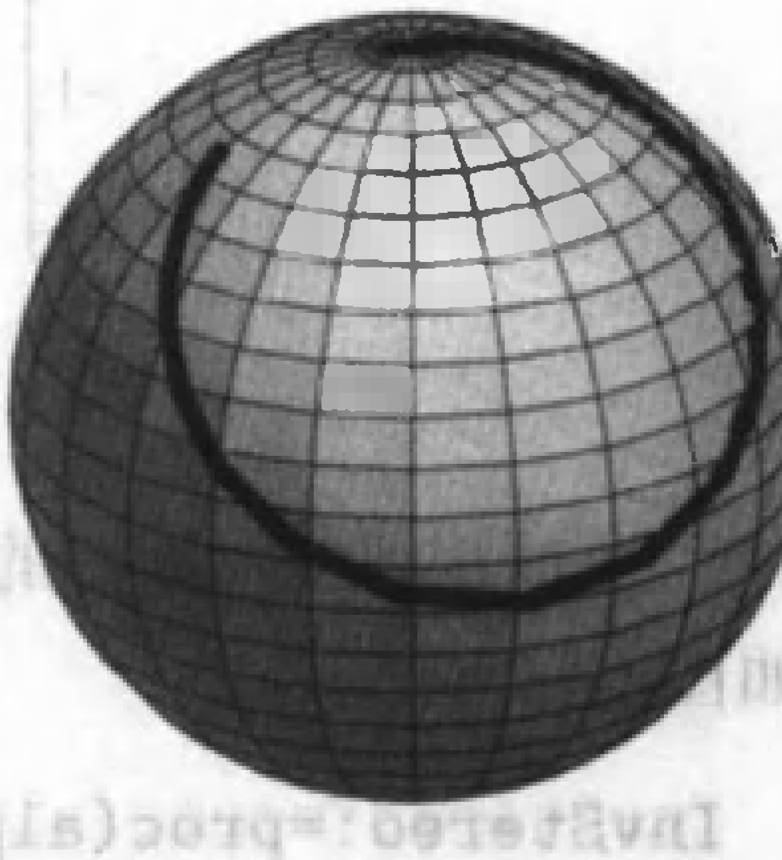


图 5-24　球极球面的测地线

练习 5.6.11　绘制图 5-7 中庞加莱平面的测地线. 换言之，只需修改 plotgeo 程序. 提示：

```
> uphalf:=<u|v|0>;
```

$$uphalf := [u, v, 0]$$

```
> plotgeoconf(uphalf,v,-5,5,0.1,7,-4,0.2,1,20,2.5,800,
[11,20],-90,-16);
```

5.6.6　球极平面及墨卡托投射

可以用 Maple 实现球极平面及墨卡托投射. 下面程序用的是笛卡儿坐标下的球极平面投射公式：$St(x, y, z)=(x/(1-z), y/(1-z), 0)$.

```
> Stereo:=proc(alpha,a,b,viewx1,viewx2,viewy1,viewy2)
local sqleng,curv,sph,projcurv;
sqleng:=VectorNorm(alpha,Euclidean,conjugate=false)^2;
curv:=<alpha[1]/(1-alpha[3])|alpha[2]/(1-alpha[3])>;
projcurv:=plot([curv[1],curv[2],t=a..b],color=black,
thickness=2,numpoints=200);
display({projcurv},scaling=constrained,view=[viewx1..viewx2,
viewy1..viewy2]);
end:
```
276

在图 5-25 中可以看到一些投射曲线. 第二个是纬度圆的投射.

```
> Stereo(<cos(t)^2,sin(t)*cos(t),sin(t)>,-Pi,Pi,-0.5,2,
-1.6,1.6);
> Stereo(<cos(t)*cos(Pi/4),sin(t)*cos(Pi/4),sin(Pi/4)>,0,
2*Pi,-3,3,-3,3);
```

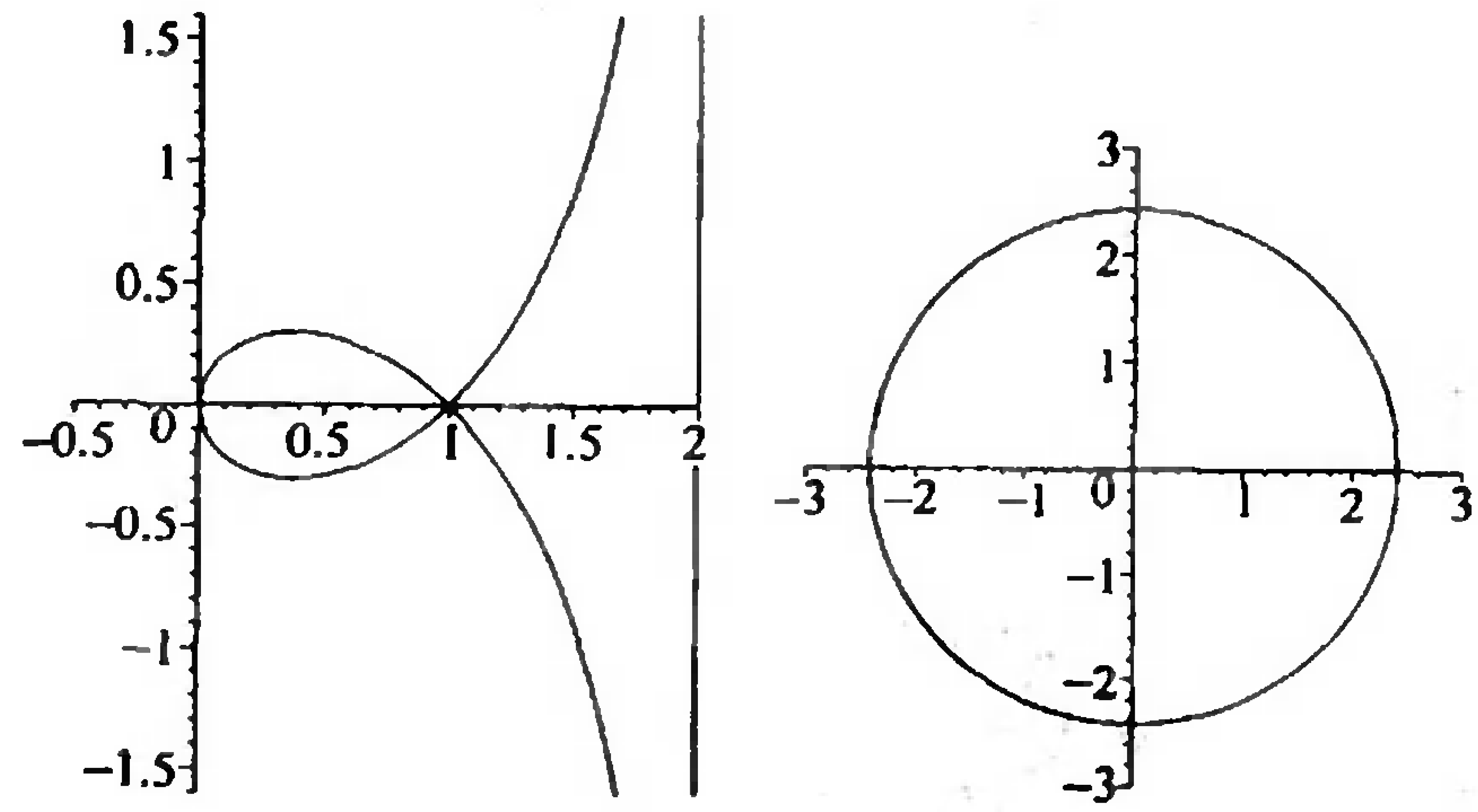


图 5-25 球极平面映射投射球面曲线

还可以做“逆球极平面映射”的程序，也就是把平面上的曲线拉回到球面上(球极平面投射的原像). 如图 5-26 所示.

```
> InvStereo:=proc(alpha,a,b,theta,phi)
local sqleng,curv,sph,plcurv,sphcurv;
sqleng:=VectorNorm(alpha,Euclidean,conjugate=false)^2;
curv:=<2*alpha[1]/(1+sqleng),2*alpha[2]/(1+sqleng),
(sqleng-1)/(1+sqleng)>;
sphcurv:=tubeplot(convert(curv,list),t=a..b,radius=0.015,
color=black,numpoints=200);
sph:=plot3d([cos(u)*cos(v),sin(u)*cos(v),sin(v)],u=0..
2*Pi,v=-Pi/2..Pi/2):
display({sph,sphcurv},scaling=constrained,shading=zhue,
orientation=[theta,phi],style=wireframe);
end:
277 > InvStereo(<t+1,2*t+3,0>,-8,8,60,52);
> InvStereo(<cos(t)^3,sin(t)^3,0>,-8,8,15,117);
```

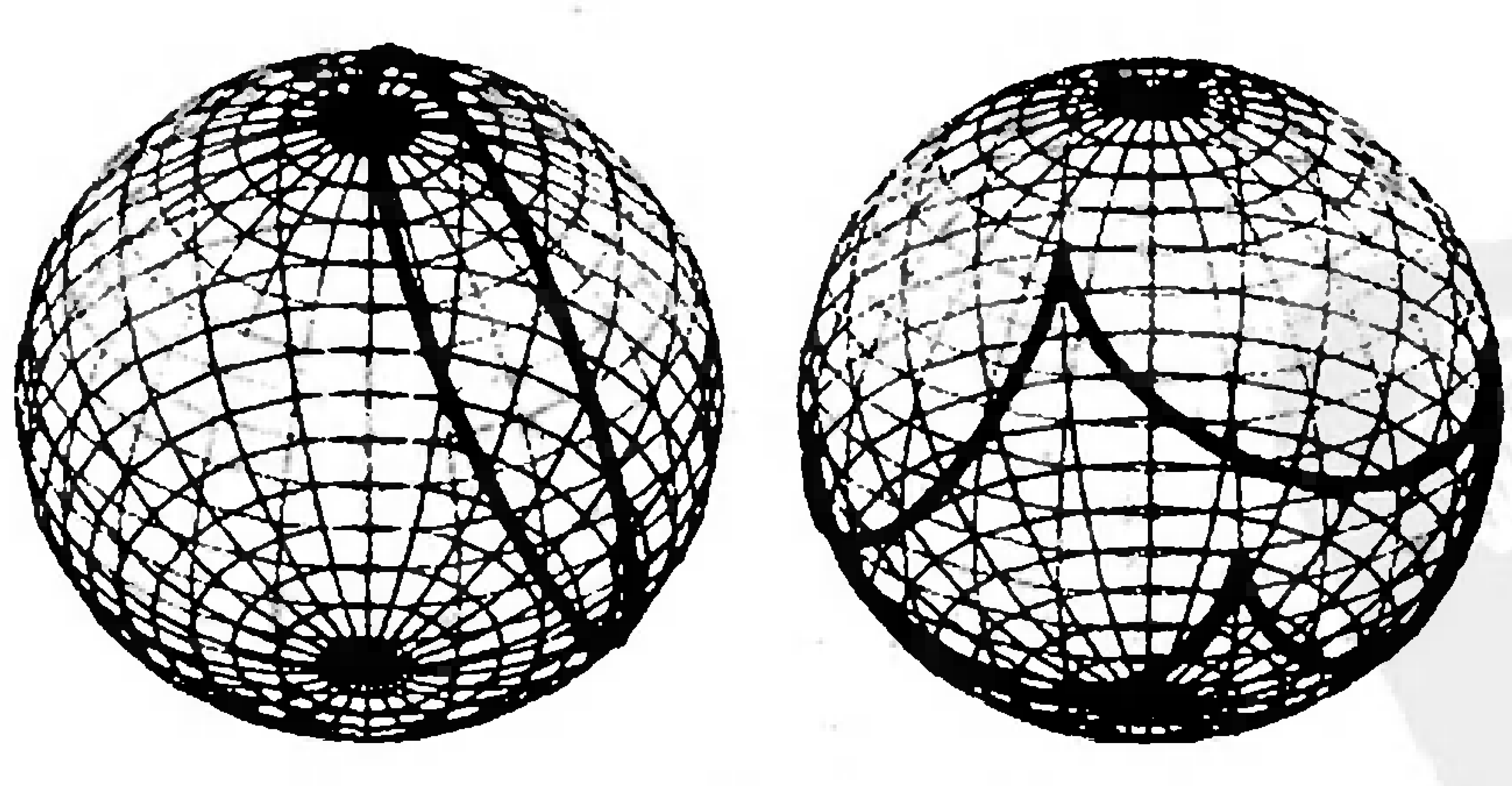


图 5-26 平面曲线的逆球极平面映射

练习 5.5.13 引入了墨卡托投射，它是共形的. 特别地，墨卡托投射保持角度. 这对于航海极为重要. 它最重要的用途是在平面地图上以与竖直线成定角的直线绘制航海路线；在航海的过程中，以与经线(即北)成定角确定航线. 斜驶(loxodromic)路径如图 5-28 所示.

```
> Merc:=proc(alpha,a,b,viewx1,viewx2,viewy1,viewy2)
local curv,projcurv;
curv:=<arctan(alpha[2]/alpha[1]),1/2*ln((1+alpha[3])/
(1-alpha[3]))>;
projcurv:=plot([curv[1],curv[2],t=a..b],color=black,
thickness=2);
display({projcurv},scaling=constrained,view=[viewx1..viewx2,
viewy1..viewy2]);
end:
```

下述命令得到纬线和经线的投射，如图 5-27 所示.

```
> Merc(<cos(t)*cos(Pi/4),sin(t)*cos(Pi/4),sin(Pi/4)>,0,2*Pi,
-2,2,-2,2);
```

```
> Merc(<cos(t)*cos(Pi/4),cos(t)*sin(Pi/4),sin(t)>,-Pi/2,
Pi/2,-2,2,-2,2) ;
```

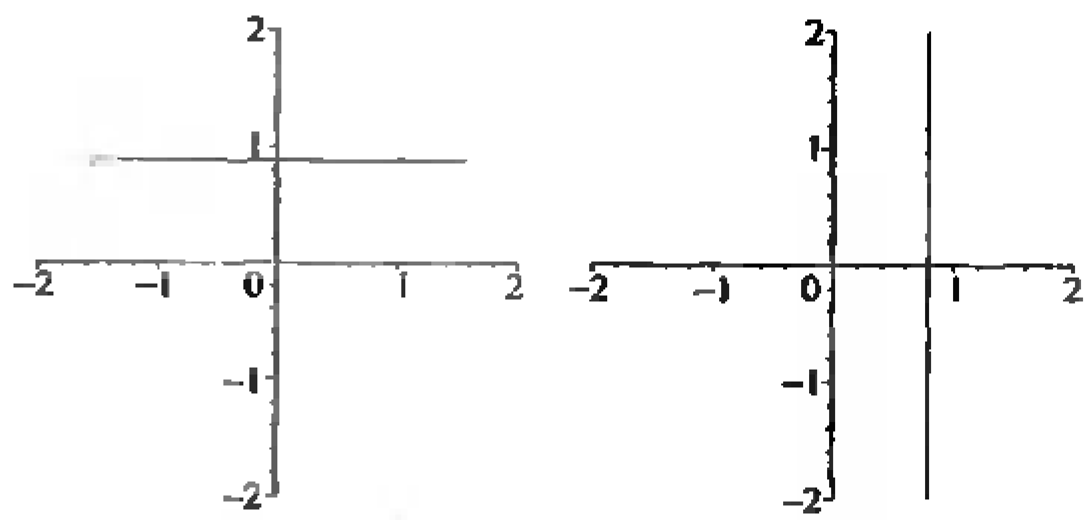


图 5-27 墨卡托投射将纬线映为水平线，经线映为竖直线

在下一程序中，用逆墨卡托投射将平面曲线拉回到球面上. 如图 5-28 及图 5-29 所示.

```
> InvMerc:=proc(alpha,a,b)
local sqleng,curv,sph,plcurv,sphcurv,invlogalpha;
invlogalpha:=<exp(alpha[2])*cos(alpha[1]),exp(alpha[2])*
sin(alpha[1]),0>;
```

278

```
sqleng:=VectorNorm(invlogalpha,Euclidean,conjugate=false)^2;
curv:=<2*invlogalpha[1]/(1+sqleng),2*invlogalpha[2]/
(1+sqleng),(sqleng-1)/(1+sqleng)>;
sphcurv:=tubeplot(convert(curv,list),t=a..b,radius=0.015,
color=black,numpoints=200);
sph:=plot3d([cos(u)*cos(v),sin(u)*cos(v),sin(v)],u=0..2*Pi,
v=-Pi/2..Pi/2):
display({sph,sphcurv}.scaling=constrained,shading=zhue,
style=wireframe);
end:
```

现在我们展示逆墨卡托投射如何把平面直线拉回为斜驶线(如图 5-28 所示)，在这一路径上船将与“北极”保持固定角.

```
> InvMerc(<5*t+3,t+i,0>,-5,5);
```

抛物线在逆墨卡托投射下的像是另一条我们感兴趣的球面上的曲线.

```
> InvMerc(<t^2,t,0>,-5,5);
```

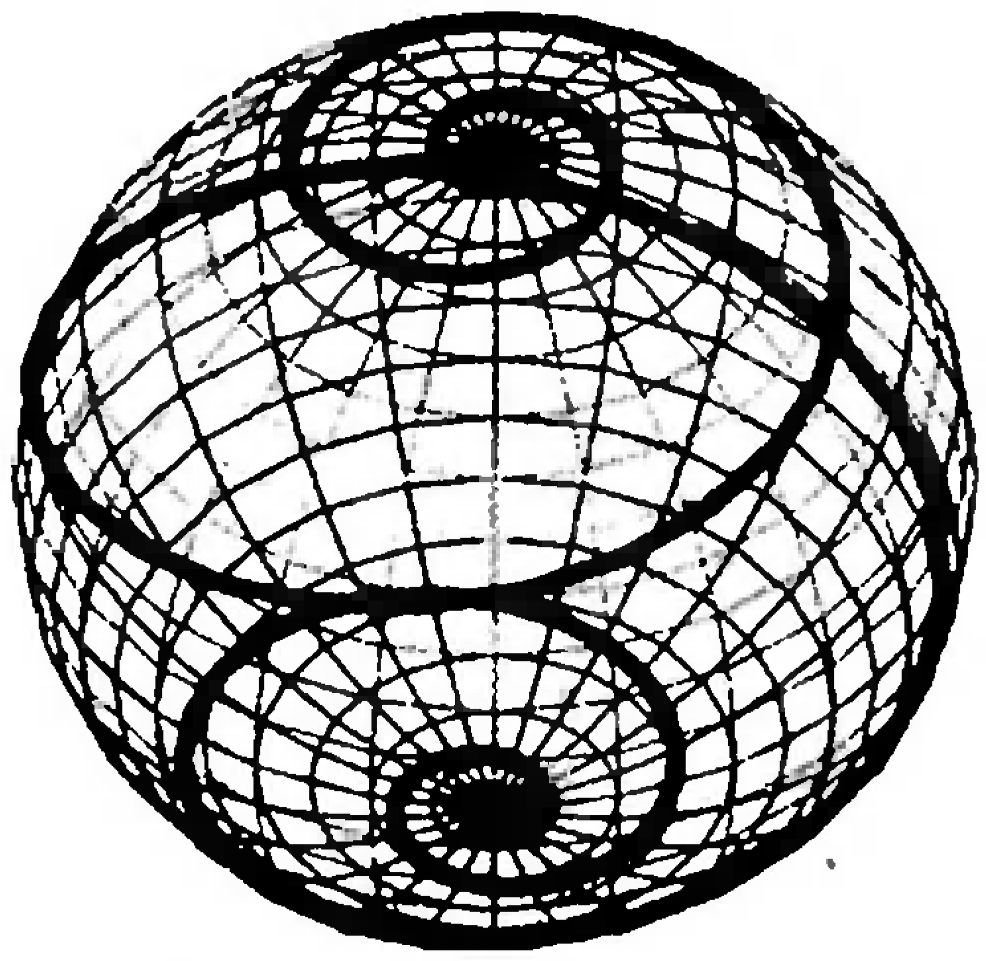


图 5-28　逆墨卡托投射把平面直线映为斜驶线

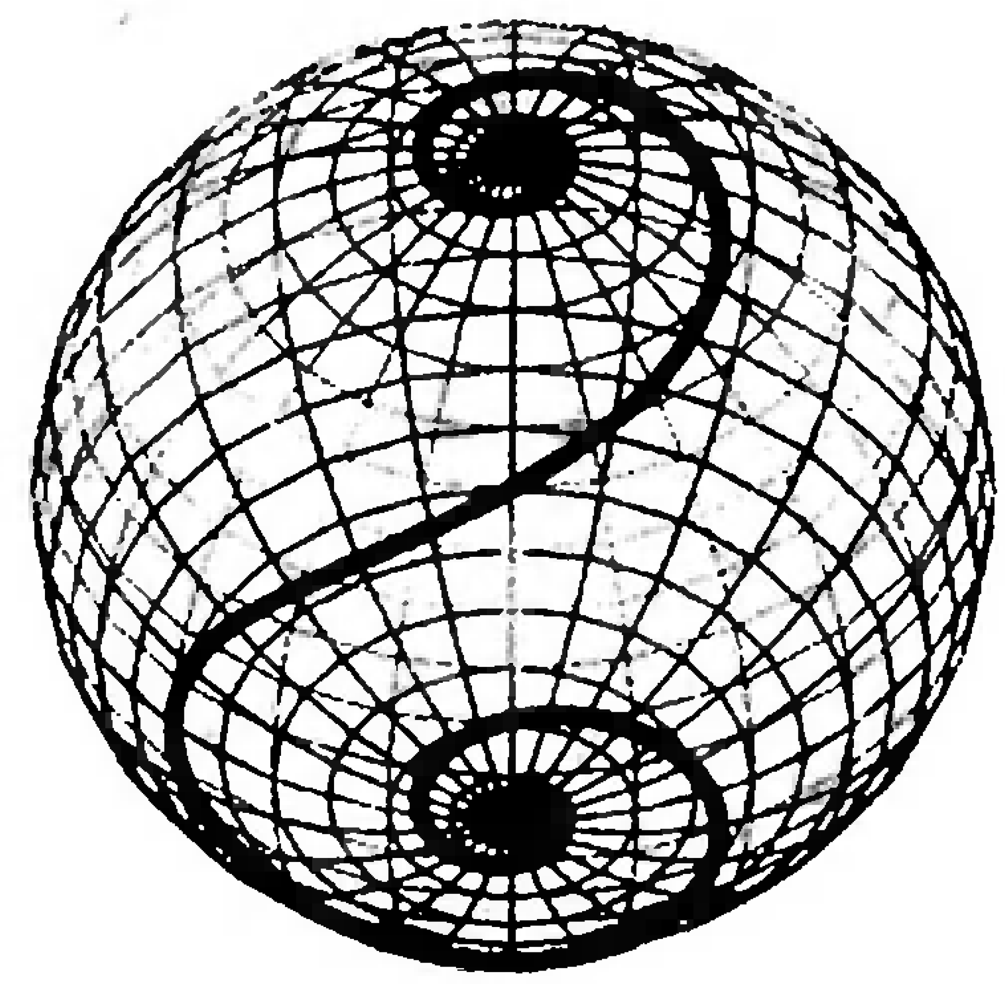


图 5-29　逆墨卡托投射把抛物线映为有趣的曲线

练习 5.6.12　运行下列 Maple 命令，了解图形的含义.

```
> InvMerc(<3,t,0>,-5,5);
> InvMerc(<t,0.5,0>,-5,5);
> InvMerc(<t,t^2,0>,-5,5);
> InvMerc(<t+1,sin(t),0>,-5,5);
> InvMerc(<sin(t),cos(t),0>,-5,5);
> InvMerc(<cos(t)^3,sin(t)^3,0>,-5,5);
```

作图总有一个致命的缺陷，就是不能同时保持角度和面积. 这是高斯绝好定理的必然结果(定理 3.4.1). 下面计算墨卡托参数形式的面积元.

```
> mercproj:=<u|ln(tan(v/2+Pi/4))|0>;
```

$$mercproj := \left[u, \ln\left(\tan\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right), 0\right]$$

279~280 参数曲面的面积元是$\sqrt{EG-F^2}$. 比较平面和球的墨卡托参数形式的面积元.

```
> mercmet:=EFG(mercproj);
```

$$mercmet := \left[1, 0, \frac{1}{4}\,\frac{\left(1+\tan^2\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}{\tan^2\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

面积元是

```
> simplify(sqrt(mercmet[1]*mercmet[3]-mercmet[2]^2),
symbolic);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{1+\tan^2\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

```
> simplify(1/(2*expand(sin(1/2*v+1/4*Pi)*cos(1/2*v+1/4*Pi)),
symbolic));
```

$$\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)-1}$$

化简为 $1/\cos(v)$，球的面积元如下：

```
> sphmet:=EFG(sphere);
```

$$sphmet := [\cos^2(v),0,1]$$

显然为 $\cos(v)$. 若我们定义映射的扭曲为

$$\frac{\text{Mercator 的面积元}}{\text{球的面积元}} = \frac{1/\cos(v)}{\cos(v)} = \frac{1}{\cos^2(v)},$$

由此可知在墨卡托投射下面积发生了扭曲. 注意畸变的大小依赖于经度 v 的取值，即当 v 趋近于 $\pm\pi/2$，扭曲增加. 这意味着高纬度区域在墨卡托投射下的面积比实际的面积大. 有些人认为这是欧洲人在探索更大的世界的时候，喜欢利用墨卡托投射的原因之一. 关于更详细的地图几何见[Fee02]. 用 Maple 方法做地图见[TBO01].

5.7 工业上的应用

本节给出微分几何在一个工业问题上的应用. 在[BM95]中描述了这个应用，且包含这里删除的细节. 因为不能包含所有计算的细节，所以本节可以作为拓展练习. 281

在工业上一个普遍的问题是为包装生产项目创造一个顺利的运行程序. 典型地包装材料(例如塑料包)从水平方向解开，然后放在弯曲的曲面(移为侧翼)上面，用来引导材料进入一个垂直的圆筒，在这里面沿圆柱形墙壁完成铸造，并且沿前面边缘和底部密封，形成某种类型的“袋子”. 产品投入袋子，上面密封，袋子从圆筒中脱落. 这一过程的问题是，除非侧翼有适当的形状，否则包装材料可能会出现波纹，导致材料堵塞，从而过程停止. 这里出现的几何问题是确定侧翼的形状，使得整个过程能够顺利地完成. 因为侧翼曲面是辅助平面(展开的塑料)无伸缩地变为圆柱面的一个过渡曲面，直观上它显然与平面等距(显然也与圆筒等距). 这意味着侧翼为可展曲面. 为使后面的讨论更有意义，读者可以提前看看图 5-30，这是一个可能的侧翼形状.

实际上，可如下得到可展性. 取凹的左右对称的平面曲线 $\bar{\alpha}(v)$，且在对称轴上有单一极大值，在某特定高度下 $\bar{\alpha}$ 在水平轴上的宽是 $2\pi R$. 将平面沿半径为 R 的竖直的圆柱卷起，宽为 $2\pi R$ 的 $\bar{\alpha}$ 上的点给出了竖直圆柱上的一条闭曲线 α. 高度 h 以下的平面就成为圆柱，$\bar{\alpha}$ 以上的部分折叠后就是侧翼. 曲线 α 就成为*弯曲线*(bending curve). 最后为了使平面到圆柱的变换尽可能地光滑，需要侧翼的部分也为平面. 问题是：α 是什么样的? 怎样折叠? 这就是需要微分几何的地方.

记 $\bar{\alpha}(v)=(v, z(v))$, $-\pi R\leqslant v\leqslant\pi R$，其中 $z(v)$ 是上面提到的某种函数(例如偶函数). 利用半径 R 的竖直圆柱的标准参数方程得到 α 的参数方程 $\alpha(v)=(R\cos(v/R), R\sin(v/R), z(v))$. $\bar{\alpha}$ 与 α 的关系如下：首先，若 $\bar{\alpha}$ 是弧长参数 s 的参数方程，则有 $s=\int|\bar{\alpha}'(v)\mathrm{d}v|$ 且

$$\frac{ds}{dv}=\sqrt{1+z_v^2} \quad \text{或} \quad \frac{dv}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1+z_v^2}}.$$

由定理 1.4.5 的曲率公式，分别得到$\bar{\alpha}$和 α 的曲率：

282 $$\bar{\kappa}=-\frac{z_{vv}}{(1+z_v^2)^{3/2}} \quad \text{和} \quad \kappa\frac{(R^2z_{vv}^2+z_v^2+1)^{1/2}}{R(1+z_v^2)^{3/2}}.$$

又$\bar{\alpha}(v)$为凹，$|\bar{\alpha}'\times\bar{\alpha}''|^2=-z_{vv}$．也就是 $z_{vv}<0$．比较公式，可见

$$\kappa^2=\bar{\kappa}^2+\frac{1}{R^2(1+z_v^2)^2}.$$

因此$\bar{\kappa}<\kappa$．类似地，α 的挠率 τ 为

$$\tau=\frac{R^2z_{vvv}+z_v}{R(R^2z_{vv}^2+z_v^2+1)}.$$

有了这些准备知识，可以看与$\bar{\alpha}$和 α 相关的可展曲面．

$$\bar{x}(s,u)=\bar{\alpha}(s)+u\bar{d}(s),\quad x(s,u)=\alpha(s)+ud(s)$$

是直纹曲面，其中 s 是$\bar{\alpha}$的弧长参数(因为要求等距，所以也是 α 的弧长)．向量函数$\bar{d}(s)$和$\bar{d}(s)$分别表示曲面$\bar{x}$和 x 的母线方向．在平面和 3 维空间中分别用基$\{\bar{T}(s),\bar{N}(s)\}$，$\{T(s),N(s),B(s)\}$描述这些向量．而且平面到侧翼的弯曲等距把 $\bar{T}(s)$映到 $T(s)$，且必须保持所有的角度不变．因此 $\bar{N}(s)$必须是垂直于 $T(s)$的单位向量，可记为 $\cos(\phi(s))N(s)+\sin(\phi(s))B(s)$．则

$$\bar{d}(s)=\cos(\delta(s))\bar{T}(s)-\sin(\delta(s))\bar{N}(s)$$
$$d(s)=\cos(\delta(s))T(s)-\sin(\delta(s))(\cos(\phi(s))N(s)+\sin(\phi(s)))B(s),$$

其中因为等距保持角度，所以 $\delta(s)$不变．($\bar{d}(s)$取负号是因为$\bar{d}$位于由 $\bar{T}$ 和 $\bar{N}$ 确定的象限外部.)注意 $\delta(s)$即为母线和曲线 α 的夹角．又$\bar{d}\cdot\bar{d}=1$，可得$\bar{d}\cdot\bar{d}'=\bar{d}\cdot\bar{d}_s=0$．经过简单计算，可得度量系数(例如 $E=x_s\cdot x_s$)为

$$\bar{E}=(\bar{T}+u\bar{d}_s)\cdot(\bar{T}+u\bar{d}_s),\quad \bar{F}=\bar{T}\cdot\bar{d}=\cos(\delta),\quad \bar{G}=\bar{d}\cdot\bar{d}=1;$$
$$E=(T+ud_s)\cdot(T+ud_s),\quad F=T\cdot d=\cos(\delta),\quad G=d\cdot d=1.$$

注意，$\bar{F}=F$，$\bar{G}=G$，因此要得到平面与侧翼的等距只需 $\bar{E}=E$．展开点积并比较 u 的幂，得到以下条件：

$$\bar{T}\cdot\bar{d}_s=T\cdot d_s \quad \text{和} \quad \bar{d}_s\cdot\bar{d}_s=d_s\cdot d_s.$$

再用 Frenet 公式表示 $\bar{d}_s$ 和 d_s：

$$\bar{d}_s=(-\sin(\delta)\delta_s+\sin(\delta)\bar{\kappa})\bar{T}+(\cos(\delta)\bar{\kappa}-\cos(\delta)\delta_s)\bar{N},$$
$$d_s=(-\sin(\delta)\delta_s+\sin(\delta)\cos(\phi)\kappa)T$$
$$+(\cos(\delta)\kappa-\cos(\delta)\delta_s\cos(\phi)+\sin(\delta)\sin(\phi)\phi_s+\sin(\delta)\sin(\phi)\tau)N$$

283 $$+(-\cos(\delta)\delta_s\sin(\phi)-\sin(\delta)\cos(\phi)\tau-\sin(\delta)\cos(\phi)\phi_s)B.$$

这里 $\phi_s=d\phi/ds$，$\delta_s=d\delta/ds$．注意因为 d 在 3 维空间中．所以第二个方程里出现挠率 τ．

练习 5.7.1 利用 Frenet 公式验证上面给出的$\bar{d}$和 d 公式．

下面考虑等距的条件. 计算

$$\overline{T}\cdot\overline{d}_s=-\sin(\delta)\delta_s+\sin(\delta)\overline{\kappa}$$

$$\overline{d}_s\cdot\overline{d}_s=\delta_s^2+\overline{\kappa}^2-2\delta_s\overline{\kappa}$$

$$T\cdot d_s=-\sin(\delta)\delta_s+\sin(\delta)\cos(\phi)\kappa.$$

因为 $d_s\cdot d_s$ 形式比较零乱，所以讨论 $\overline{d}_s\cdot\overline{d}_s=d_s\cdot d_s$ 时再给出表达式. 由 $\overline{T}\cdot\overline{d}_s=T\cdot d_s$ 得

$$\cos(\phi)=\frac{\overline{\kappa}}{\kappa}=\frac{-Rz_w}{(R^2z_w^2+z_v^2+1)^{1/2}}.$$

因为 $0\leqslant\phi\leqslant2\pi$，所以 ϕ 有两种可能. 一种是与 $\cos\phi_1=\overline{\kappa}/\kappa$，$\sin\phi_1>0$ 对应，另一种是与 $\cos\phi_2=\overline{\kappa}/\kappa$，$\sin\phi_2<0$ 对应. 换句话说，$0<(\phi_1)<\pi/2$ 和 $\phi_2=-\phi_1$.

经过多次代数运算，$\overline{d}_s\cdot\overline{d}_s=d_s\cdot d_s$ 可化简为

$$\begin{aligned}\overline{\kappa}^2-2\delta_s\overline{\kappa}=&(\sin^2(\delta)\cos^2(\phi)+\cos^2(\delta))\kappa^2-2\cos(\phi)\kappa\delta_s+(2\cos(\delta)\sin(\delta)\sin(\phi))\kappa\phi_s\\&+(2\cos(\delta)\sin(\delta)\sin(\phi))\kappa\tau+\sin^2(\delta)(\phi_s+\tau)^2.\end{aligned}$$

练习 5.7.2 验证这一计算结果.

因为 $\overline{\kappa}=\kappa\cos\phi$，所以 $\overline{\kappa}^2-2\delta_s\overline{\kappa}=\kappa^2\cos^2\phi-2\delta_s\kappa\cos\phi$. 因此替换上述方程的左边，化简得

$$\begin{aligned}0=&(\sin^2(\delta)\cos^2(\phi)-\cos^2(\phi)+\cos^2(\delta))\kappa^2+(2\cos(\delta)\sin(\delta)\sin(\phi))\kappa(\phi_s+\tau)\\&+\sin^2(\delta)(\phi_s+\tau)^2\\=&(\cos^2(\delta)\sin^2(\phi))\kappa^2+(2\cos(\delta)\sin(\delta)\sin(\phi))\kappa(\phi_s+\tau)+\sin^2(\delta)(\phi_s+\tau)^2.\end{aligned}$$

这是一个关于 $\phi_s+\tau$ 的二次方程，用二次方程求根公式得

$$\phi_s+\tau=-\frac{\cos(\delta)}{\sin(\delta)}\sin(\phi)\kappa.$$

可写成

$$\tan(\delta)=-\kappa\sin(\phi)/(\phi_s+\tau)$$

或者

$$\phi_s=-\tau-\kappa\sin(\phi)\cos(\delta)/\sin(\delta).$$ 284

由 $\cos(\phi)=-Rz_w/(R^2z_w^2+z_v^2+1)^{1/2}$ 计算 ϕ_s. 由 $\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$，首先得到

$$\sin(\phi)=\begin{cases}\dfrac{(1+z_v^2)^{1/2}}{(R^2z_w^2+z_v^2+1)^{1/2}} & \text{对 } \phi=\phi_1\\[2ex]-\dfrac{(1+z_v^2)^{1/2}}{(R^2z_w^2+\kappa_v^2+1)^{1/2}} & \text{对 } \phi=\phi_2\end{cases}$$

求 $\cos\phi$ 对 s 的微分(利用链式法则并回忆 $dv/ds=(1+z_v^2)^{-1/2}$)，解出 ϕ_s.

$$-\sin(\phi)\phi_s=\frac{d\cos(\phi)}{ds}=\frac{-Rz_{wv}(R^2z_w^2+z_v^2+1)+Rz_w(R^2z_wz_{wv}+z_vz_w)}{(1+z_v^2)^{1/2}(R^2z_w^2+z_v^2+1)^{3/2}}$$

$$\phi_s=\pm\frac{Rz_{wv}(1+z_v^2)-Rz_vz_w^2}{(1+\kappa_v^2)(R^2z_w^2+\kappa_v^2+1)},$$

其中±分别与 ϕ_1 和 ϕ_2 相对应. 将 ϕ_s 的表达式代入 $\tan\delta$ 的表达式，可得

$$\tan(\delta_1) = -\frac{R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1}{(2R^2 z_{vvv} + z_v)(1 + z_v^2) - R^2 z_v z_{vv}^2},$$

$$\tan(\delta_2) = \frac{1}{z_v}.$$

通常情况下 δ_1 对应于角 ϕ_1，δ_2 对应于角 ϕ_2. 进而将 $\phi_s = -\tau - \kappa\sin\phi\cos\delta/\sin\delta$ 代入 d_s 的表达式，得到一个很好的表达式：

$$d_s = (\bar{\kappa} - \delta_s)(\sin(\delta)T + \cos(\delta)\cos(\phi)N + \cos(\delta)\sin(\phi)B).$$

练习 5.7.3 验证上述计算.

现在可用 $x_u = d$，$x_s = T + ud_s$ 计算曲面 $x(u, s)$ 的单位法向量 U.

$$x_u \times x_s = -\sin(\phi)(\sin(\delta) + u(\bar{\kappa} - \delta_s))N + \cos(\phi)(\sin(\delta) + u(\bar{\kappa} - \delta_s))B,$$

$$|x_u \times x_s| = \sin(\delta) + u(\bar{\kappa} - \delta_s),$$

$$U = -\sin(\phi)N + \cos(\phi)B.$$

285 因为最终我们想要利用坐标系作详细的计算，所以需要 T，N，B 的坐标表达形式. 利用清晰的坐标形式 $\alpha = (R\cos(v/R),\ R\sin(v/R),\ z(v))$，得

$$T = \frac{d\alpha}{dv} = \frac{1}{(1+z_v^2)^{1/2}}\left(-\sin\left(\frac{v}{R}\right), \cos\left(\frac{v}{R}\right), z_v\right),$$

$$N = \frac{1}{\kappa}\frac{dT}{dv}\frac{dv}{ds}$$

$$= -\frac{Rz_v z_{vv}}{(1+z_v^2)^{1/2}(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}}\left(-\sin\left(\frac{v}{R}\right), \cos\left(\frac{v}{R}\right), z_v\right)$$

$$+ \frac{(1+z_v^2)^{1/2}}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}}\left(-\cos\left(\frac{v}{R}\right), -\sin\left(\frac{v}{R}\right), Rz_{vv}\right),$$

$$B = T \times N$$

$$= \frac{1}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}}\left(Rz_{vv}\cos\left(\frac{v}{R}\right) + z_v\sin\left(\frac{v}{R}\right), -z_v\cos\left(\frac{v}{R}\right) + Rz_{vv}\sin\left(\frac{v}{R}\right), 1\right).$$

利用这些表达式及 $\cos\phi$ 和 $\sin\phi$ 的表达式，可以得到 U 的坐标表达式. 有两种情况：$\phi = \phi_1$，$\phi = \phi_2$. 设 $\phi = \phi_2$，则 $\sin\phi = -(1+z_v^2)^{1/2}/(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}$，简单计算得

$$U_2 = \left(-\cos\left(\frac{v}{R}\right), -\sin\left(\frac{v}{R}\right), 0\right).$$

这是指向圆柱内部的法向量. 当 $\phi = \phi_1$ 时，$\sin\phi = (1+z_v^2)^{1/2}/(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}$，$U_1$ 的第三个坐标是 $-Rz_{vv}/(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1) > 0$，这是侧翼的单位法向量.

通过点积可以求出外法向量 U_1 和 $-U_2$ 的夹角 θ.

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= U_1 \cdot (-U_2) \\ &= (-\sin(\phi_1)N + \cos(\phi_1)B) \cdot (\sin(\phi_2)N - \cos(\phi_2)B) \\ &= -\sin(\phi_1)\sin(\phi_2) - \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) \\ &= -\cos(\phi_1 - \phi_2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\cos(2\phi_1) \qquad \text{因为 } \phi_2 = -\phi_1 \\
&= -\cos^2(\phi_1) + \sin^2(\phi_1) \\
&= 1 - 2\cos^2(\phi_1) \\
&= 1 - 2\left(\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)^2.
\end{aligned}
$$ 286

用坐标表示为

$$\cos(\theta) = \frac{-R^2 z_w^2 + z_v^2 + 1}{R^2 z_w^2 + z_v^2 + 1}.$$

利用 $\cos\phi$，$\sin\phi$，T，N，B 的 z 表达式，可以写出方向向量 d 的 z 表达式．这对任意 d 方向的向量都适合，故我们可取任意数与 d 相乘．设 $\tilde{d} = (X(1+z_v^2)^{1/2}/\sin\delta)d$，其中 $X = R^2 z_w^2 + z_v^2 + 1$．有

$$
\begin{aligned}
&X\frac{\cos(\delta)}{\sin(\delta)}\left(-\sin\left(\frac{v}{R}\right), \cos\left(\frac{v}{R}\right), z_v\right) + \left[(R^2 z_w^2 z_v - (1+z_v^2)z_v)\sin\left(\frac{v}{R}\right)\right. \\
&\quad - 2Rz_w(1+z_v^2)\cos\left(\frac{v}{R}\right), -(R^2 z_w^2 z_v - (1+z_v^2)z_v)\cos\left(\frac{v}{R}\right) \\
&\quad \left. - 2Rz_w(1+z_v^2)\sin\left(\frac{v}{R}\right), R^2 z_w^2 - (1+z_v^2)\right].
\end{aligned}
$$

作代换

$$\frac{\cos(\delta)}{\sin(\delta)} = \frac{1}{\tan(\delta)} = -\frac{(2R^2 z_{wv} + z_v)(1+z_v^2) - R^2 z_v z_w^2}{X},$$

化简，

$$
\begin{aligned}
\tilde{d} = &\left(((2R^2 z_{wv} + z_v)(1+z_v^2) - (1+z_v^2)z_v)\sin\left(\frac{v}{R}\right) - 2Rz_w(1+z_v^2)\cos\left(\frac{v}{R}\right),\right. \\
&-((2R^2 z_{wv} + z_v)(1+z_v^2) - (1+z_v^2)z_v)\cos\left(\frac{v}{R}\right) - 2Rz_w(1+z_v^2)\sin\left(\frac{v}{R}\right), \\
&\left.-(2R^2 z_v z_{wv} + z_v^2)(1+z_v^2) + R^2 z_w^2(1+z_v^2) - (1+z_v^2)\right).
\end{aligned}
$$

除以 $(1+z_v^2)$，得到一个简单的方向向量．(实际上，在下面程序中用 Maple 的计算功能得到单位向量是为了更好地控制母线的长度.)

$$
\begin{aligned}
\tilde{d} = &\left(2R^2 z_{wv}\sin\left(\frac{v}{R}\right) - 2Rz_w\cos\left(\frac{v}{R}\right), -2R^2 z_{wv}\cos\left(\frac{v}{R}\right) - 2Rz_w\sin\left(\frac{v}{R}\right),\right. \\
&\left. -2R^2 z_v z_{wv} - z_v^2 + R^2 z_w^2 - 1\right).
\end{aligned} \tag{5.7.1}
$$

现在已经有了建立适当侧翼的很多个组成部分，最后的难题就是怎样建立侧翼上的平面三角形，使得从打开的平面包装材料到圆柱形袋子存在光滑的变换．平面三角形的一个顶点位于 $v=0$，而且为了保证关于直立轴对称．取 $z(v)$ 是偶函数(即 $z(-v)=z(v)$)．假设 z 在 $v=0$ 取得最大值(即 $z_v(0)=0$)． 287

我们知道 $\delta(s)$ 表示侧翼的母线和曲线 α(的切线)的夹角．因为三角形位于侧翼的顶端，所以 $\delta(s)$ 在 $s=0$(即 $v=0$)处不连续．这是因为母线沿曲线 α 移动，在 $s=0$ 处有两条母线：含顶点 $v=0$ 的三角形的左右两边．记左极限角为 δ^-，右极限角为 δ^+．由对称性，$\delta^- = \pi - \delta^+$．当

然，母线间三角形的顶角是：

$$\beta = \delta^- - \delta^+ = \pi - 2\delta^+.$$

为确定 β，取

$$\begin{aligned} \vec{d}^- \cdot \vec{d}^+ &= \vec{d}^- \cdot \vec{d}^+ \\ &= \cos(\delta^-)\cos(\delta^+) + \sin(\delta^-)\sin(\delta^+) \\ &= \cos(\delta^- - \delta^+) \\ &= \cos(\pi - 2\delta^+). \end{aligned}$$

显然 $\delta_1(s)$由 $\tan(\delta_1(s))$决定，而 $\tan(\delta_1(s))$依赖于 z_{uv}. 因此，为使 $\delta_1(s)$在 $s=0$ 不连续，取 z_{uv}在 $v=0$ 不连续. 设 $z_{uv}(0^+)=-z_{uv}(0^-)<0$.

利用 $z_v(0)=0$ 和 $\tan\delta$ 的公式，得到

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta^+\right) \\ &= \frac{1}{\tan(\delta^+)} \\ &= -\frac{2R^2 z_{uv}(0^+)}{R^2 z_w^2(0) + 1}, \end{aligned}$$

其中 $z_{uv}(0^+)<0$. 这样就可以确定 β. 因为 $z_v(0)=0$，所以平面三角形和圆柱在 $(R, 0, z(0))$的切平面的夹角 θ_0 由以下公式确定：

$$\cos(\theta_0) = \frac{-R^2 z_w^2(0) + 1}{R^2 z_w^2(0) + 1}.$$

将所有这些信息集合起来，可以求出符合某些特定几何条件的弯曲曲线 α. 例如，可以指定侧翼的高 h、圆柱的半径 R、圆柱和侧翼在 α 最高点的夹角 θ_0、圆柱和侧翼在 α 最低点的夹

288 角 θ_1 及在 α 的最高点处平面三角形的顶角 β.

首先，取 $z=Rf(\xi)$，$\xi=v/R$，$-\pi\leqslant\xi\leqslant\pi$，且

$$f(\xi) = c_0 + c_2\xi^2 + c_3|\xi|^3 + c_4\left(\cos(\xi) - 1 + \frac{\xi^2}{2}\right) + c_5\left|\sin(\xi) - \xi + \frac{\xi^2}{6}\right|,$$

$f''(\xi)<0$(凹性)且 $f(\pi)=0$. 在[BM95]中，由二次曲线侧翼的分析可以得到如此形式的 f，这里略去(这里使用[BM95]中的概念是为了帮助那些有兴趣检验全部文章的读者). 事实上，给出这样一个 f 的精确定义使用的是逐步尝试法——第一类科学方法. 为确定适当的侧翼，必须求出满足上述几何条件的系数 c_0，c_2，c_3，c_4，c_5.

指定侧翼高 $z(0)=h$，得 $f(0)=h/R$. 故 $c_0=h/R$. 同样，

$$\begin{aligned} \cos(\theta_0) &= \frac{-R^2 z_w^2(0) + 1}{R^2 z_w^2(0) + 1} \\ &= \frac{-(f''(0))^2 + 1}{(f''(0))^2 + 1} \\ &= \frac{-4c_2^2 + 1}{4c_2^2 + 1}. \end{aligned}$$

解得 c_2(因为 $f''(0)=2c_2<0$，所以取负号)等于

$$c_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos(\theta_0)}{1+\cos(\theta_0)}\right)^{1/2} = -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right).$$

$f(\xi)$ 在 $\xi=0$ 的三阶导数不连续：$f'''(0^{\pm}) = \pm 6c_3$．由此得到一个平面三角形，其顶角 β 满足

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{2R^2 z_{vvv}(0^+)}{R^2 z_{vv}^2(0)+1} = -\frac{2f'''(0^+)}{(f''(0))^2+1} = -\frac{12c_3}{4c_2^2+1}.$$

因此，由 β 可以得到 c_3．由 $f(\pi)=0$，得

$$c_0 + c_2\pi^2 + c_3\pi^2 + c_4\left(-2+\frac{\pi^2}{2}\right) + c_5\left(-\pi+\frac{\pi^3}{6}\right) = 0. \tag{5.7.2}$$

要求在弯曲曲线的最低点(即 $\xi=\pi$)$\theta=\theta_1$，故有

$$\cos(\theta_1) = \frac{-(f''(\pi))^2+(f'(\pi))^2+1}{(f''(\pi))^2+(f'(\pi))^2+1}.$$

这等价于

$$(f''(\pi))^2 - ((f'(\pi))^2+1)\tan^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = 0,$$

利用 $f(\xi)$ 的公式，计算得到方程 289

$$(2c_2+6c_3\pi+2c_4+\pi c_5)^2 - \left(\left(2c_2\pi+3c_3\pi^2+c_4\pi+c_5\left(-2+\frac{\pi^2}{2}\right)\right)^2+1\right)\tan^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = 0. \tag{5.7.3}$$

由方程(5.7.2)、(5.7.3)以及前面确定的 c_0，c_2，c_3 的值，就得到 c_4，c_5 的值．因此几何条件变成了 $f(\xi)$ 要满足的条件．从而得到特殊的弯曲曲线．当然，希望给出侧翼的参数方程，这也需要方向向量．为此，在公式(5.7.1)中，做下述简单代换．

$$\xi = \frac{v}{R},\quad z(v) = Rf(\xi),\quad z_v = f'(\xi),\quad z_{vv} = \frac{1}{R}f''(\xi),\quad z_{vvv} = \frac{1}{R^2}f'''(\xi).$$

得到一个方向向量为

$$\breve{d} = \Big(f'''(\xi)\sin(\xi) - f''\cos(\xi),\ -f'''(\xi)\cos(\xi) - f''(\xi)\sin(\xi),$$
$$-f'(\xi)f'''(\xi) - \frac{f'(\xi)^2}{2} + \frac{f''(\xi)^2}{2} - \frac{1}{2}\Big). \tag{5.7.4}$$

例 5.7.4 令 $h/R=6=c_0$，$\theta_0=90°$，$\theta_1=10°$，$\beta=90°$，则 $c_2 = -\frac{1}{2}\tan(\theta_0/2) = -\frac{1}{2}\tan(45°) = -\frac{1}{2}$．类似地，$\tan(45°) = (-12c_3)/2$，故 $c_3 = -1/6$．利用 Maple 的"fsolve"命令(见下述 Maple 程序)解方程(5.7.2)和(5.7.3)，其中 $\theta_1=10°$．得 $c_4\approx 0.986$，$c_5\approx 0.596$，故有

$$f(\xi) = 6 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{6}|\xi|^3 + 0.986\left(\cos(\xi) - 1 + \frac{\xi^2}{2}\right) + 0.596\left|\sin(\xi) - \xi + \frac{\xi^2}{6}\right|.$$

可以编写 Maple 程序绘制最终的侧翼，其中输入变量包括 R，h，θ_0，θ_1，β 及网格的大小和定向．注意这里用 Maple 的"unapply"命令创建函数，这个函数仅仅是为了描述可供选择的箭状结构．利用"assign"命令指定由"fsolve"决定的 c_4，c_5 的值，使得程序的后半部分可以利

用这些值. 最终除以自身长度得到单位方向向量“direction”.

```
> with(plots):with(LinearAlgebra):

> shoulder:=proc(R,h,highangle,lowangle,gapangle,gr,ori)
local c_0,c_2,c_3,c_4,c_5,f,fp,fpp,fppp,direction,sh,
bendcurveplot,should,cyl,theta_0,theta_1,beta;
theta_0:=Pi/180*highangle;
theta_1:=Pi/180*lowangle;
beta:=Pi/180*gapangle;
c_0:=h/R;
c_2:=-0.5*evalf(tan(theta_0/2));
290 c_3:=-(4*c_2^2+1)*evalf(tan(beta/2)/12);
f:=unapply(c_0+c_2*xi^2+c_3*abs(xi)^3+c_4*(cos(xi)-
1+xi^2/2)+c_5*abs(sin(xi)-xi+xi^3/6),xi);
fp:=unapply(diff(f(xi),xi),xi);
fpp:=unapply(diff(f(xi),xi$2),xi);
fppp:=unapply(diff(f(xi),xi$3),xi);
assign(fsolve({f(Pi)=0,fpp(Pi)^2-(fp(Pi)^2+1)*
tan(theta_1/2)^2=0},{c_4,c_5}));
print('coeffs are',c_0,c_2,c_3,c_4,c_5);
direction:=ScalarMultiply(<-fpp(xi)*cos(xi)+fppp(xi)*
sin(xi)|-fpp(xi)*sin(xi)-fppp(xi)*cos(xi)|-fp(xi)*fppp(xi)+
(fpp(xi)^2-fp(xi)^2-1)/2>, 1/(sqrt((-fpp(xi)*cos(xi)+
fppp(xi)*sin(xi))^2 +(-fpp(xi)*sin(xi)-fppp(xi)*cos(xi))^2+
(-fp(xi)*fppp(xi)+(fpp(xi)^2-fp(xi)^2-1)/2)^2)));
sh:=<R*cos(xi)|R*sin(xi)|R*f(xi)>+
ScalarMultiply(direction,u);
bendcurveplot:=tubeplot([R*cos(v),R*sin(v),R*f(v)],
v=-Pi..Pi,radius=0.03,color=black):
should:=plot3d(sh,xi=-Pi..Pi,u=0..3*R,grid=gr):
cyl:=plot3d([R*cos(v),R*sin(v),u],v=-Pi..Pi,u=-h/2..R*f(v),
grid=[30,10]):
display({bendcurveplot,cyl,should},style=patch,orientation
=ori,scaling=constrained);
end:
```

用例 5.7.4 中的初始值运行这个程序. 注意依次输出 c_0, c_2, c_3, c_4, c_5. 在图 5-30 中给出了两个图. 第一个图显示了平而三角形，第二个图展示了角 θ_0 和 θ_1.

```
> shoulder(1,6,90,10,90,[30,10],[161,63]);
```

$coeffs\ are$, 6, −0.5, −0.166 666 666 7, 0.986 142 435 5, 0.596 401 949 0

```
> shoulder(1,6,90,10,90,[30,10],[88,87]);
```

$coeffs\ are$, 6, −0.5, −0.166 666 666 7, 0.986 142 435 5, 0.596 401 949 0

取 $R=2$, $\theta_0=110°$, $\theta_1=0°$, 结果如图 5-31 所示.

```
> shoulder(2,13,110,0,60,[30,10],[161,63]);
```

$coeffs\ are$, $\frac{13}{2}$, −0.714 074 004 0, −0.146 243 147 2, 1.448 802 757, 0.409 716 031 8

```
> shoulder(2,13,110,0,60,[30,10],[86,86]);
```

$coeffs\ are, \frac{13}{2}, -0.7140740040, -0.1462431472, 1.448802757, 0.4097160318$ 291

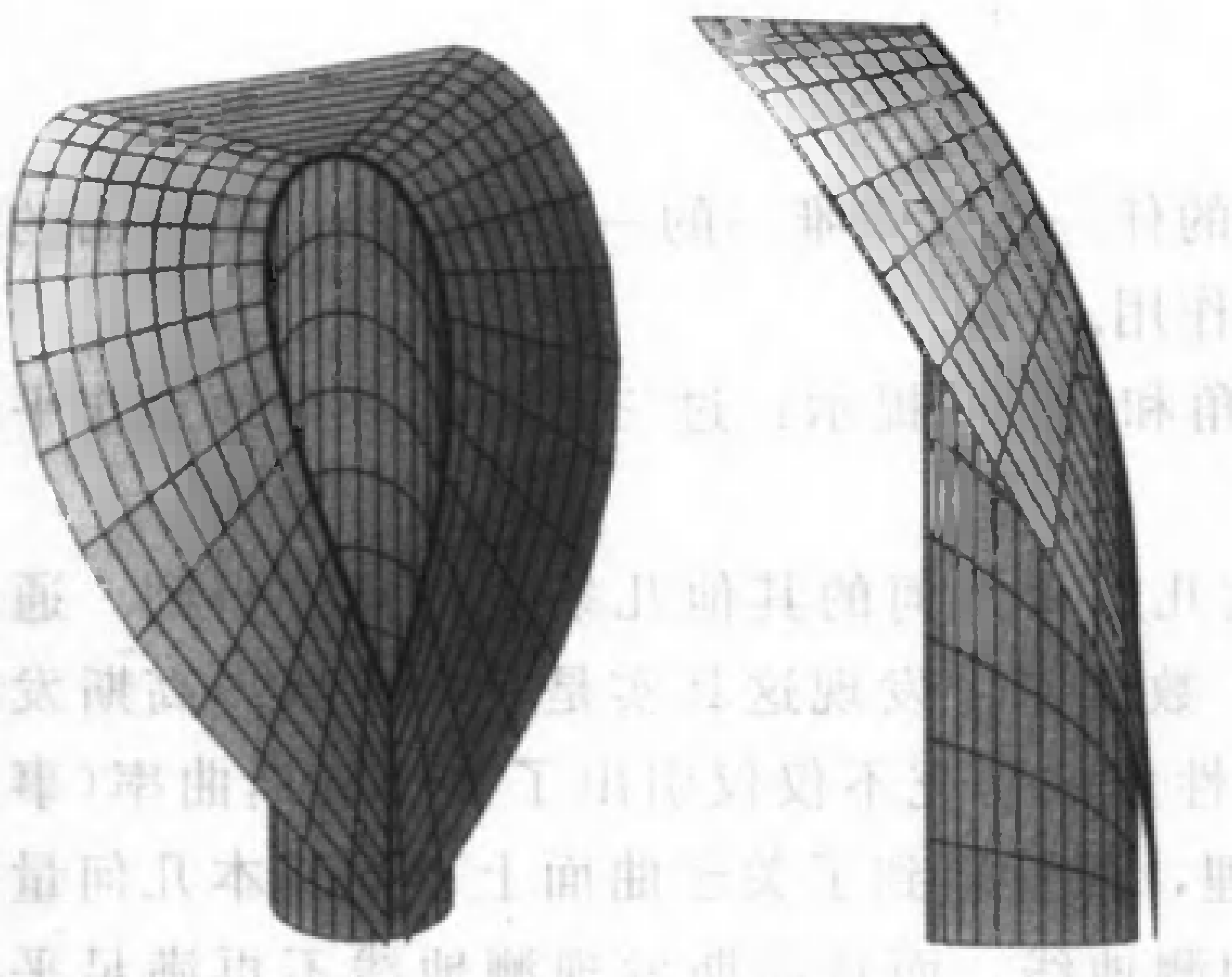


图 5-30　带有平面三角形及 $\theta_0 = 90°$ 的侧翼

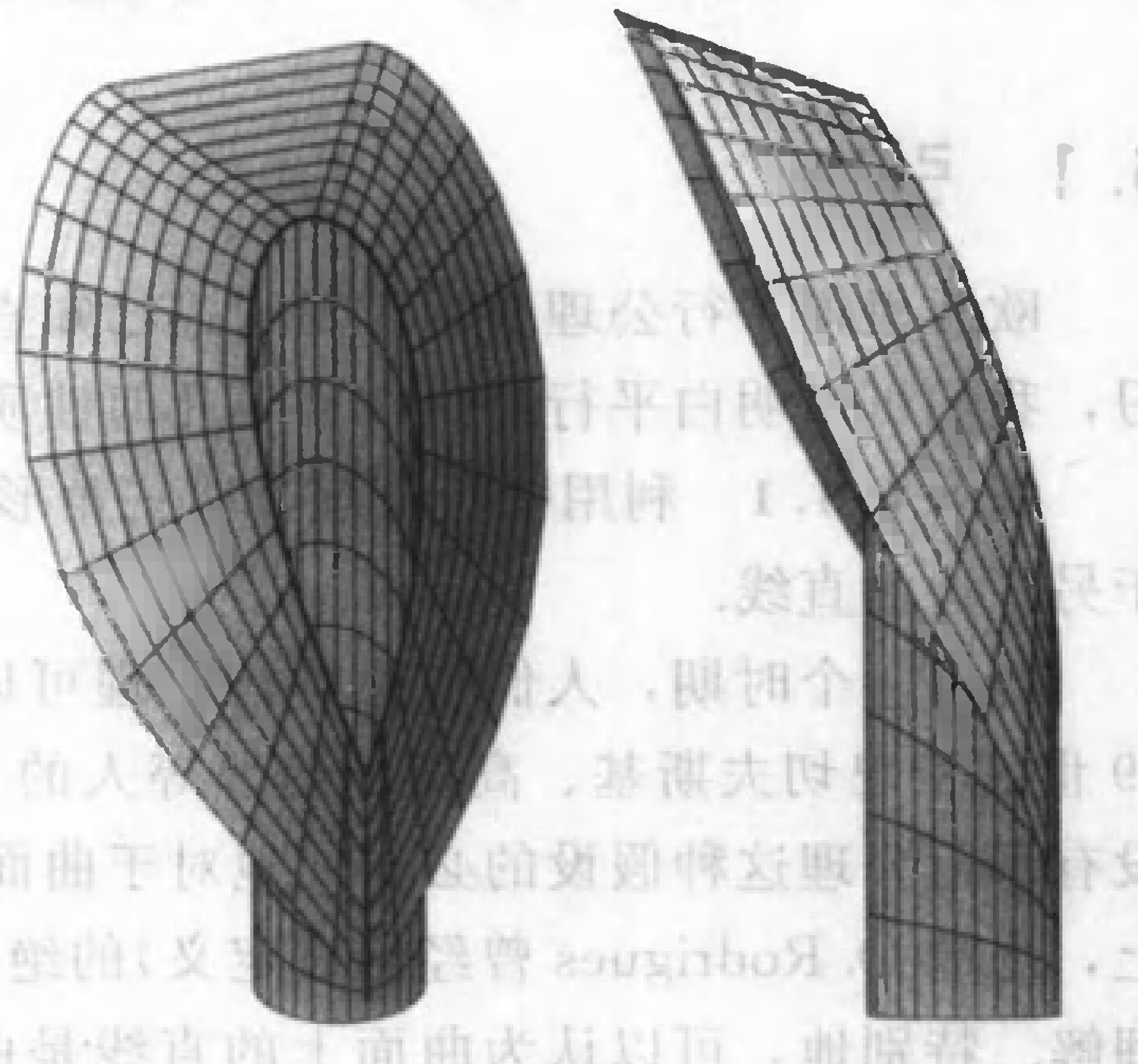


图 5-31　带有平面三角形及 $\theta_0 = 110°$ 的侧翼

本节说明微分几何不仅仅是抽象的物理学的数学工具，也是日常工业的数学工具．同时也指出了日常实践的方向．当然已经看出将日常工业问题化为数学问题非常复杂．最后，如果不能看到最终的结果，那么所有的假设、计算和近似都毫无意义——这就是用计算机和 Maple 这 292
样的软件做数学问题的意义所在． 293

第 6 章　完整性及高斯-博内定理

6.1　引言

欧几里得平行公理的内容是通过已知直线外的任一点存在唯一的一条平行线．由下面的练习，我们可以明白平行公理在推导几何性质时的作用．

练习 6.1.1　利用平行公理证明三角形的内角和是 π．提示：过三角形的一个顶点作平行于另一边的直线．

曾有一个时期，人们认为平行公理可以由欧几里得几何的其他几条公理推导得到．通过 19 世纪罗巴切夫斯基、高斯、鲍耶等人的工作，数学家才发现这其实是一个误区．高斯发现没有平行公理这种假设的必要．他对于曲面几何性质的研究不仅仅引出了关于高斯曲率(事实上，之前 O. Rodrigues 曾经给过定义)的绝好定理，而且得到了关于曲面上不同基本几何量的理解．特别地，可以认为曲面上的直线是曲面的测地线，而且高斯发现测地线不再满足平行公理．

练习 6.1.2　讨论球面及双曲平面上的平行公理的合理性，这里"直线"指的是测地线．

像前面阐述的那样，平行公理可能在两种情形下不成立．而在此之前，我们曾经利用平行公理计算三角形的内角和．那么，既然平行公理可能不成立，自然可能导致出现不同的计算结
295 果．事实上，三角形的内角和有三种可能性．

(1) **欧几里得**：欧几里得平面上三角形的内角和 $\sum_{i=1}^{3}\phi_i=\pi$．

(2) **双曲**(高斯-罗巴切夫斯基-鲍耶)：双曲平面上三角形的内角和 $\sum_{i=1}^{3}\phi_i<\pi$．

(3) **椭圆**(黎曼)：球面上三角形的内角和 $\sum_{i=1}^{3}\phi_i>\pi$．

在这一章可以看出高斯曲率如何影响像三角形内角和这样最基本的几何性质．而且，可以看出甚至在两个向量平行这样最基本的概念中，高斯曲率都起了作用．

开始之前回忆曲面上的积分．学过第 4 章的读者可以跳过以下重复的讨论．首先考虑如何计算曲面的面积．例如半径为 R 的球面的面积是 $4\pi R^2$．得到这个结果的直观方法是：令 M 是曲面，$\mathbf{x}$ 是其坐标补片．为了计算坐标补片的面积，可以先计算图 6-1 所示的平行四边形的面积，然后求和．

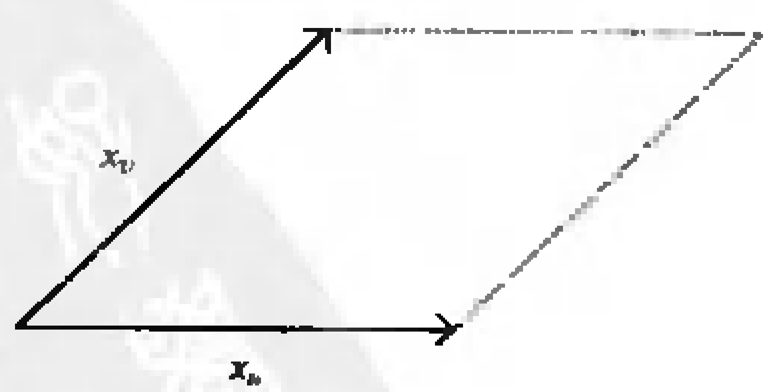


图 6-1　面积的无穷小部分

当然，数学中通常的作法是对所得数值取极限来接近确切的面积．取极限可以得到一个连续和即积分．定义这个积分是很重要的．当然对那些不满足光滑性的充分复杂的曲面，就不能定义积分．由练习 1.3.8 可以得到上面平行四边形的面积，也就是面积 $=|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v|$．因此，

可得

$$\text{坐标补片 } x \text{ 的面积} = \int_{v_0}^{v_1}\int_{u_0}^{u_1} |x_u \times x_v| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

例 6.1.3（半径为 R 的球面） 回忆 $|x_u\times x_v| = R^2\cos v$。其中 $0\leqslant u<2\pi$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}$， 296
则半径为 R 的球面的面积为

$$\text{面积} = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos v\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin v\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^{2\pi} 2R^2\mathrm{d}u = \Big|_0^{2\pi} 2R^2 u = 4\pi R^2.$$

注意：由拉格朗日恒等式(练习 1.3.5)，$|x_u\times x_v| = \sqrt{EG-F^2}$.

练习 6.1.4 证明环面的面积是 $4\pi^2 rR$.

练习 6.1.5 有两个用来计算曲面面积的常用积分.

(1) 旋转曲面：$SA = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$.

(2) 函数 $z=f(x,y)$ 的图像：$SA = \int_a^b\int_c^d \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证明这两个公式可以由上面给出的曲面面积的定义推导出来.

现在的问题是如何求曲面上函数的积分呢？一个函数仅仅给出了区域内点的不同的权值，然后将加权的面积加起来. 因此可以积分函数与 $|x_u\times x_v|$ 的乘积.

定义 6.1.6 *M 上函数 f 的积分由如下公式给出：*

$$\int_M f \overset{\text{def}}{=} \iint_x f\,|x_u\times x_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \iint_x f\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

我们对一个特殊的函数——高斯曲率 K 的积分很感兴趣. 积分 $\int_M K$ 称为 M 的(或坐标补片 x 的)*全高斯曲率*.

例 6.1.7 关于全高斯曲率有两个例子.

(1) 半径为 R 的球面：高斯曲率为常数 $K=1/R^2$. 故

$$\int_M K = \frac{1}{R^2}\iint |x_u\times x_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{R^2}\cdot\text{球的面积}$$
$$= \frac{1}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi.$$ 297

(2) 伪球面：高斯曲率 $K=-1/c^2$ 也是常数，因此

$$\int_M K = -\frac{1}{c^2}\cdot\text{面积} = -\frac{1}{c^2}\cdot 2\pi c^2 = -2\pi.$$

练习 6.1.8 求伪球面的曲面面积.

练习 6.1.9 求环面及悬链面的全高斯曲率.

6.2 修正的共变微商

在前面研究$\mathbb{R}^3$中曲面的几何性质的时候，用共变微商定义形状算子，并由此得到多个各种基本的曲率不变量．后来以一个特殊的曲率公式作为非$\mathbb{R}^3$的曲面的高斯曲率的定义．用这种方法避免定义这种抽象曲面的共变微商．本节中将看到和了解更抽象定义的共变微商．

首先，取坐标补片x，且此坐标补片(同往常一样)满足$F=0$，$\alpha(t)=x(a(t),\ b(t))$是一条闭曲线(假设是单位速度，或者至少是常速度的)．令$\varepsilon_1=x_u/\sqrt{E}$，$\varepsilon_2=x_v/\sqrt{G}$，注意$\varepsilon_1\cdot\varepsilon_1=1$，$\varepsilon_2\cdot\varepsilon_2=1$且$\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2=0$．沿着曲线的向量场$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$构成了$x(u,\ v)$任一点处的切空间的标准正交基．因此，向量场$\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}$构成的基也称为坐标补片上的移动标架(即使在非正交的坐标补片上，也存在这样一组基)．而且，ε_1，ε_2，U是$\mathbb{R}^3$的标准正交基，利用以上知识以及关于共变微商的研究分析向量场ε_1，ε_2沿α是如何变化的．

首先，研究3维空间中曲面的共变微商，它揭示了3维空间的共变微商和曲面本身之间的联系．事实上，后者可由前者定义．一旦我们将共变微商研究清楚，就可以去掉3维空间这一限制条件，将共变微商的性质推广到其他曲面上．

以$\nabla^{\mathbb{R}^3}$表示$\mathbb{R}^3$上的共变微商(或雅可比矩阵)，∇表示$\nabla^{\mathbb{R}^3}$到曲面的切平面上的投影，或者表示非3维空间曲面M的共变微商．令$Z=(z^1,\ z^2,\ z^3)$是由函数z^i：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$定义的$\mathbb{R}^3$上的向量场．根据2.2节中的知识，$\mathbb{R}^3$的共变微商$\nabla^{\mathbb{R}^3}_v Z$就是方向导数的坐标版本．对于$M\subseteq\mathbb{R}^3$，$\nabla^{\mathbb{R}^3}_v Z$在切平面$T_p(M)$上的投影即是由$\nabla^{\mathbb{R}^3}_v Z$减去它的法向量方向的分量，即

$$\nabla_v Z=\nabla^{\mathbb{R}^3}_v Z-(\nabla^{\mathbb{R}^3}_v Z\cdot U)U.$$

这就是曲面内蕴的共变微商的定义(如图6-2所示)．类似于2.2节，利用向量场到包含M的开集上的扩张，可以定义在M的向量场上的共变微商．以下假定经过以上技术处理，可以取所有向量场的共变微商．

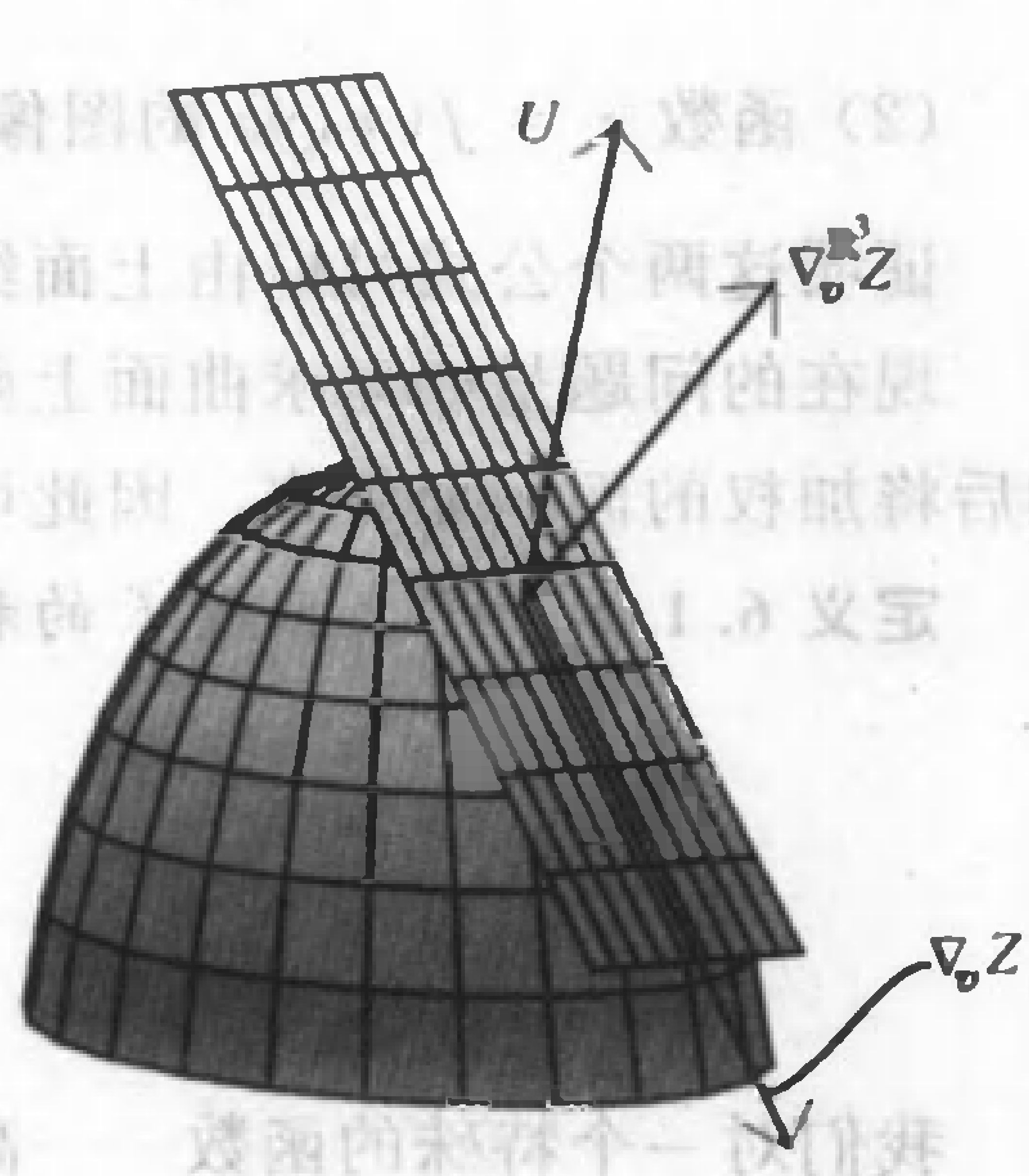


图6-2　$\nabla_v Z$的定义

练习 6.2.1　证明$\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}\alpha'=\alpha''$．因此，若$\nabla_{\alpha'}\alpha'=0$，则$\alpha$是测地线．提示：把$\dfrac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}$作为三个变量$\alpha^1$，$\alpha^2$，$\alpha^3$的函数来处理，对$\alpha'[f]=\dfrac{\mathrm{d}(f\circ\alpha)}{\mathrm{d}t}$应用链式法则，其中$f=\dfrac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}$．具体的计算参见第2章．

记$\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}\mathcal{E}_1=\omega_{11}\mathcal{E}_1+\omega_{21}\mathcal{E}_2+s_1U$，$\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}\mathcal{E}_2=\omega_{12}\mathcal{E}_1+\omega_{22}\mathcal{E}_2+s_2U$，其中$\omega$是参数为$t$的曲线$\alpha$的函数，由乘法法则以及$\mathbb{R}^3$上的共变微商的定义，可得

$$0=\alpha'[\mathcal{E}_1\cdot\mathcal{E}_1]=2\,\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}\mathcal{E}_1\cdot\mathcal{E}_1=\omega_{11}.$$

298～299 更一般地，$\alpha'[V\cdot W]=\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}V\cdot W+V\cdot\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}W$，其中$V=(v^1,\ v^2,\ v^3)$，$W=(w^1,\ w^2,\ w^3)$是向量场．具体的计算如下(引理2.4.1的证明的回顾)：

$$\begin{aligned}\alpha'[V\cdot W]&=\alpha'\left[\sum v^i w^i\right]\\&=\sum \alpha'[v^i]w^i+v^i\alpha'[w^i]\\&=\sum(\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}V)^i w^i+v^i(\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}W)^i\\&=\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}V\cdot W+V\cdot\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}W.\end{aligned}$$

类似地，因为 $0=\alpha'[\mathcal{E}_1\cdot\mathcal{E}_2]=\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}\mathcal{E}_2\cdot\mathcal{E}_2+\mathcal{E}_1\cdot\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}\mathcal{E}_2$，所以 $\omega_{21}=-\omega_{12}$.

练习 6.2.2　证明 $s_1=S(\alpha')\cdot\mathcal{E}_1$ 且 $s_2=S(\alpha')\cdot\mathcal{E}_2$，其中 $S(\alpha')$ 即是形状算子在 α' 的值. s_2 是 $\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}\mathcal{E}_2$ 的表达式中 U 的系数. 最终可得

$$\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}\mathcal{E}_1=\omega_{21}\mathcal{E}_2+(S(\alpha')\cdot\mathcal{E}_1)U$$

$$\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}\mathcal{E}_2=-\omega_{21}\mathcal{E}_1+(S(\alpha')\cdot\mathcal{E}_2)U.$$

由于 ∇ 表示 $\nabla^{\mathbb{R}^3}$ 到曲面切平面的投影，得

$$\nabla_{\alpha'}\mathcal{E}_1=\omega_{21}\mathcal{E}_2,\quad \nabla_{\alpha'}\mathcal{E}_2=-\omega_{21}\mathcal{E}_1.$$

根据 $\mathbb{R}^3$ 内坐标方向的方向导数(也就是 $\nabla^{\mathbb{R}^3}$)，共变微商 ∇ 具有以下性质.

练习 6.2.3　证明共变微商 ∇ 具有以下性质：

1) 求和法则：$\nabla_{f\alpha'+g\beta'}Z=f\nabla_{\alpha'}Z+g\nabla_{\beta'}Z$.

2) 莱布尼茨法则：$\nabla_{\alpha'}fZ=\dfrac{\mathrm{d}(f\circ\alpha)}{\mathrm{d}t}Z+f\nabla_{\alpha'}Z$.

3) 交换法则：若 $x(u,v)$ 是正交坐标补片，则

$$\nabla_{x_u}x_v=\nabla_{x_v}x_u.$$

4) 相容性准则：对于切向量 w，$E=x_u\cdot x_u$，$F=0$ 和 $G=x_v\cdot x_v$，有

$$w[E]=2\nabla_w x_u\cdot x_u\quad w[G]=2\nabla_w x_v\cdot x_v.$$

以上性质可以由 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 M 推广到一般曲面. 特别地，最后两条给出了与黎曼联络相关的共变微商. 在讨论高斯曲率对双曲平面这样的曲面的影响时需要用到这些性质. 300

6.3　平行向量场及完整性

假设 V_0 是 M 在 $\alpha(t)$ 处的单位切向量. 古典微分几何中一个基本问题是：沿着曲线 α，M 的哪些切向量与 V_0 平行？毕竟向量或直线的平行是几何的基础. 所以在微分几何中提出平行的问题也不值得大惊小怪. 因为共变微商 $\nabla_{\alpha'}V$ 描述了切向量 V 沿 α 如何变化，所以满足 $\nabla_{\alpha'}V=0$ 这个条件的向量场由包含 V 的相互平行的向量构成. 换句话说，零共变微商意指 V 仅仅在曲面的法向量方向上变化，所以从曲面的定居者的角度来看，它是不变的. 因此，如果 $\nabla_{\alpha'}V=\mathbf{0}$，则称 V 是沿 α 的平行向量场.

例 6.3.1　证明平行向量场的长度固定. 提示：对 $V\cdot V$ 应用莱布尼茨法则.

当然需要证明平行向量场的存在性. 事实上，仅由曲线的起始数据，可以唯一确定沿此曲线的平行向量场.

定理 6.3.2　∇ 表示曲面 M 的共变微商，α：$I\to M$ 是 M 上的曲线. 对于 $\alpha(0)$ 点处的任意

切向量 V_0，存在沿 α 的平行向量场，使得 $V_{\alpha(0)}=V_0$。

证明 不失一般性，取 V_0 是单位长度的向量．因为平行向量场的长度固定，所以向量场的每个向量都是单位长度的向量．记 $V=\cos\theta\,\mathcal{E}_1+\sin\theta\,\mathcal{E}_2$，其中 θ 是 V 与 $\mathcal{E}_1$ 之间的夹角．由 $\nabla_{\alpha'}V=0$ 可得(由乘积及链式法则)

$$0=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_1+\cos\theta\nabla_{\alpha'}\mathcal{E}_1+\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_2+\sin\theta\nabla_{\alpha'}\mathcal{E}_1.$$

利用上节沿 α 的 $\mathcal{E}_1$ 和 $\mathcal{E}_2$ 的共变微商的计算结果，得

$$0=-\sin\theta\left[\omega_{21}+\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right]\mathcal{E}_1+\cos\theta\left[\omega_{21}+\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right]\mathcal{E}_2.$$

因为 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 不同时为零，故有 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\omega_{21}$ 或

$$\theta(t)=\theta(0)-\int\omega_{21}\,\mathrm{d}t.$$

这个式子决定了 θ，从而决定了平行向量场 V. ∎

由起始向量 V_0，沿 α 的平行向量场 V 的构造，可以说是 V_0 沿 α 的平行移动．也就是说，
301 由 V_0 沿 α 到点 $\alpha(t)$ 的平行移动(唯一决定)得到 $V_{\alpha(t)}$．旋转的角度(仅依赖于 α 和 $\theta(0)$) $-\int\omega_{21}\,\mathrm{d}t$ 称为沿 α 的完整性.

练习 6.3.3 证明沿测地线 α 的平行向量场 V 与 α' 的夹角固定．更一般地，若 V 是沿 α 的平行向量场，W 是沿 α 的固定长度的向量场．证明 W 是平行的当且仅当 V 与 W 的夹角是定值．由此证明沿曲线的完整性与沿曲线的平行向量场没有关系.

练习 6.3.4 证明测地曲率公式(见定理 5.4.12)

$$\kappa_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\omega_{21},$$

其中 θ 是 α' 与 ϵ_1 的夹角．提示：(1)类似于定理 6.3.2 中的表达式，记 $\alpha'=\cos\theta\,\mathcal{E}_1+\sin\theta\,\mathcal{E}_2$，类似于定理的证明得

$$\nabla_{\alpha'}\alpha'=\left[\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\omega_{21}\right][-\sin\theta\mathcal{E}_1+\cos\theta\mathcal{E}_2].$$

(2) 注意 $\alpha''_{\tan}=\nabla_{\alpha'}\alpha'$，比较此公式与定理 5.4.12 的测地曲率公式；(3)为什么 $U\times T=-\sin\theta\,\mathcal{E}_1+\cos\theta\,\mathcal{E}_2$？

练习 6.3.4 揭示了测地曲率与完整性的关系．由定理 5.1.5 知测地曲率仅依赖于度量．进一步等距保持角度不变，故 κ_g 及 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 也是等距不变的．因此，ω_{21} 也是等距不变的．下面的定理对于 6.9 节中完整性的理解有帮助.

定理 6.3.5 等距保持完整性不变.

练习 6.3.6 α：$[a, b]\to M$ 是曲面上单位速度的曲线，$\{T, V=U\times T, U\}$ 是沿此曲线的标架，其中 U 是 M 的单位法向量．证明此标架的"Frenet"公式是

$$\begin{aligned}T'&=&&\kappa_g V&&+kU\\V'&=-\kappa_g T&&&&+\tau_g U\\U'&=-kT&&-\tau_g V&&\end{aligned}.$$

其中，k 是 M 上 T 的法曲率，κ_g 是 α 的测地曲率．而 $\tau_g=-U'\cdot V=V'\cdot U$，称为 α 的测地挠率．如果 T 是 M 的形状算子的特征向量，则 α 是 M 的曲率线．由上述方程知 $\tau_g=0$ 当且仅当 α 是曲率线．用此观点重做练习 5.1.11． 302

练习 6.3.7 令 $U\cdot N=\cos\theta$，其中 N 是单位速度曲线 α 的主法向量，τ 表示 α 的挠率，则测地曲率公式为

$$\tau_g=-\left(\tau+\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right).$$

证明若 α 是测地线，则 $\tau_g=-\tau$，同时证明逆命题不成立．这是因为对于球面的任意纬线圆，均有 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=0$．重做练习 5.1.10．

注意定理 6.3.2 及练习 6.3.3 描述的都是单位速度的 u-参数曲线的特殊情形．在这种情形下，$\alpha'=\mathcal{E}_1$．有两种情形：第一，$\theta=\theta(0)$，此时曲线是测地线；第二，初始向量 V_0 沿曲线移动时旋转 θ(3 维空间的观点)，此时参数曲线不是测地线．下面举一些基本的例子．

例 6.3.8 考虑半径为 R 的球面，其坐标补片为

$$x(u,v)=(R\cos u\cos v,R\sin u\cos v,R\sin v).$$

$x_u=(-R\sin u\cos v,\ R\cos u\cos v,\ 0)$，$x_v=(-R\cos u\sin v,\ -R\sin u\sin v,\ R\cos v)$是参数曲线切向量，单位法向量 $U=(\cos u\cos v,\ \sin u\cos v,\ \sin v)$．切平面的标准正交基是

$$\mathcal{E}_1=(-\sin u,\cos u,0),\quad \mathcal{E}_2=(-\cos u\sin v,-\sin u\sin v,\cos v).$$

取球面在纬度 v_0 处的纬线圆

$$\alpha(u)=(R\cos u\cos v_0,R\sin u\cos v_0,R\sin v_0).$$

注意 $|\alpha'|=R\cos v_0$ 是定值，故与 α' 相关的 $\mathcal{E}_1$，$\mathcal{E}_2$ 的共变微商准确地描述了 $\mathcal{E}_1$ 与 $\mathcal{E}_2$ 沿 α 的变化．进而，由于 α 的参数化与沿 α 的 $\mathcal{E}_1$，$\mathcal{E}_2$ 相容且 $\alpha'=x_u$，故 $\mathbb{R}^3$ 中的共变微商即是对 u 的导数，则

$$\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'(u)}\mathcal{E}_1=(-\cos u,-\sin u,0),$$

$$\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'(u)}\mathcal{E}_2=(\sin u\sin v_0,-\cos u\sin v_0,0).$$

为了证明 $\nabla_{\alpha'}\mathcal{E}_1=\omega_{21}\mathcal{E}_2$，需要分解 $\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}\mathcal{E}_1=\omega_{21}\mathcal{E}_2+s_1U$(类似地 $\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}\mathcal{E}_2=-\omega_{21}\mathcal{E}_1+s_2U$)．由上述公式，可得

$$(-\cos u,-\sin u,0)=(-\omega_{21}\cos u\sin v_0,-\omega_{21}\sin u\sin v_0,\omega_{21}\cos v_0)$$
$$+(s_1\cos u\cos v_0,s_1\sin u\cos v_0,s_1\sin v_0),$$

因此

$$\omega_{21}=\sin v_0,\quad s_1=-\cos v_0.$$ 303

练习 6.3.9 对于 $\nabla^{\mathbb{R}^3}_{\alpha'}\mathcal{E}_2=-\omega_{21}\mathcal{E}_1+s_2U$，证明 $s_2=0$．

$$\nabla_{\alpha'}\mathcal{E}_1=\sin v_0\,\mathcal{E}_2,\quad \nabla_{\alpha'}\mathcal{E}_2=-\sin v_0\,\mathcal{E}_1.$$

由上面定理的证明知，沿 α 的完整性为

$$-\int_0^{2\pi}\omega_{21}\,\mathrm{d}u=-\int_0^{2\pi}\sin v_0\,\mathrm{d}u$$
$$=-2\pi\sin v_0.$$

例如，若 $v_0=\pi/6$. 则完整性是 $-\pi$. 图 6-3 证实了这一点，图 6-3 由 6.9 节中的 Maple 程序绘制.

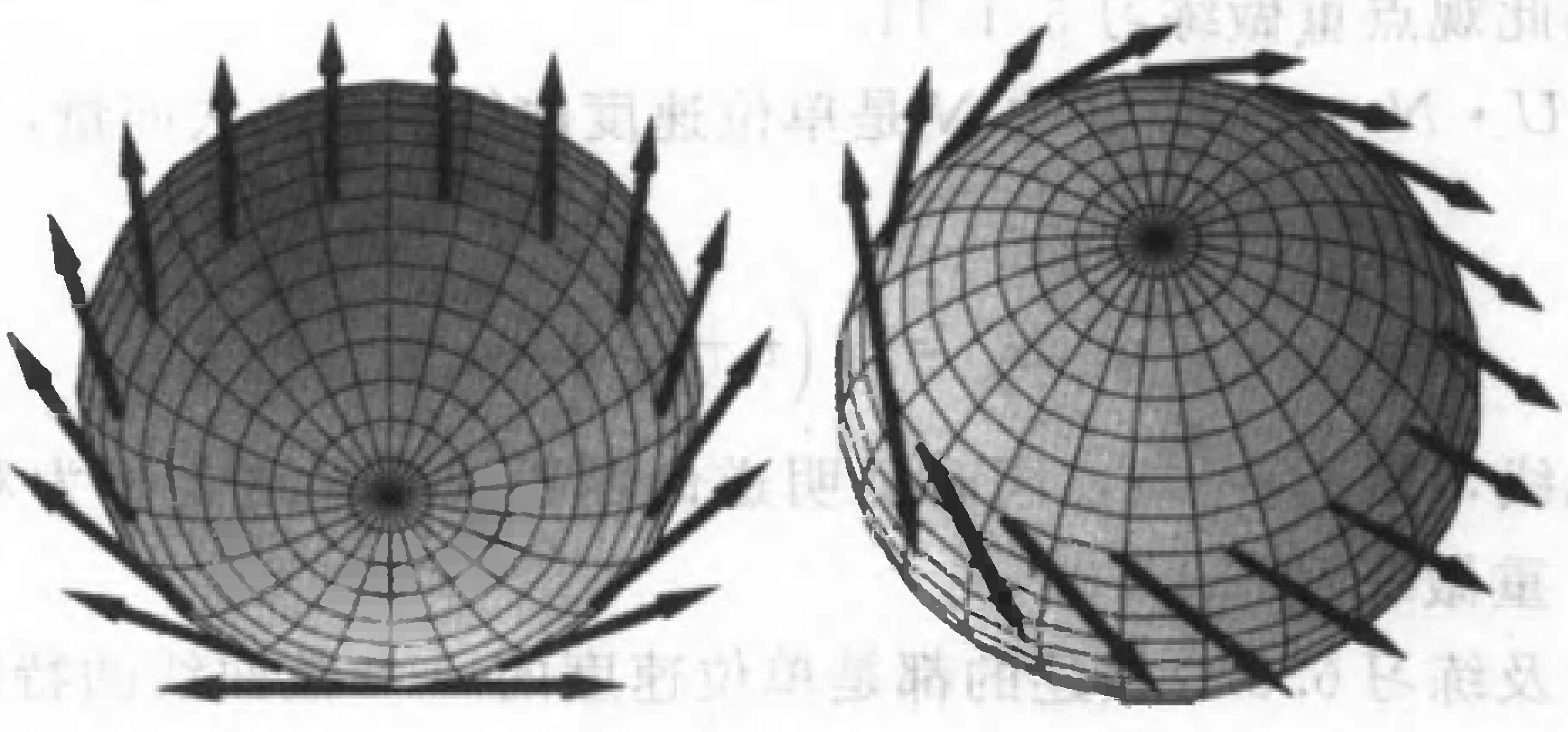


图 6-3 $v_0=\pi/6$ 纬线圆的完整性

练习 6.3.10 计算半径为 R 的球面在纬度 v_0 的全高斯曲率，并与沿 v_0-纬线圆的完整性相比较. 在模 2π 的意义下，能得到什么结论？

从球面外看，完整性的计算表明当平行切向量沿纬线圆移动时，这些向量也在旋转. 当然，在球面上二维的定居者看来，这些向量是平行的，并没有旋转.

练习 6.3.11 赤道上是什么情形呢？在所有的纬线圆中，为什么赤道特殊呢？

练习 6.3.12 锥面 $z^2=a^2(x^2+y^2)$的参数方程为

304
$$x(u,v)=\left(u\sin(\phi)\cos\left(\frac{v}{\sin(\phi)}\right),u\sin(\phi)\sin\left(\frac{v}{\sin(\phi)}\right),u\cos(\phi)\right),$$

其中 ϕ 是锥面的顶角. $\sin\phi=1/\sqrt{1+a^2}$，$\cos\phi=a/\sqrt{1+a^2}$. 取平行线

$$\alpha(v)=\left(u_0\sin(\phi)\cos\left(\frac{v}{\sin(\phi)}\right),u_0\sin(\phi)\sin\left(\frac{v}{\sin(\phi)}\right),u_0\cos(\phi)\right),$$

其中 $0\leqslant v\leqslant 2\pi$. 同上例，证明沿 α 的完整性等于 $2\pi\sin\phi$. 见 6.9 节. 提示：定义 $\mathcal{E}_1=x_v/\sqrt{G}$, $\mathcal{E}_2=x_u$（右手系）. 证明 $\omega_{21}=-1$, 故完整性等于 $-\int_0^{2\pi\sin\phi}-1dv=2\pi\sin\phi$.

练习 6.3.13 将球面放在锥面里使得纬线圆 $v=-\phi$，就是锥面上的 α（见图 6-4），来解释上述两例中的结果. 证明球面与锥面的单位法向量（进而切平面）沿曲线是一致的. 因此，锥面和球面沿 α 的共变微商相同. 提示：对于顶点是原点顶角为 ϕ 的锥面，球面的中心与半径分别是$(0, 0, u_0/\cos\phi)$, $u_0\sin\phi/\cos\phi$. 6.9 节给出了此练习的 Maple 程序.

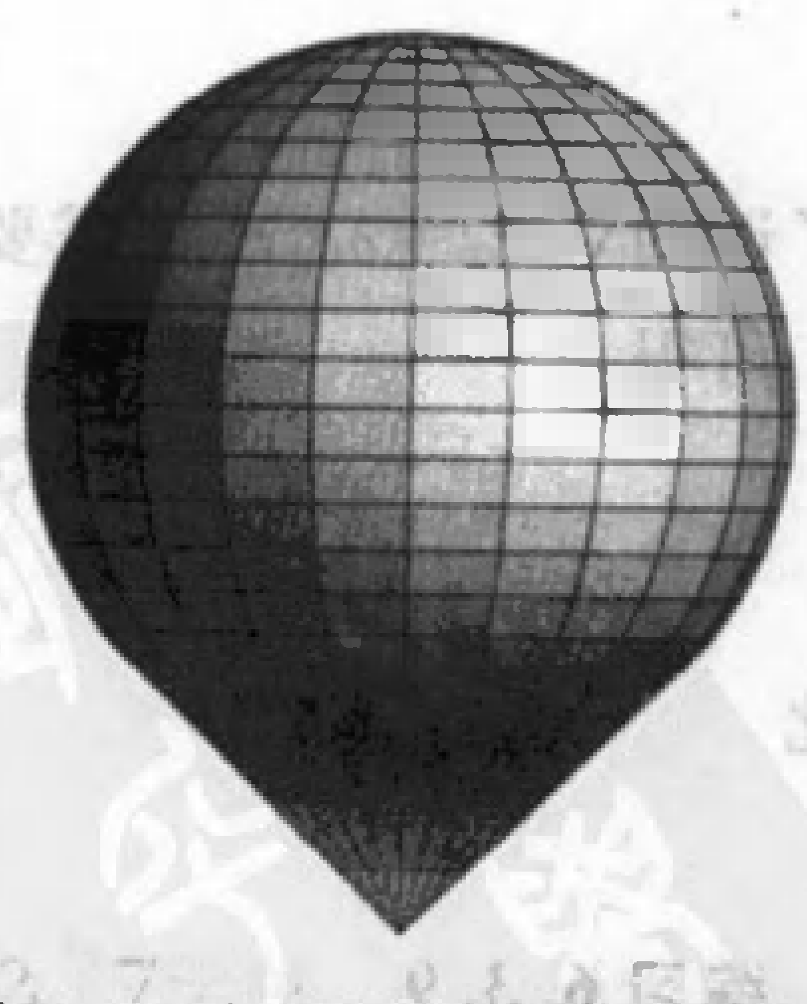


图 6-4 球面上沿纬线圆的锥面

6.4 傅科摆

大自然只不过使用最长的线来编织图案，因此每一小块织物都揭示了整个织锦的构造.

——Richard P. Feynman

1951 年，傅科(1819—1868)用一个重铁球以及 200 英尺长的线建成了一个摆，用来描述地球的旋转.（傅科对于光在不同介质中的速度的测量也有贡献. 特别地，他测量了光在空气以及水中的速度，而且证明速度与折射指数成反比(也就是斯涅尔折射定律).）傅科发现摆动平面按岁差向前运行或者随着时间旋转，直到一个周期 $T=\frac{2\pi}{\sin v_0}$ 小时后回到起始的方向，其中 v_0 是傅科摆所在的纬度. 对于这个按岁差向前运行的现象，通常的解释是旋转参考标架，由此产生一个水平的特里奥利“力”，使得摆动平面产生位移(见[Sym71]及[Arn78]). 本书将在几何图像及完整性的框架下研究这个摆(见[WS89, Mar92, Opr95]). 305

为了从几何的观点分析傅科摆，假设地球不旋转且傅科摆位于纬度 v_0 处，以摆的移动来代替地球的旋转，在静止的地球上使得摆沿着纬线圆在 24 小时内以固定速度移动. 傅科摆最终的运动等价于标准情形. 摆的长绳和沿着纬线圆缓慢的运动有两种结果(这是由物理论证给出的).

第一，长绳为摆提供了一个近似于平的小的振幅. 因此，可以把每个振幅作为球面的切向量来考虑. 给出这些向量一致的定向，得到傅科摆摆平面方向 V 的向量场. 在任意时间 t，存在一个摆动方向向量 $V(t)$. 将给定的时刻 t 与描述傅科摆沿 $\alpha(u)$ 移动的点联系起来，那么所有的向量都可以认为是沿着纬线圆 $\alpha(u)$ 的. 以 $V(u)$ 表示摆动平面的向量场.

第二，因为是沿着纬线圆缓慢运动，摆上的向心力可以忽略不计.（事实上，它近似于重力 mg 的 $\frac{1}{290}$.）这就是说，可以认为傅科摆只受法向量 U 方向上的重力作用. 但是这样一个法向量方向上的力并不影响摆的竖直摆动平面. 因此，摆动平面可以认为是球面的二维定居者，即在切平面上的投影，

$$\nabla_{\alpha'} V=\operatorname{proj}\frac{\mathrm{d}V(u)}{\mathrm{d}u}=0,$$

根据上述技术处理，共变微商也就是通常的导数. 由前面的讨论，得到以下命题.

命题 6.4.1 *与傅科摆相关的向量场 V 沿纬线圆是平行的.*

当然，沿纬线圆 α 移动傅科摆，完整性使得平行向量场 V 旋转了 $-2\pi\sin v_0$ 的弧度. 特别地，旋转的角速度为 $\omega=\frac{2\pi\sin v_0\ \text{弧度/秒}}{24\ \text{小时}}$. 由几何与物理的等价性得以下定理. 306

定理 6.4.2 *傅科摆的运动周期是*

$$\frac{2\pi\ \text{弧度/秒}}{\omega}=\frac{24}{\sin v_0}\ \text{小时}.$$

当然这与物理实验得到的周期一致. 但是傅科摆的摆动平面的运动与沿 α 的完整性有关，而这是由地球的曲率诱导的. 进而，因为我们认为整个摆动装置相对于地球是静止的，如何解释上面发现的摆动平面的运动？与傅科讨论的一样，得到

推论 6.4.3 *地球沿着纬线圆旋转.*

练习 6.4.4 假设傅科摆沿着环面的纬线圆移动(依然假设傅科摆只受环面的法向量方向的力). 计算完整性，这个实验能否区分我们生活在球面上还是在环面上？

6.5 角的剩余定理

现在回到几何上来，考虑单位速度的简单闭曲线β，其参数满足$0\leqslant s\leqslant 2\pi$. B表示β的内部区域，假设B单连通，即β能够连续地缩为B的一个点. 关于α的公式和概念，对于β依然有效. 注意不再假设曲面存在于3维空间中. 将上面讨论的共变微商的性质推广到一般曲面(见练习6.2.3)，且仅仅假设这些性质成立，但并不证明. 例如，$\nabla_{\beta'}\mathcal{E}_1=\omega_{21}\mathcal{E}_2$，$\theta$表示$\beta'$与$\mathcal{E}_2$的夹角. 因为$\mathcal{E}_1$与$\mathcal{E}_2$是标准正交的，所以可以用两种方法描述$\omega_{21}$.

第一，由β的测地曲率公式(见练习6.3.4)

$$\nabla_{\beta'}\mathcal{E}_1\cdot\mathcal{E}_2=\omega_{21}=\kappa_g-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}.$$

第二，由$\mathcal{E}_1=x_u/\sqrt{E}$，$\mathcal{E}_2=x_v/\sqrt{G}$，计算公式的左边. 由$\beta'=x_u u'+x_v v'$知

$$\begin{aligned}\nabla_{\beta'}\mathcal{E}_1\cdot\mathcal{E}_2&=\left[\left(\frac{x_u}{\sqrt{E}}\right)_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\left(\frac{x_u}{\sqrt{E}}\right)_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right]\cdot\mathcal{E}_2\\&=\left[\frac{x_{uu}\sqrt{E}-x_u\frac{1}{2}E^{-1/2}E_u}{E}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\frac{x_{uv}\sqrt{E}-x_u\frac{1}{2}E^{-1/2}E_v}{E}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right]\cdot\mathcal{E}_2\\&=\left(\left[\frac{x_{uu}}{\sqrt{E}}-\frac{x_uE_u}{2E^{3/2}}\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\left[\frac{x_{uv}}{\sqrt{E}}-\frac{x_uE_v}{2E^{3/2}}\right]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\frac{x_v}{\sqrt{G}}.\end{aligned}$$

利用x_{uu}，x_{uv}的公式(见3.4节)可得

307

$$x_{uu}\cdot x_v=-\frac{E_v}{2}\quad 和\quad x_{uv}\cdot x_v=\frac{G_u}{2}.$$

因此由上述计算及x_u，x_v的正交性，得

$$\omega_{21}=\nabla_{\beta'}\frac{x_u}{\sqrt{E}}\cdot\frac{x_v}{\sqrt{G}}=\frac{-E_v}{2\sqrt{EG}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}.$$

练习6.5.1 利用3.4节中x_{uu}，x_{uv}的表达式，验证上述公式(忽略U分量).

练习6.5.2 由以上关于ω_{21}的一般公式，可以得到完整性的另一种求法. 例如，考虑庞加莱平面$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y>0\}$，坐标补片$x(u,v)=(u,v)$，取共形度量

$$w_1\cdot w_2=\frac{w_1\cdot w_2}{v^2},\quad 其中\quad w_1,w_2\in T_p(P),\quad 且\ p=(u,v).$$

证明沿水平线$v=1$从$(0,1)$到$(a,1)$的完整性是$-a$，即沿着$v=1$从$(0,1)$移动到$(a,1)$，切向量旋转了$-a$弧度. 提示：证明沿$v=v_0$的u-参数曲线，$\omega_{21}=1/v_0$.

以下回忆格林定理(定理1.6.2). 令C是简单闭曲线，若可以连续缩小到它内部的一个点，称此曲线为可缩的. 线积分$\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$可由以下面积积分计算：

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中R是C包含的区域. 由上述ω_{21}的计算以及等式$\omega_{21}=\kappa_g-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$可得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\kappa_g=\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}-\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}.$$

两边同时对 s 积分，并由格林定理，得

$$\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s-\int\kappa_g\mathrm{d}s-\int\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}-\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

$$=\int_\beta\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\mathrm{d}u-\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\mathrm{d}v$$

$$=\iint_B-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

由定理 3.4.1，曲面上积分的定义以及由 $F=0$ 得到的 $|x_u\times x_v|=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{EG}$，上式可继续计算：

$$=\iint_B K\sqrt{EG}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_B K.$$ 308

定理 6.5.3 *β 是可缩的简单闭曲线，沿 β 的完整性等于包含于 β 的区域 B 上的全高斯曲率．进一步，沿曲线 β，θ 总的变化是*

$$\theta(2\pi)-\theta(0)=\int\kappa_g\mathrm{d}s+\int_B K.$$

推论 6.5.4 *若 β 是测地线，则*

$$\theta(2\pi)-\theta(0)=\int_B K.$$

θ 是 β' 与 ϵ_1 的夹角，故对闭曲线 β，θ 总的变化是 2π 的整数倍．

练习 6.5.5 解释上面的论述．

因此，$2\pi\cdot A=\int\kappa_g\mathrm{d}s+\int_B K$，其中 A 是整数．A 到底等于多少呢？直观地想象一下，如果 β 缩为一个点，A 等于几呢？由于缩小的过程是连续的且总的变化是 2π 的整数倍，故总的变化始终保持不变．在一个点附近，可以将曲线看作平面上的小圆，ϵ_1 看作一个固定向量（例如 $e_1=(1,0)$）．在这种情形下，沿着圆运动，切向量恰好旋转了一周，即总的变化是 2π．由过程的连续性得 $A=1$．霍普夫对此作过详细的讨论（见[Hsi81]）．

最后回到本章开始时提出的问题，就是以微分的观点理解古典微分几何的一个基本概念．考虑曲面 M 上由三条曲线构成的可缩的三角形（如图 6-6 所示）．角 i_j 称为内角，$\pi-i_j$ 称为 i_j 的外角．以给定的方向沿三角形移动，考虑切向量沿曲线的变化，类似于上面直观的讨论知道总的变化是 2π．其中有两部分在变化：(1)利用测地曲率公式，一部分为 $\int\kappa_g(\triangle)+\int_\triangle K$；(2)在三角形的顶点处的变化为 $(\pi-i_1)+(\pi-i_2)+(\pi-i_3)$．因此，

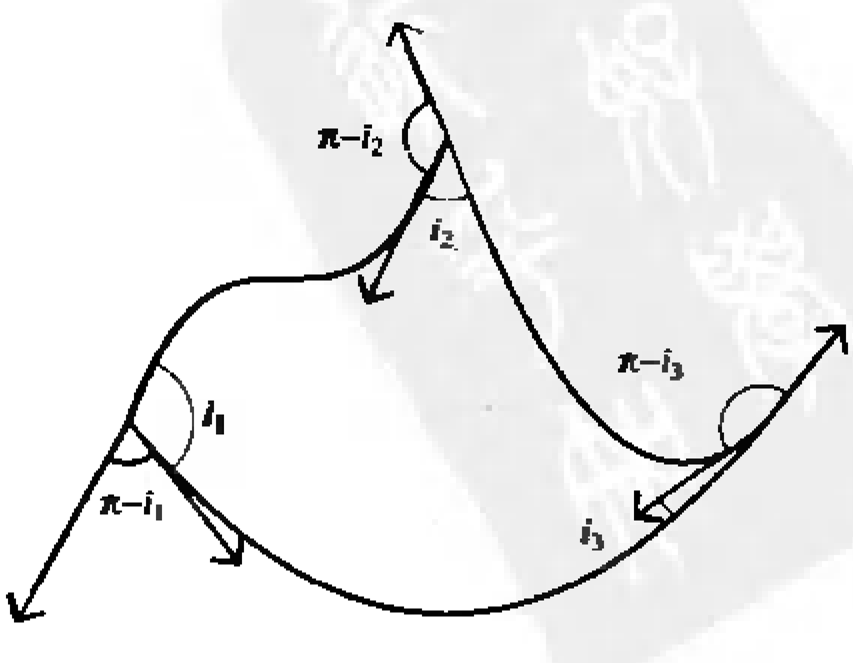


图 6-5 M 上的三角形

$$2\pi=\int\kappa_g(\triangle)+\int_{\triangle}K+(\pi-i_1)+(\pi-i_2)+(\pi-i_3).$$

定理 6.5.6 如果曲面上三角形可缩为一点，则

$$2\pi=\int\kappa_g(\triangle)+\int_{\triangle}K+\sum_{j=1}^{3}(\pi-i_j).$$

移项并合并同类项，乘以-1，得

$$-\int\kappa_g(\triangle)-\int_{\triangle}K=-2\pi+(\pi-i_1)+(\pi-i_2)+(\pi-i_3)$$
$$=\pi-(i_1+i_2+i_3).$$

推论 6.5.7 如果曲面上的三角形可缩为一点，且其边为测地线，那么三角形的内角和等于 π 加上或减去全高斯曲率.

推论 6.5.8 如果曲面 M 的高斯曲率为定值 K，$\triangle$是推论 6.5.7 中的三角形，则 $\pi-(i_1+i_2+i_3)=-K\cdot\triangle$的面积.

例 6.5.9 下面是剩余角的例子. 因为半径为 R 的球面的 $K=\frac{1}{R^2}$，所以

$$\int_{\triangle}K=\frac{1}{R^2}\int_{\triangle}\mathrm{d}A=\frac{\triangle\text{ 的面积}}{R^2}.$$

因此，$\sum_j i_j-\pi=\frac{\triangle\text{ 的面积}}{R^2}$. 因此在球面上，

309~310 $$\sum_j i_j=\pi+\frac{\triangle\text{ 的面积}}{R^2}>\pi.$$

这就是传统平行公理的一部分.

练习 6.5.10 证明双曲平面 H 或庞加莱平面 P 上的三角形的内角和严格小于 π.

由上可知．曲率对于三角形内角和这样基本的几何性质都有重要的影响. 在这种意义下，从微分的观点看，高斯曲率是几何的基本构成元. 下一节讨论的高斯-博内定理，其实就是定理 6.5.6 的整体描述.

6.6 高斯-博内定理

事实上，任何曲面都可三角剖分. 也就是说，曲面可由曲面上可缩的三角形完全覆盖，这些三角形仅有公共边或公共顶点. 进一步，曲面的定向也就给出了所有三角形的定向，而且相邻三角形公共边的定向相反(如图 6-6 所示).

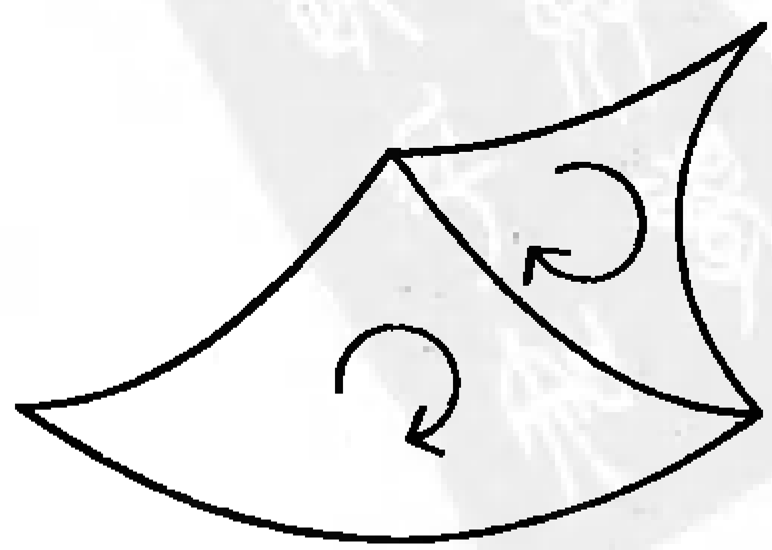


图 6-6 有公共边的定向三角形

设 M 存在一个三角剖分，V，E，F 分别表示顶点、边以及三角形的个数. 对每个三角形分别应用定理 6.5.6，然后把公式两边相加，得

$$\sum_{\triangle}\int\kappa_g(\triangle)+\sum_{\triangle}\int_{\triangle}K+\sum_{\triangle}\sum_{j=1}^{3}(\pi-i_j)=\sum_{\triangle}2\pi.$$

M 可能有边界曲线(假设光滑)，例如有限高的圆

柱. 以 ∂M 表示此边界，此时，顶点和边分成了两部分，一部分在边界上，另一部分在 M 的内部. $V=V_I+V_B$，$E=E_I+E_B$，其中下标 I 和 B 分别表示位于内部和边界上. 对于 V_I 中的顶点，所有以此点为顶点的三角形在这个顶点处的内角和是 2π. 对于 V_B 中的顶点，所有以此点为顶点的三角形在此点的内角和是 π，也就是此顶点处切线到边界的角度，故 311

$$\int_{\partial M}\kappa_g+\int_M K+3\pi F-2\pi V_I-\pi V_B=2\pi F.$$

进一步，每个三角形有三条边，除了边界上的边只属于一个三角形外，任一边都属于两个三角形. 即 $3F=2E_I+E_B$. 以 $(2E_I+E_B)\pi$ 代替 $3F\pi$，且 $V_B=E_B$，则有

$$\int_{\partial M}\kappa_g+\int_M K+2\pi E_I+\pi E_B-2\pi V_I-\pi V_B=2\pi F,$$

$$\int_{\partial M}\kappa_g+\int_M K+2\pi E_I+\pi E_B+\pi E_B-\pi V_B-2\pi V_I-\pi V_B=2\pi F.$$

即是

$$\int_{\partial M}\kappa_g+\int_M K+2\pi(E_I+E_B)-2\pi(V_I+V_B)=2\pi F,$$

$$\int_{\partial M}\kappa_g+\int_M K+2\pi E-2\pi V=2\pi F,$$

$$\int_{\partial M}\kappa_g+\int_M K=2\pi(V-E+F).$$

因此，定义 $\chi(M)=V-E+F$ 为 M 的欧拉示性数.

定理 6.6.1(高斯-博内定理) *M 是紧的可定向的曲面，边界 ∂M 由有限多个光滑闭曲线组成，则*

$$\int_{\partial M}\kappa_g+\int_M K=2\pi\chi(M).$$

推论 6.6.2 *若 M 是无边界的紧的可定向曲面，则*

$$\int_M K=2\pi\chi(M).$$

当然我们忽略了一点，那就是 $\chi(M)=V-E+F$ 可能并不是 M 的特征，而是依赖于三角剖分的取法. 事实并非如此，这还要涉及欧拉的一个定理，一个更一般的结论. 图 G 由有限多个顶点 $V=\{v_k\}$ 及边 $E=\{e_{ij}\}$ 组成，其中 e_{ij} 表示连结 v_i，v_j 唯一的边. 如果任意两点都有由边组成的路径连结，则称此图为连通图. 以下只考虑连通图. 如果存在映射 $f: G\to M$ 使得边的像只相交于顶点的像，则称 G 是嵌入到 M 中的图. 如果由嵌入决定的曲面多边形是单连通的，则称此嵌入是 2 胞腔嵌入(因此看起来就像一个 2 维的圆盘). 312

练习 6.6.3 把一个图嵌入到平面，并计算 $V-E+F$. 确定包含无穷大处的面，此面包含整个图像(可以被认为是球面上的 2 胞腔). 在球面、环面及柱面上做 2 胞腔嵌入，确定所做的嵌入是 2 胞腔的.

定理 6.6.4(欧拉) *嵌入到平面的图像满足 $V-E+F=2$.*

证明 对图像的边进行归纳. 很容易验证图像只有一或两条边时，命题成立. 假设 G 有 E 条边，有两种情形. G 是一个树，即不包含有面，则 $E=V-1$，且 $F=1$，故 $V-E+F=V-$

$(V-1)+1=2$. 若 G 不是树，则 G 中存在一个闭链，即是一系列的边构成的平面上的一条闭曲线. 由若尔当曲线定理，此闭链有内部和外部，故存在一个边 e，它属于两个面. 从 G 中除去这条边，注意因为 e 在一个闭链上，所以新的图像 $\bar{G}$ 依然是连通的，且面的个数是 $F-1$. 由归纳假设(G 有 $E-1$ 条边)，$V-(E-1)+(F-1)=2$，此即是 $V-E+F=2$. ■

练习 6.6.5 利用上面定理的证明方法，证明球面、环面、圆盘、柱面的欧拉示性数 $\chi=V-E+F$ 分别是 2，0，1，0. 对于圆盘(单位圆的内部)，利用对于平面的证明，只需去掉无穷大处的面. 解释对 2 胞腔嵌入，为什么球面和平面均有 $V-E+F=2$. 提示：球极平面投射.

如果不考虑几何性质，而只考虑连续形变下的形状，那么任意紧的可定向曲面(无边界)都是带环柄的球面. 带 g 环柄的球面 S_g 是在球面上切下两个半径是 g 的圆盘，然后沿着边界圆插入 g 圆柱得到的. 显然，球面是 S_0，环面是 S_1.

练习 6.6.6 证明在 S_g 上，图像的 2 胞腔嵌入满足 $V-E+F=2-2g$，因此无边的紧的可定向曲面的欧拉示性数是 $2-2g$. 事实上，对于无边的紧的可定向曲面 M 来说，在同胚的意义下，欧拉示性数决定了曲面.

313 **练习 6.6.7** 练习 5.4.9 给出了环面一个度量，使得高斯曲率 K 恒为 0. 利用高斯-博内定理证明环面上不存在度量，使得 $K\leqslant 0$，且存在某一点，在此点处 $K<0$. 这表示像欧拉示性数这样非几何的不变量也能限制曲面的几何性质. 进一步，证明任何正高斯曲率的曲面能够形变为球面. 事实上，这些曲面拓扑等价于球面.

高斯-博内定理的实质是什么? 例如，球面经过伸缩和旋转变换产生了不同的几何曲面，图 6-7 中的卷饼就是其一.

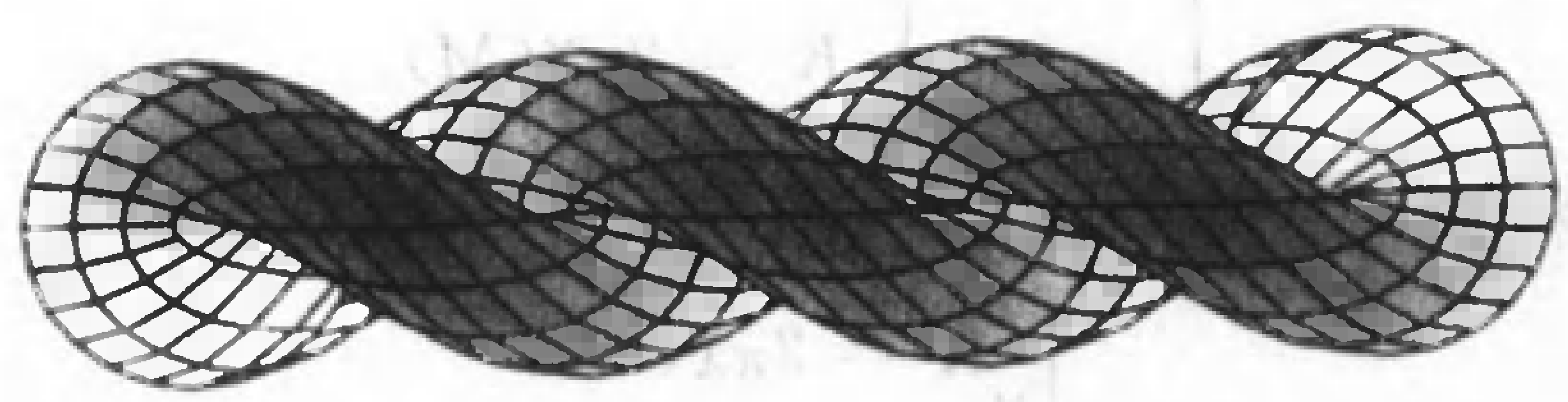


图 6-7 卷饼

即使这些曲面的高斯曲率明显不是常数，但因为这些曲面是由球面形变而来，所以由高斯-博内定理知全高斯曲率都是 4π. 即在整体不变量 χ 影响下的形变曲面，决定了一个整体几何不变量——全高斯曲率. 由形变不变量限制几何性质的想法得到了数学中很多很重要的结论. 在这方面，高斯-博内定理是现代微分几何和代数拓扑大部分精髓的起源.([Got96]中有关于高斯-博内定理和欧拉示性数的有趣的内容.)

6.7 高斯-博内定理的应用

高斯-博内定理还可以通过其他的方式约束曲面的几何性质. 下例说明它如何影响测地线.

练习 6.7.1(单叶双曲面) 考虑单叶双曲面 M：$x^2+y^2-z^2=1$. 旋转曲面 M 的参数方程为

$$x(u,v) = (\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, \sinh u).$$

因为 $h(u)=\cosh u$ 且 $h'(0)=\sinh 0=0$，所以中心圆(v-参数曲线)$\alpha=x(0, v)=(\cos v, \sin v, 0)$ 是(闭的)测地线. 事实上，利用高斯-博内定理，可以证明这个圆是 M 上唯一的闭测地线. 为此，假设 β 是 M 上另外一条闭测地线. 有两种可能：一种是 α 与 β 不相交，另一种是相交. 假设不相交，则 α，β 是双曲圆 $\bar{M}$ 的一部分的光滑边界曲线，且这部分可形变为圆柱，由上述练 314
习知其欧拉示性数为零. 而作为双曲面的一部分. 在 $\bar{M}$ 的每点都有 $K<0$. 因此，$\int_{\bar{M}} K < 0$，这与高斯-博内公式 $\int_{\bar{M}} K = 2\pi\chi(\bar{M}) = 0$ 矛盾. $\left(\text{因为 } \alpha,\beta \text{ 为测地线，所以} \int_{\partial\bar{M}} k_g = 0.\right)$

假设 α，β 相交于两点，且所成的两个内角(必须的)ϕ_i 都小于 π.

练习 6.7.2 证明最后一个论述 $\phi_i<\pi$. 提示：经过一点且给定初始切向量的测地线是唯一的.

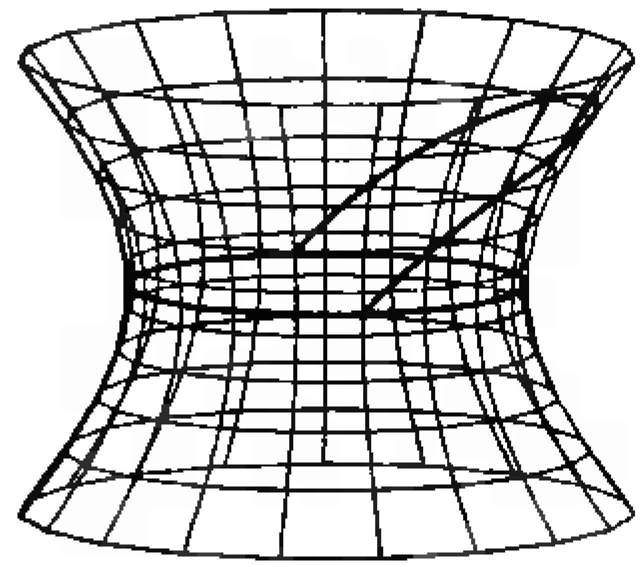


图 6-8 一条可能的闭测地线?

因为内角为 ϕ_i 的 α，β 围成的区域 R(如图 6-8 所示)单连通，所以可以形变为圆盘. 事实上，可以将区域等同一个顶点在 β 上内角为 π、在另两个顶点处内角为 ϕ_i 的三角形. 又因为 R 是双曲面的一部分，所以 $\int_R K<0$. 由局部高斯-博内定理，得

$$\int_R K + (\pi-\pi) + (\pi-\phi_1) + (\pi-\phi_2) = 2\pi,$$

$$\int_R K = \phi_1 + \phi_2,$$

$$\int_R K > 0,$$

矛盾. 因此不存在其他的闭测地线.

练习 6.7.3 证明在 $K\leqslant 0$ 的曲面上不存在所围区域是单连通区域的闭测地线(即区域可形变为圆盘).

为了理解高斯-博内定理的下一个应用，需要一些背景，主要采用[Sol96]中的方法. 假设 $\alpha(s)$ 是单位球面 $S^2\subset\mathbb{R}^3$ 上的单位速度曲线，球的单位法向量是 U. 和 5.1 节一样，记 315

$$\alpha'' = \kappa_g U\times T + (\alpha''\cdot U)U$$
$$= \kappa_g U\times T - U,$$

这是因为 R 球上的形状算子 $S(\alpha')=-\alpha'/R$(见练习 2.2.13)，且

$$\alpha''\cdot U = \alpha'\cdot S(\alpha') \qquad \text{由引理 2.4.1}$$
$$= \alpha'\cdot\frac{-\alpha'}{R}$$
$$= -1. \qquad \text{因为 } \alpha'\cdot\alpha' = 1, \text{且 } R=1$$

注意由练习 5.1.1 和曲线的曲率为正，这一结果说明沿 α 总有 $\kappa_\alpha\geqslant 1$. 同时，因为 α 位于单位球上，所以对任意 s，$\alpha(s)=U_{\alpha(s)}$. 可记 $\alpha''=\kappa_g\alpha\times T-\alpha$.

练习 6.7.4 记号如上，证明$(U\times T)'=-\kappa_g T$. 提示：利用微分的莱布尼茨法则、叉积性质以及公式$\alpha''=\kappa_g\alpha\times T-\alpha$.

$\alpha'(s)=T(s)$也是单位球面S^2上的曲线，称为α的 tantrix. "tantrix"是在[Sol96]中提出的，它与传统的切指标线相对立. 注意，因为由定义$|T'(s)|=\kappa_a$，所以$T(s)$不必是单位速度的. 设t是$T(s)$的弧长参数，则

$$t(s)=\int_0^s |T'(u)|\,\mathrm{d}u;\quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=|T'(s)|=\kappa_a\geqslant 1.$$

因为总有$\mathrm{d}t/\mathrm{d}s>0$，所以存在反函数$s=s(t)$，且

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\mathrm{d}t/\mathrm{d}s}=\frac{1}{\kappa_a}.$$

取α对t的导数得

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=T\frac{1}{\kappa_a}.$$

由$V_{T(t)}=\alpha(t)$定义沿$T(t)$的向量场，且$V_{T(t)}\cdot T(t)=\alpha(t)\cdot T(t)=U_{\alpha(t)}\cdot\alpha'(t)=0$. 因此$\alpha(t)$是沿$T(t)$与球面相切的向量场. 事实上，$\alpha(t)$是沿$T(t)$的平行向量场. 注意$T(t)$是$S^2$上的曲线，所以

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\kappa_a}T=\frac{1}{\kappa_a}U_{T(t)}.$$

316 因此$\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$在法方向上，在切平面上的投影为零. 即$\alpha$是沿$T(t)$的平行向量场.

类似于定理 6.3.2 的讨论，只不过目前的情形是对于S^2上沿曲线β的向量场$V=\cos\phi T+\sin\phi U\times T$，其中$\phi$是$V$和$T$的夹角. 平行向量场有固定长度，可以将其单位化. 由上述计算，得

$$T'=\beta''=\kappa_g U\times T-U,\quad (U\times T)'=-\kappa_g T,$$

其中κ_g是表示β的测地曲率. V的导数为

$$\begin{aligned}V'&=-\sin(\phi)\phi'T+\cos(\phi)T'+\cos(\phi)\phi'U\times T+\sin(\phi)(U\times T)'\\&=-(\phi'+\kappa_g)\sin(\phi)T+(\phi'+\kappa_g)\cos(\phi)(U\times T)-\cos(\phi)U.\end{aligned}$$

显然，当V'在切平面上的投影为零时，V是平行向量场. 因为$\sin\phi$和$\cos\phi$不能同时为 0，所以V是平行向量场当且仅当$\phi'=-\kappa_g$.

定理 6.7.5 *若$\alpha(s)$是S^2上单位速度的闭曲线，$T(s)$是闭的，则$T(s)$的全测地曲率是零. 而且，若$T(s)$是简单的(即自身不相交)，则$T(s)$围出的区域面积为2π.*

证明 和上述讨论一样，将$\alpha(t)$看成是沿$T(t)$的平行向量场. 设L是$\alpha(t)$的周期(即$\alpha(0)=\alpha(L)$)，也是$T(t)$的周期. $T(t)$的测地曲率满足$\kappa_g=-\phi'$. 因为α是闭的，所以全测地曲率为

$$\int_T\kappa_g=-\int_0^L\phi'\,\mathrm{d}t=\phi(0)-\phi(L)=0,$$

若T是简单的，则由若尔当曲率定理知T围出的区域$\mathcal{R}$是圆盘. 由练习 6.6.5，欧拉示性数$\chi(\mathcal{R})=1$. 由高斯-博内定理，$\int_T\kappa_g=0$且S^2的高斯曲率为$K=1$，则

$$\int_T \kappa_g + \iint_{\mathcal{R}} K\mathrm{d}A = 2\pi\chi(\mathcal{R})$$

$$0 + \iint_{\mathcal{R}} 1\mathrm{d}A = 2\pi$$

$$\mathcal{R}\text{的面积} = 2\pi.$$

关于$\mathbb{R}^3$中闭曲线的著名的优美的雅可比定理可以作为定理 6.7.5 的推论. ■

推论 6.7.6(雅可比分半定理) *设 $\alpha(s)$是$\mathbb{R}^3$中的单位速度闭曲线，且在 α 上处处 $\kappa>0$. $N(s)$是 α 的主法向量，且视 α 为 S^2 的闭曲线. 若 $N(s)$是简单曲线，则 $N(s)$围成的区域面积是 2π. 换句话说，$N(s)$等分 S^2 的面积.* 317

证明 设 $T(s)$表示 α 的 tantrix，将 $T(t)$再次参数化使其有单位速度，则 $T(t)$是 S^2 的单位速度闭曲线且其 tantrix 为

$$T'(t) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \kappa_\alpha N(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \kappa_\alpha N(s)\frac{1}{\kappa_\alpha} = N(s).$$

因为 T 的 tantrix 是 α 的主法向量 N，所以由定理 6.7.5 知，雅可比分半定理成立. ■

高斯-博内定理在本书中最后的应用是阿达马定理. 由带有拓扑特征的曲率条件得出很强的几何结论. 下面紧接[Che67]中的讨论. 称曲面是凸的，如果它位于每个切平面的同一侧. 曲面是闭的，如果若它是紧的且没有边界.

定理 6.7.7(阿达马定理) *若 M 是$\mathbb{R}^3$中闭的可定向的曲面，且 $K>0$，则 M 是凸的.*

证明 由高斯-博内定理，$0<\int_M K\mathrm{d}A = 2\pi\chi(M)$. 即$\chi(M)>0$. 由练习 6.6.6，$\chi(M)=2$ 且 $\int_M K\mathrm{d}A = 4\pi$.

考虑高斯映射 $G: M\to S^2$，回忆负的形状控制函数$-S_p$等同于在 p 点的导出映射G_*(见 2.3 节). 因为高斯曲率是 S_p 的行列式，所以 $K>0$ 意味着对所有 $p\in M$，$\det(S_p)>0$. 即对任意的 p，G_*是可逆的线性变换. 根据定理 2.3.8，存在 p 点的开邻域$\mathcal{O}_p$，使得 $G: \mathcal{O}_p\to G(\mathcal{O}_p)\subset S^2$ 是到开集 $G(\mathcal{O}_p)$上的一一对应，且存在光滑的反函数. (换言之$\mathcal{O}_p$微分同胚于 $G(\mathcal{O}_p)$.)这对任意的 $p\in M$ 都是对的，故 $G(M)$是 S^2 中的开集. (也就是 $G(M)$中的每个点都包含在某个 S^2 的开集中，而这个开集完全由 $G(M)$中的点构成). 而 M 是紧的，所以由命题 2.1.4 知 $G(M)$也是紧的，因此是闭的. 所以 $G(M)$是连通集 S^2 上的既开又闭的集合. 由练习 2.1.2，$G(M)=S^2$

现在要证明 $G: M\to S^2$ 不仅是到上的还是一一的. 假设不是，则存在 M 上的 x，y 满足 $G(x)=G(y)$. 设 $\mathcal{O}_x$，$\mathcal{O}_y$是由反函数定理给出的两个小邻域，可以假设它们不相交. 因为 $G(x)=G(y)$，所以得到一个非空的交集 $V=G(\mathcal{O}_x)\cap G(\mathcal{O}_y)$. 设 $W=G|_{\mathcal{O}_y}^{-1}(V)$，因为 $G(G|_{\mathcal{O}_x}^{-1}(V))=V$，所以 $G(M-W)=S^2$. 因为 $G(M-W)=S^2$ 且 $G(M-W)$可能是 S^2 的多重覆盖，所以由命题 3.1.8，有

$$\int_{M-W} K\mathrm{d}A = G(M-W)\text{ 的面积} \geqslant 4\pi.$$ 318

因为在 $W\subset M$ 上 $K>0$，所以$\int_W K\mathrm{d}A>0$，且

$$\int_M K\,\mathrm{d}A = \int_W K\,\mathrm{d}A + \int_{M-W} K\,\mathrm{d}A > 4\pi.$$

这和前面计算的结果 $\int_M K\,\mathrm{d}A = 4\pi$ 相矛盾. 因此，G 是一一的且是到上的映射. 由反函数定理，局部的反函数(整体的反函数的限制)G^{-1} 是光滑的. 即 G：$M \to S^2$ 是微分同胚.

最后，来看由 G：$M \to S^2$ 是一一的到上的如何得到 M 是凸的. 因为 $G(p) = U(p)$，其中 U 是 M 的单位法向量，又 G：$M \to S^2$ 是微分同胚，所以对 $\mathbb{R}^3$ 中的每个方向 $\boldsymbol{v}$，仅存在 M 上的一个的点 p，使在这点 $U(p)$ 指向 $\boldsymbol{v}$. 故选择一个方向 $\boldsymbol{v} \in S^2$ 并找出唯一的满足 $U(p) = \boldsymbol{v}$ 的点 $p \in M$. 取 p 点的切平面 $T_p(M)$，并沿 $\boldsymbol{v}$ 方向移离 M. 定义函数 f：$M \to \mathbb{R}$，其中 $f(q)$ 等于 q 沿 $\boldsymbol{v}$ 方向到 $T_p(M)$ 的距离. 因此 f 是连续的. 又 M 是紧的，由命题 2.1.4 知 f 在 M 上有最小值 m. 反向移动 $T_p(M)$，和 M 接触的第一个点就是取到最小值 m 的点. 由此看出，$U(m) = \boldsymbol{v} = U(p)$. 这和法向量的唯一性相矛盾，除非 $m = p$. 因为 p 是距离移动后的 $T_p(M)$ 最小的点，所以将 $T_p(M)$ 移回 p 点的时候，M 的所有其他点位于 $T_p(M)$ 的一边. 因为 p 是任意的，所以 M 是凸的. ∎

6.8 测地极坐标

最后，对于推论 6.5.8 的内角和定理，可以选择另外一种标架. 虽然在前面第 5 章提到测地极坐标的概念，但并没有描述它的结构，下面要给出它的结构. 现在我们关注的是在研究内角和定理以及曲率对于整体几何性质影响的其他例子时，利用测地极坐标给出的另外一种方法. 对于测地极坐标完全的(且严格的)讨论相当有技巧性，在这里就不详细叙述. 一个很好的(且相当基本的)讨论见[O'N66]. 本节许多工作也和它相似. 细节问题留给读者自己去验证.

固定点 $p \in M$，设 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 表示部分平面的映射，其中 v 表示 p 点的单位切向量 $\boldsymbol{w}$ 与固定单位切向量 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角，u 表示沿着满足 $\alpha(0) = p$，$\alpha'(0) = \boldsymbol{w}$ 的单位速度测地线 α 的"距离". 更具体地，设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是在 p 点互相垂直的单位切向量. 记 $\boldsymbol{w} = \cos v\,\boldsymbol{e}_1 + \sin v\,\boldsymbol{e}_2$. $\boldsymbol{x}(u, v) = \alpha_{\boldsymbol{w}}(u)$，其中，下标表示 α 是由 $\boldsymbol{w}$ 决定的，而 $\boldsymbol{w}$ 又由参数 v 决定. 当然必须限制 u 使得 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 有定义. 故 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 映到(一般很小)p 的邻域. 下面的关键结果由反函数定理推得，这里不予证明.

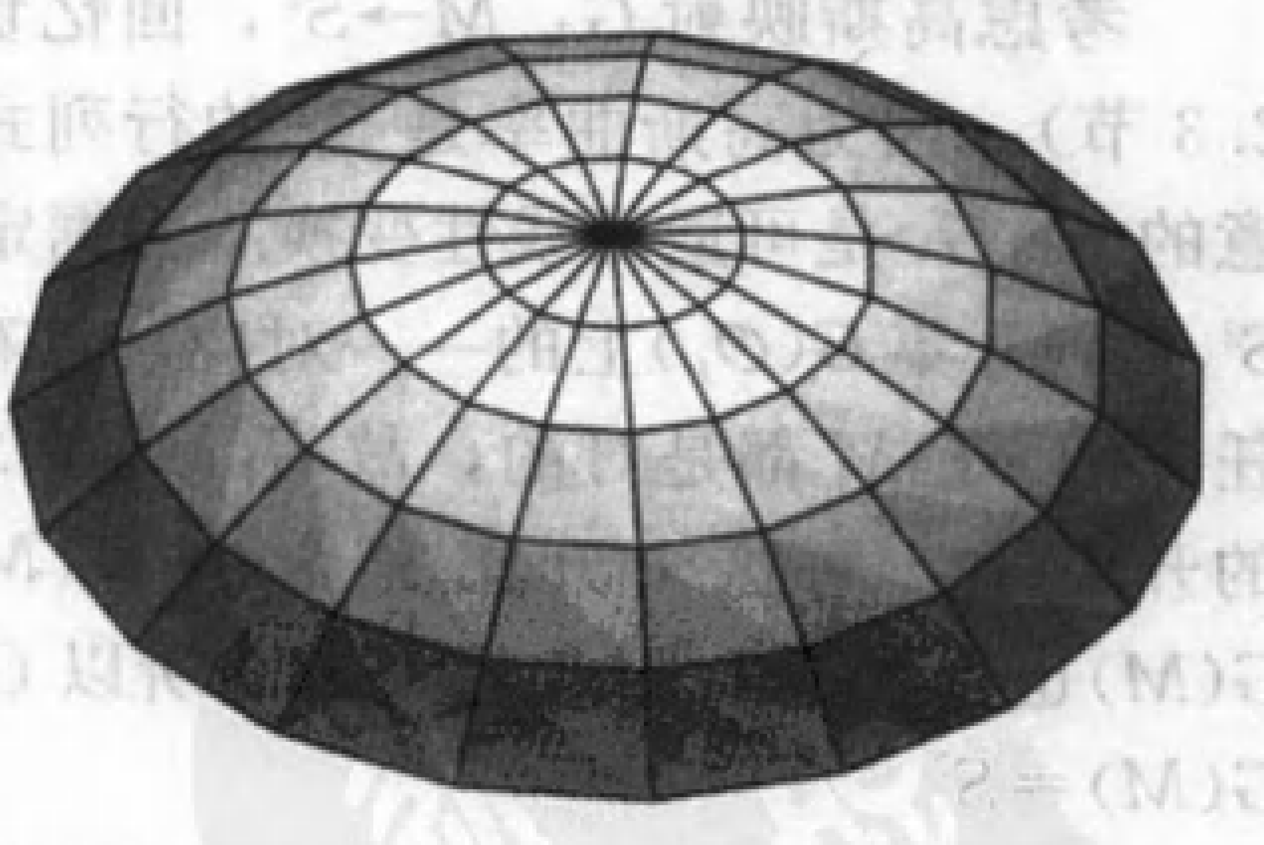


图 6-9 极坐标片上的测地线

定理 6.8.1 当 $u > 0$ 时，映射 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 是坐标补片，即 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 是有光滑反函数的光滑映射，且是从平面上的开集到 $p \in M$ 的开邻域上的映射. 当 $u > 0$ 时，它是一一映射.

注意这里不包含 p 点. 不包含的原因是因为通常的极坐标不包含平面上的原点. 正如我们所说，这个坐标补片被称为测地极坐标补片.

练习 6.8.2 利用直线是平面的测地线(通常的欧几里得度量)，证明关于原点的测地极坐标正是通常意义下的极坐标.

练习 6.8.3 设 $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$，$\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$，对于单位球面上的通常的坐标补片，变换 u，v

的角色．证明由此坐标补片可得北极点 $N=x(\pi/2, v)$ 的测地极坐标．注意不必从测地参数 $t=0$ 开始．这个坐标补片覆盖了球面的哪些部分？

练习 6.8.4 通常的极坐标不能给出双曲平面 $x(u, v)=(u\cos v, u\sin v)$ 经过 $(0, 0)$ 的单位速度径向线．证明径向线的弧长 $s(u)=2\operatorname{arctanh}(u/2)$，且对固定的 v_0，具有单位速度的参数方程为

$$\beta(s)=\left(2\tanh\frac{s}{2}\cos v_0, 2\tanh\frac{s}{2}\sin v_0\right).$$

这里使用了双曲度量．给出 x 的另外的一种参数方程，并证明可以得到关于 0 点的测地极坐标． 319~320

下面的引理是利用测地极坐标的关键．

引理 6.8.5(高斯引理) *坐标补片 $x(u, v)$ 满足 $E=1$，$F=0$，$G>0$.*

证明 $E=x_u\cdot x_u=1$ 是因为 u-参数曲线 $\alpha_{v_0}(u)$ 是单位速度的．因此，$x_v[E]=E_v=0$．由乘积法则(利用交换法则以及练习 6.2.3)，得

$$\begin{aligned}0&=E_v\\&=\nabla_{x_v}(x_u\cdot x_u)\\&=2\nabla_{x_v}x_u\cdot x_u\\&=2\nabla_{x_u}x_v\cdot x_u.\end{aligned}$$

因为 u-参数曲线是测地线且 $\nabla_{x_u}x_u=0$，所以

$$0=2\nabla_{x_u}x_v\cdot x_u+2x_v\cdot\nabla_{x_u}x_u$$

$$\begin{aligned}0&=2\nabla_{x_u}(x_v\cdot x_u)\\&=2F_u.\end{aligned}$$

因此 F 仅依赖于 v．注意 v-参数曲线 $x(u_0, v)$ 在 $u=0$ 时，$x(0, v)=p$ 是定值．因此在 p 点，对任意的 v，$x_v(0, v)=0$ 且(对固定的 v)

$$\lim_{u_0\to 0}F=\lim_{u_0\to 0}x_u(u_0,v)\cdot x_v(u_0,v)=0.$$

因为 F 不依赖于 u，所以沿 v 定值的曲线 $F=0$．由 v 的任意性，在这个坐标补片上 $F=0$ 恒成立．因此 u-参数曲线是(从 p 点)径向测地线，而 v-参数曲线是这些径向测地线的正交轨道．最后，因为 x 是坐标补片，所以 $G=EG-F^2>0$. ■

注记 6.8.6 注意上述证明包含这样一个事实：$\sqrt{G}(0, v)=|x_v(0, v)|=0$．在下面的讨论中将它作为一个特殊的微分方程的初值条件．

练习 6.8.7 利用第 5 章的讨论，证明对于测地极坐标补片上的任意点 q，从 p 到 q 的径向测地线(即 u-参数曲线)给出连结 p 到 q 的任意曲线的最短弧长．而且由讨论知不存在其他的过此两点的曲线，使得在此曲线上这两点的距离最短．

因为点 p(称为极)对坐标补片来说是一个比较棘手的点，所以在考虑它附近点的几何性质时必须小心．为了弄清极点附近的几何性质，习惯上，构造测地极坐标补片的标架

$$\mathcal{E}_1=x_u,\quad \mathcal{E}_2=\frac{x_v}{\sqrt{G}}.$$

321 因为 u-参数曲线是测地线，所以$\mathcal{E}_1$沿 u-参数曲线平行. 向量场$\mathcal{E}_1$有固定的长度1且和$\mathcal{E}_1$保持固定的夹角$\pi/2$，所以(由练习 6.3.3)它也沿径向测地线平行，即$\nabla_{x_u}\mathcal{E}_2=0$. 设

$$\mathcal{E}_1(0)=\cos v_0 e_1+\sin v_0 e_2,\quad \mathcal{E}_2(0)=-\sin v_0 e_1+\cos v_0 e_2,$$

其中 e_1，e_2 是 p 点固定的单位切向量. 令 $\alpha(u)=x(u, v_0)$，考虑沿 u-参数曲线的共变微商

$$\begin{aligned}\nabla_{x_u}x_v&=\nabla_{x_u}(\sqrt{G}\,\mathcal{E}_2)\\&=(\sqrt{G})_u\,\mathcal{E}_2+\sqrt{G}\,\nabla_{x_u}\mathcal{E}_2.\end{aligned}$$

因为$\mathcal{E}_2$沿 α 平行，所以$\nabla_{x_u}\mathcal{E}_2=0$. 因此

$$\begin{aligned}\nabla_{x_v}x_u&=\nabla_{x_u}x_v\\&=(\sqrt{G})_u\,\mathcal{E}_2.\end{aligned}$$

特别地，趋近 p 点，

$$x_{uv}(0,v_0)=\lim_{u\to 0}((\sqrt{G})_u(u,v_0))\,\mathcal{E}_2(0).$$

也可以利用 $x_u=\mathcal{E}_1$计算这个量. 因为$\mathcal{E}_1(0)=\cos v_0 e_1+\sin v_0 e_2=x_u(0, v_0)$，$x_u(0, v)=\cos v e_1+\sin v e_2$，所以$\nabla_{x_v}x_u(0, v)=-\sin v e_1+\cos v e_2$，$\nabla_{x_v}x_u(0, v_0)=-\sin v_0 e_1+\cos v_0 e_2=\mathcal{E}_2(0)$. 因此

$$\lim_{u\to 0}((\sqrt{G})_u(u,v_0))\,\mathcal{E}_2(0)=\mathcal{E}_2(0)$$

且

$$\lim_{u\to 0}((\sqrt{G})_u(u,v_0))=1.$$

注意这一计算结果描述了 p 点附近的度量. 前面我们知道该坐标补片处处有 $E=1$，$F=0$，故 G 在 p 点处趋近 u^2 表明 p 的度量趋近欧几里得度量(在极坐标下)——至少趋近于一阶导数. 这也表明曲率应该由$\sqrt{G}$的二阶导数给出. 下面的重要练习验证了这一点.

练习 6.8.8 证明 $K=-(1/\sqrt{G})(\sqrt{G})_{uu}$. 首先对$(\sqrt{G})_{uu}$的表达式利用链式法则，并比较把 $E=1$ 代入定理 3.4.1 中所得的结果. 可得沿径向测地线的雅可比方程$(\sqrt{G})_{uu}+K\sqrt{G}=0$.

为了从测地极坐标的角度考虑角的剩余定理，必须考虑由非径向测地线和径向测地线构成的三角形. 设 γ 是和径向测地线$\alpha(u)=x(u, v_0)$相交的单位速度的测地线，记 $\gamma(t)=x(u(t),$
322 $v(t))$. 因为 γ 是单位速度的，所以 $\gamma'=x_u\dfrac{du}{dt}+x_v\dfrac{dv}{dt}$，且$(du/dt)^2+G(dv/dt)^2=1$. 同样，$\gamma$ 和 α 在交点处的夹角 ϕ 可以用它们的切向量的内积(用 $\circ$ 表示)表出，即

$$\cos\phi=x_u\circ\gamma'=\frac{du}{dt}.$$

因此，$G(dv/dt)^2=1-(du/dt)^2=\sin^2\phi$，也就是 $\sin\phi=\sqrt{G}(dv/dt)$. 沿 γ 微分 $\cos\phi=x_u\circ\gamma'$，得

$$\begin{aligned}-\sin\phi\frac{d\phi}{dt}&=\nabla_{\gamma'}x_u\circ\gamma'+x_u\circ\nabla_{\gamma'}\gamma'\\&=\nabla_{\gamma'}x_u\circ\gamma'\\&=\nabla_{x_u\frac{du}{dt}+x_v\frac{dv}{dt}}x_u\circ\gamma'\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{du}{dt}\nabla_{x_u}x_u \circ \gamma' + \frac{dv}{dt}\nabla_{x_v}x_u \circ \gamma' \\
&= \frac{dv}{dt}\nabla_{x_v}x_u \circ \gamma' \\
&= \frac{dv}{dt}(\sqrt{G})_u \mathcal{E}_2 \circ \gamma' \\
&= \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 (\sqrt{G})_u \sqrt{G}.
\end{aligned}
$$

用$\sqrt{G}\frac{dv}{dt}$替换 $\sin\phi$，有

$$
\frac{d\phi}{dt} = -(\sqrt{G})_u \frac{dv}{dt},
$$

$$
d\phi = -(\sqrt{G})_u dv.
$$

上述的计算给出了测地线的交角和$\sqrt{G}$(沿径向测地线)的变化率之间的关系．把上述结果应用到由两条径向测地线和一条非径向测地线构成的三角形，得到角剩余定理的另外一种证明(推论 6.5.8)．

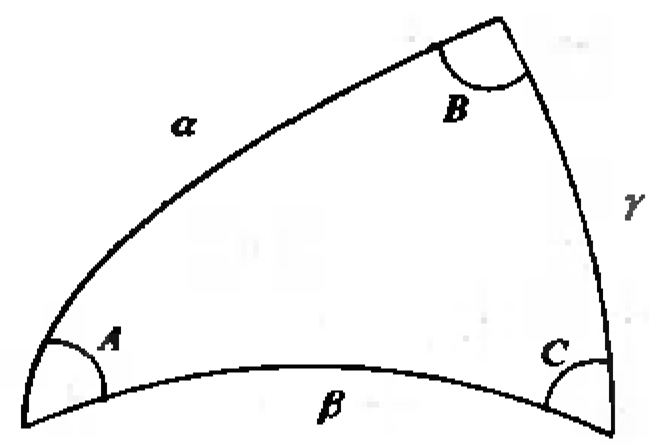


图 6-10　测地三角形

练习 6.8.9(参考[Cox69])　$\alpha(u)=x(u, v_0)$，$\beta(u)=x(u, v_1)$是 M 的两条径向测地线，$\gamma(t)=x(u(t), v(t))$是 M 的单位速度测地线．如图 6-10 所示．证明

$$
\int_\triangle K = A + B + C - \pi.
$$

提示：(1)利用测地极坐标；(2)由全高斯曲率公式开始，并验证下述结果：

$$
\begin{aligned}
\int_\triangle K &= \iint K\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \\
&= \iint K\sqrt{G}\,du\,dv \\
&= \iint_0^u -(\sqrt{G})_{uu}\,du\,dv \\
&= \int (1-(\sqrt{G})_u)\,dv \\
&= \int_{v_0}^{v_1} dv + \int_{\pi-B}^{C} d\phi \\
&= A + B + C - \pi.
\end{aligned}
$$

从一开始，仅在 $p\in M$ 的邻域上建立测地极坐标补片．如果延展坐标补片——即使到它的边界上——也有可能会丢掉了坐标补片的性质．也就是说，可能丢掉了一一的性质，或者存在一点 $x(u_0, v)$使得 $G(u_0, v)=0$．此时就不能保证坐标补片的正则性．我们可以分析这一情况，且由此将再一次看到曲率对于几何性质的重要影响．

设 $x(u, v)$是 M 上极点为 p 的测地极坐标补片．若 $G(u_0, v)=0$ 则称 $\tilde{p}=x(u_0, v)$为沿 v 决

323~324 定的(径向)测地线与 p 共轭. 因为可取任意点 $p\in M$ 的测地极坐标, 所以当需要且仅需要考虑沿任意测地线共轭的点时, 取特定的参数化即可. 下述定理是理解测地线、共轭点和最短弧长之间关系的关键. 证明的第一步和上面练习 6.8.9(也同第 5 章)本质上是一样的. 第二步的证明较有技巧且困难一些, 但从上面的讨论看是合理的. 第三步是第 5 章提到的霍普夫-瑞诺定理. (下面, 若 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 距离总是小于某一固定的极小的数, 则称曲线 β 逼近于 α.)

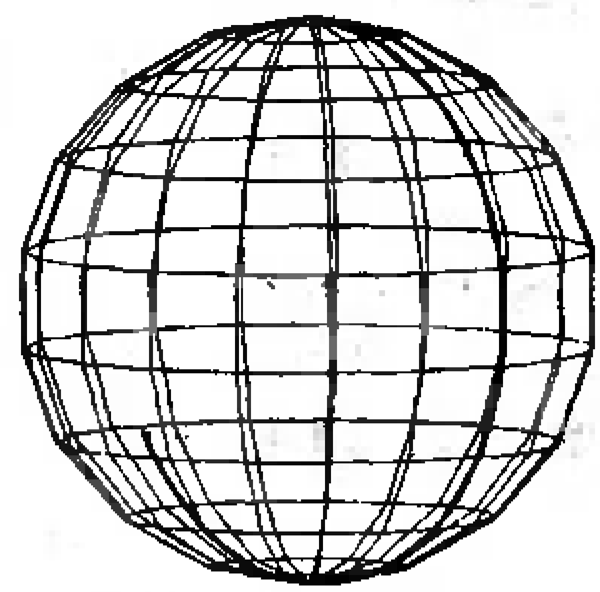
定理 6.8.10 *关于最短距离的结论如下:*

(1) 若 α 是连结 $p\in M$ 和 $q\in M$ 的测地线, 并且在 α 上 p 和 q 之间不存在 p 的共轭点, 则在任意连结 p, q 且逼近 α 的曲线中, α 上 $p>q$ 两点间的弧长最短.

(2) 若 $\bar{p}=\alpha(t_0)$ 是测地线 α 上 $p=\alpha(0)$ 的共轭点, 则对任意的 $t_1>t_0$, α 上连结 p 和 $q=\alpha(t_1)$ 的弧长不是连结 p 和 $q=\alpha(t_1)$ 的曲线(甚至逼近 α)的最短弧长.

(3) 若 M 是测地完备的, 则 M 的任意两点都可由测地线连结, 且此测地线是所有连结两点的曲线中最短的.

例 6.8.11(球面) 转换通常球极参数化中 u, v 的角色, 得到单位球的参数方程 $G=\cos^2 u$. 北极点 $u=\pi/2$ 是一个零点, $u=-\pi/2$ 是另外一个零点, 北极点的共轭点即南极点 S. 显然, 经线是测地线(即 u-参数曲线), 它给出了 N 和 S 之间的最短距离. 但是一旦大圆上经过 S 到达点 q, 则球面另一侧的测地线给出了 N 到 q 的最短距离.


图 6-11 非最小弧长测地线

325 共轭点可以由曲率确定. 练习 6.8.8 证明了在测地线上 $\sqrt{G}$ 满足雅可比微分方程

$$(\sqrt{G})_{uu}+K\sqrt{G}=0,$$

初值条件为: 对任意的 v,

$$\sqrt{G}(0,v)=0,$$
$$(\sqrt{G})_u(0,v)=1.$$

由微分方程理论的唯一性定理, 该方程的解存在且唯一. 因此, 为求测地线上 G 的零点(即 p 的共轭点), 只需得到此微分方程的抽象解, 进而求此解的零点即可. 特别地, 解微分方程(也称为雅可比方程)

$$f''+Kf=0,$$

初值条件为

$$f(0)=0,$$
$$f'(0)=1,$$

其中 f 是函数, 然后求满足 $f(u_0)=0$ 的 u_0.

例 6.8.12(球面) 参数方程如练习 6.8.3(和例 6.8.11)中的单位球面, $K=1$ 且初值条件是 $f(\pi/2)=0$, $f'(\pi/2)=1$. 则 $f''+f=0$ 的通解是 $f(u)=A\cos u+B\sin u$, 再由初值条件得 $B=0$, $A=-1$. 故 $f(u)=-\cos u$ 且 $u=\pi/2$ 之后 f 的另一个零点是 $u_0=-\pi/2$, 也就是南极. 注意过北极 N 的径向测地线是单位速度的, 故它到南极的弧长为

$$L(\alpha)=\left|\int_{\pi/2}^{-\pi/2}|\alpha'|\,\mathrm{d}t\right|$$
$$=\left|\int_{\pi/2}^{-\pi/2}1\mathrm{d}t\right|$$
$$=\pi.$$

练习 6.8.13 考虑下述关于雅可比方程的问题.

1)对平面而言，何时何地测地线给出最短弧长？解 $K=0$ 的雅可比方程，求出共轭点.

2)对双曲平面而言，何时何地测地线给出最短弧长？解 $K=-1$ 的雅可比方程，求出共轭点. 326

3)前两种情况归纳如下：如果曲面 M 满足 $K\leqslant 0$，则在任意测地线上都不存在共轭点. 因此，每条测地线都是给出最短弧长的曲线. 提示：利用初值条件 $f(0)=0$，$f'(0)=1$ 和由雅可比方程得到的 $f'(u)\geqslant 1$，证明 $f(u)\geqslant u$. 因此 $f(u)\neq 0$，故不存在共轭点.

最后给出本节的主要结果. 为了证明这一结论，需要微分方程中的一个比较结果. (同时，同上面球面的例子一样，因为测地线是单位速度的，所以测地线的参数 u 恰好是它的弧长参数.)

定理 6.8.14(施图姆-刘维尔) *$y''(t)+g(t)y(t)=0$ 是初值条件为 $y(0)=0$，$y'(0)\neq 0$ 的二阶线性微分方程. 若对任意的 t，$a^2\leqslant g(t)\leqslant b^2$，且 $t_0>0$ 是 $y(t)=0$ 的第一个正解，则*

$$\frac{\pi}{b}\leqslant t_0\leqslant\frac{\pi}{a}.$$

如果高斯曲率为正且有非零的界，我们可以对雅可比方程应用斯图谟-刘维尔比较定理. (为保证测地线的定义域，需要用到第 5 章中涉及的“完备”的概念.)

引理 6.8.15 *假设 M 是完备的，且 $K\geqslant a^2>0$，则任意测地线 α: $[0,\infty)\to M$ 在区间 $(0,\pi/a)$ 中有共轭点.*

证明 因为雅可比方程 $f''+Kf=0$ 满足斯图谟-刘维尔比较定理，所以第一个共轭点(f 的零点)$u_0\leqslant\pi/a$. ■

通过考虑曲率条件 $K\geqslant a^2>0$ 下 M 本身的大小，可以这个将局部的结论整体化. 由上面的定理 6.8.10 知，如果 M 完备，则过任意两点 p，$q\in M$，存在一条测地线，且这条测地线给出这两点间的最短弧长. 因此可以定义 M 的*直径*，它是连结 M 上任意两点的给出最短弧长的测地线的长度的最大值. 实际上，因为无法取得最大值，所以必须取这些长度的上确界. 形式上，定义 p 和 q 的距离 $d(p,q)$，即是连结 p 和 q 的最短测地线的弧长. 则

$$\mathrm{Diam}(M)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sup\{d(p,q)\mid p\text{ 和 }q\in M\}.$$

注意如果 $M\subseteq\mathbb{R}^3$ 的直径是有限长，那么 M 有界. 而$\mathbb{R}^3$ 的闭有界子集是紧致集. 当然，紧致集是一个更一般的概念，但是如果读者不是很熟悉，可以只考虑$\mathbb{R}^3$ 的情形. 由引理 6.8.15，得到以下定理. 327

定理 6.8.16(博内) *M 完备且 $K\geqslant a^2>0$，则 $\mathrm{Diam}(M)\leqslant\pi/a$. 因此 M 紧.*

证明 取任意的点 p，$q\in M$，因为 M 完备，所以存在连结这两点的最短弧长测地线. 由

引理 6.8.15，第一个共轭点 $u_0 \leqslant \pi/a$. 因为测地线最短，而在第一个共轭点之后不是最短，所以测地线弧长 $\leqslant \pi/a$. 由 p, $q \in M$ 的任意性，$\mathrm{Diam}(M) \leqslant \pi/a$. 因此 M 有界. 又因 M 完备，所以 M 紧. ■

这里再次显示了高斯曲率的重要作用. 第 3 章给出了紧的局部结论，即曲面上至少存在一个曲率为正的点. 如果曲面上任意点的曲率都是正值(有界但不是零)，则曲面是紧的. 下面练习指出了假设和结论的局限性.

练习 6.8.17 双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 和抛物面 $z=x^2+y^2$ 的高斯曲率都非负，且因为它们是$\mathbb{R}^3$ 中闭集，所以完备. 但它们无界，所以不是紧的. 问题出在哪里呢?

练习 6.8.18 博内定理的逆命题是否正确? 即若 M 紧(即$\mathbb{R}^3$ 中的闭有界集)且 $\mathrm{Diam}(M) \leqslant \pi/a$，则 $K \geqslant a^2 > 0$? 提示：估计环的直径，再比较高斯曲率.

练习 6.8.19 在例 6.8.12 和练习 6.8.13 中，分别解了 $K=1$, $K=0$, $K=-1$ 时的雅可比方程 $f''+Kf=0$. 利用它们的解说明测地线怎样从同一点开始，然后汇聚或发散. 为此，注意对于特定的测地极坐标补片，(由解的唯一性)解必为$\sqrt{G}$. 而且$\sqrt{G}=|x_v|$给出了径向测地线在 v 方向的瞬时变化率. 第 5 章将测地线看成是无外力作用下粒子的运动轨迹. 特别地，上面的解释说明在负高斯曲率的曲面上，粒子的平衡位置表现了指数的不稳定性(见[Arn78, Appendix 1 IJK]).

6.9 Maple 和完整性

平行以及由它衍生的完整性是很难理解的概念. 从 3 维空间来看，沿曲线平行的向量看起来怎么都不平行，那么怎样才能够简单合理地理解平行和完整性呢? 利用定理 6.3.5 可以将完
328 整性从简单易懂转化到复杂(且不直观). 以这种方法来看，完整性就是把简单的局部的几何性质拼成一个整体的结构的自然反映，从而也就变得复杂了.

首先来看 Maple 怎样表示球面的完整性. 想法如下：固定球上的一个切向量以及该点的标架 E_1, E_2. 通过定义的环并取 $ek := subs(\{u=2*Pi*i/n, v=v0\}, Ek)$建立沿纬度圆均匀间隔的标架. 标架向量乘以系数，即完整性 $-2\pi\sin(v_0)$实现标架的旋转(为了得更小的向量，再乘以3/4). 用“arrow”命令表示一个切向量，这个切向量从纬度圆上开始，沿旋转向量的方向移动. 最后利用“display”命令同时绘制这些向量以及球面. 程序需要输入纬度 v_0、向量的总数 n 以及定向角.

```
> with(plots):with(LinearAlgebra):
> holosph:=proc(v0,n,ori1,ori2)
local sph,E1,E2,e1,e2,lat,holovec,i,vec,vecc,sphere,VV;
sph:=<cos(u)*cos(v)|sin(u)*cos(v)|sin(v)>;
E1:=map(diff,sph,u)/VectorNorm(map(diff,sph,u),Euclidean,
conjugate=false);
E2:=map(diff,sph,v);
lat:=subs(v=v0,sph);
holovec:=<0|1|0>;
for i from 0 to n do
e1:=subs({u=2*Pi*i/n,v=v0},E1);
```

```
e2:=subs({u=2*Pi*i/n,v=v0},E2);
vec[i]:=arrow(subs(u=2*Pi*i/n,lat),ScalarMultiply(e1,
3*cos(-2*Pi*i/n*sin(v0))/4)+ScalarMultiply(e2,
3*sin(-2*Pi*i/n*sin(v0))/4),color=blue,width=[0.04],
head_length=[0.2]);
od;
vecc:=convert(vec,set):
sphere:=plot3d(sph,u=0..2*Pi,v=-Pi/2..Pi/2,shading=XY,
grid=[25,25]):
VV:= vecc union {sphere}:
display(VV,scaling=constrained,orientation=[ori1,ori2]);
end:
```

下面两条命令得到图 6-3. 唯一不同的是观察方向.

```
> holosph(Pi/6,15,0,-21);
> holosph(Pi/6,15,82,28);
```

根据练习 6.3.12 和练习 6.3.13，对于球面上特定的纬度圆，可以得到一个圆锥，使得它在这个平行圆上和球面在这个纬度圆上有相同的完整性. 看 Maple 如何得到这样的圆锥. 首先定义一些记号. 329

```
> sinphi:=1/sqrt(1+a^2);
cosphi:=simplify(sqrt(1-sinphi^2),symbolic);
```

$$sinphi := \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$cosphi := \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

圆锥的参数方程如练习 6.3.12.

```
> cone_a:=<u*sinphi*cos(v/sinphi)|u*sinphi*sin(v/sinphi)|
u*cosphi>;
```

$$cone_a := \left[\frac{u\cos(v\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{u\sin(v\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{ua}{\sqrt{1+a^2}}\right]$$

“EFG”度量程序验证度量不依赖 a 的选择，“UN”程序求单位法向量.

```
> EFG(cone_a);
```

$$[1,0,u^2]$$

```
> U:=UN(cone_a);
```

$$U := \left[-\frac{a\cos(v\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}}, -\frac{a\sin(v\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right]$$

若取经过圆锥平行圆上一点的一条直线，使得它的方向恰好是此点单位法向量的方向，则这条直线必经过球心. 直线的参数方程是 $\text{cone}_a(u_0, v_0)+tU(u_0, v_0)$. 因为球心在 z 轴上，所以我们可以找到适当的 T，使得上式成立. 利用 Maple 的“solve”命令求 x 坐标为 0 的点.

```
> T:=solve(cone_a[1]+t*U[1]=0,t);
```

$$T := \frac{u}{a}$$

将 T 的值带入直线方程的第三个坐标中，求出球面的球心.

```
> z_coord:=simplify(cone_a[3]+T*U[3]);
```

330 $$z_coord := \frac{u\sqrt{1+a^2}}{a}$$

显然这就是 $u/\cos\phi$. 而球面的半径就是圆锥平行圆上的点到中心的欧氏距离.

```
> rad:=simplify(VectorNorm(cone_a-<0|0|u*sqrt(1+a^2)/a>,
Euclidean,conjugate=false),symbolic);
```

$$rad := \frac{u}{a}$$

当然这就是 $u\sin\phi/\cos\phi$. 下面程序绘制了圆锥和球面，如图 6-4 所示.

```
> coneplot:=plot3d(eval(cone_a,a=1),u=0..2,
v=0..2*Pi*eval(sinphi,a=1),grid=[5,25],shading=zhne):
> sphereplot:=plot3d(<eval(rad,{a=1,u=2})*cos(u)*cos(v)|
eval(rad,{a=1,u=2})*sin(u)*cos(v)|eval(rad,{a=1,u=2})*sin(v)+
eval(z_coord,{a=1,u=2})>,u=0..2*Pi,v=-Pi/2..Pi/2,style=patch,
shading=XY):
> display({coneplot,sphereplot},scaling=constrained,
orientation=[0,90],lightmodel=light3);
```

下面考虑本节的主要问题，即用 Maple 理解完整性. 已经知道，沿球面的纬度圆的完整性等同于某个适当的圆锥的平行圆的完整性. 因此如果理解了圆锥的完整性，那么原则上也就理解了球面的完整性. 定理 6.3.5 证明等距保持完整性不变. 而且练习 5.5.5 表明圆锥可以等距地展为平面上的扇形. 因此，平面上的平行向量必然由圆锥展开过程中的平行切向量变化而来. Maple 极好地演示了这些切向量的演变过程.

```
> with(plots):with(LinearAlgebra):
```

首先证明对于任意的 t，展开映射都是等距. 即验证度量系数不变.

```
> EFG(<u/sqrt(1+t*a^2)*cos(v*sqrt(1+t*a^2))|
u/sqrt(1+t*a^2)*sin(v*sqrt(1+t*a^2))|
a*u/sqrt(1+t*a^2)*sqrt(t)>);
```

$$[1,0,u^2]$$

下面程序等距地展开圆锥，且此圆锥带有沿边界曲线的切向量. 输入变量：展开的阶段 t、圆锥参数 a、切向量的个数 n、初始向量坐标 $v1$，$v2$ 以及定向角. 想法如下：输入切向量，因

331 为 x_u，x_v(沿边界曲线)是切平面的基，所以切向量是 x_u 和 x_v 的线性组合. 故

$$\text{holovec} = Ax_u + Bx_v,$$

系数 A，B 是

$$A = \frac{x_u \cdot \text{holovec}}{x_u \cdot x_u}, \quad B = \frac{x_v \cdot \text{holovec}}{x_v \cdot x_v}.$$

事实上，可以取一系列平行于初始向量的向量，然后求出相对于 x_u，x_v 的系数. 而等距保持长度和角度，又因为每一个阶段的参数切向量(表示为 xut，xvt)由最初的 x_u，x_v(表示为 $xu0$，$xv0$)生成，所以系数 A，B 都保持不变. 因此，可以用它们和 xut，xvt 来建立生成的切向量. 因为等距保持完整性，所以生成的向量的作用与初始向量一样. 下面的程序绘制了生成的锥面和切向量.

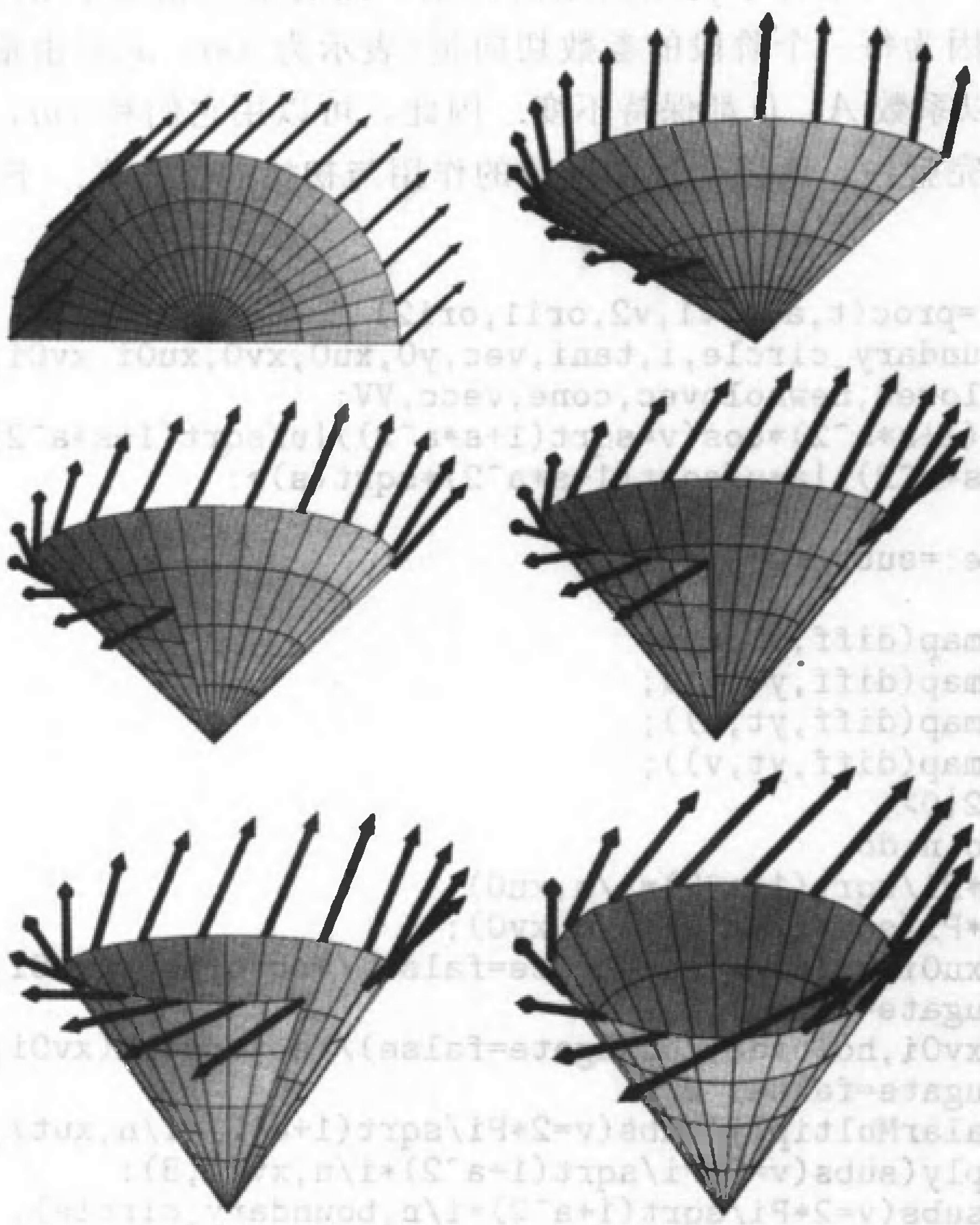
```
> holounroll:=proc(t,a,n,v1,v2,ori1,ori2)
local ys,yt,boundary_circle,i,tani,vec,y0,xu0,xv0,xu0i,xv0i,
xut,xvt,A,B,holovec,newholovec,cone,vecc,VV;
ys:=s-><u/sqrt(1+s*a^2)*cos(v*sqrt(1+s*a^2))|u/sqrt(1+s*a^2)
*sin(v*sqrt(1+s*a^2))|a*u/sqrt(1+s*a^2)*sqrt(s)>:
yt:=ys(t);
boundary_circle:=subs({u=3},yt):
y0:=ys(0):
xu0:=subs(u=3,map(diff,y0,u));
xv0:=subs(u=3,map(diff,y0,v));
xut:=subs(u=3,map(diff,yt,u));
xvt:=subs(u=3,map(diff,yt,v));
holovec:=<v1|v2|0>;
for i from 0 to n do
xu0i:=subs(v=2*Pi/sqrt(1+a^2)*i/n,xu0);
xv0i:=subs(v=2*Pi/sqrt(1+a^2)*i/n,xv0);
A:=DotProduct(xu0i,holovec,conjugate=false)/VectorNorm(xu0i,
Euclidean,conjugate=false)^2;
B:=DotProduct(xv0i,holovec,conjugate=false)/VectorNorm(xv0i,
Euclidean,conjugate=false)^2;
newholovec:=ScalarMultiply(subs(v=2*Pi/sqrt(1+a^2)*i/n,xut),
A)+ScalarMultiply(subs(v=2*Pi/sqrt(1+a^2)*i/n,xvt),B);
vec[i]:=arrow(subs(v=2*Pi/sqrt(1+a^2)*i/n,boundary_circle),
newholovec,color=blue,width=[0.08], head_length=[0.2]);
od:
vecc:=convert(vec,set):
cone:=plot3d(yt,u=0..3,v=0..2*Pi/sqrt(1+a^2),shading=XY,
grid=[5,25]):
VV:=vecc union {cone}:
display(VV,scaling=constrained,orientation=[ori1,ori2]);
end:
```

以下命令的运行结果如图 6-12 所示. 过程从左往右，然后从上往下. 332

```
> holounroll(0,sqrt(3),15,1,1,-89,0);
> holounroll(.2,sqrt(3),15,1,1,-118,70);
> holounroll(.4,sqrt(3),15,1,1,-80,73);
> holounroll(.6,sqrt(3),15,1,1,-56,76);
> holounroll(.8,sqrt(3),15,1,1,-56,78);
> holounroll(1,sqrt(3),15,1,1,-4,62);
```

下面程序以动画形式演示了平行向量的展开过程.

```
> display(seq(holounroll(i/20,sqrt(3),15,1,1,-15,50),
i=0..20),insequence=true);
```



333 图 6-12 平行向量的展开

由图 6-12 知，切向量旋转了 π. 这是为什么呢？由练习 6.3.12 知沿圆锥的边界曲线的完整性等于 $2\pi\sin\phi$，其中 $\sin\phi=1/\sqrt{1+a^2}$. 上述命令中取 $a=\sqrt{3}$，故 $\sin\phi=1/2$. 即 $\phi=\pi/6$，则完整性恰好就是 π. 即上面圆锥的边界曲线恰好是球面上一$\pi/6$ 的纬线圆.

练习 6.9.1 考虑图 6-12 中扇形的边界. 证明完整性等于 $2\pi\sin\phi$. 提示：比较切向量与
334 u-参数曲线(子午线)的夹角.

第 7 章　变分法和几何

7.1　欧拉-拉格朗日方程

在以前的章节中，我们看到了一些使得某些量趋向于极小化的几何量．例如，测地线试图给出最短弧长，面极小曲面(包括其物理模型肥皂泡)是试图给出具有最小面积的曲面．当然我们也看到有的测地线不是最短弧长的曲线，极小曲面也不一定是具有最小面积的曲面．本章中我们利用变分法研究这些现象．变分法的原则体现了几何的(和物理的)极小化的趋向．介绍这一方法的书有[Sag92，Wei74，Pin93]等等．因为变分法的基本技巧是很流行的，所以我们将研究这些被变分学家称为朴素的理论．无论如何，我们将看到变分原理和方法跟几何性质的密切关系．

以下是变分法常用的结构：设 $x=x(t)$ 表示 t 的函数且有固定端点 $x(t_0)=x_0$，$x(t_1)=x_1$．如图 7-1 所示．由此我们通常把 $x(t)$ 看成是连结端点的曲线．实际上，因为函数 x 可以是 n 维空间的曲线，所以要注意这个可能性．特别地，我们可以认为曲线 $\mathbf{x}(t)=(x^1(t), \cdots, x^n(t))$ 是粒子相对于时间 t 的轨迹，这是力学的观点．需要立刻指出一个可能出现的混淆．上面使用的是标准的力学记号 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)=(x^1(t), \cdots, x^n(t))$，而当处理几何问题时，我们大部人更习惯于使用坐标．即我们以 x 表示独立的变量，以 $y=y(x)$ 表示问题中的函数．这样就不会出现符号的混淆．



图 7-1　固定端点曲线

连结给定端点有很多可选择的曲线．若我们加上某些约束条件，就可以从中选出特殊的 $x(t)$．例如，有以下定义．

定义 7.1.1(固定端点问题)　*求满足 $x(t_0)=x_0$，$x(t_1)=x_1$ 的曲线 $x=x(t)$，且使得下列积分取得最小值：*

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t,$$

其中 $f(t, x, \dot{x})$ 是 t，x 和 $\dot{x}=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 的函数，且后两个是线性无关的变量．

例 7.1.2　$T=1/2m\dot{x}^2$ 表示粒子沿 x 轴运动的动能．因为势能依赖于粒子相对于具体点 x_0 的距离，所以可记 $V=V(|x-x_0|)$．以后我们将看到，由哈密顿原理，粒子 $x=x(t)$ 的运动轨迹是使得积分

$$J=\int(T-V)\mathrm{d}t=\int 1/2m\dot{x}^2-V(|x-x_0|)\mathrm{d}t$$

取得极小值的曲线．(实际上，下面我们会看到，这并不十分准确．哈密顿原理只要求这个积

分取得极值.)因为这个例子很重要，所以在一般情形下也沿用传统的$\dot{x}$记号表示微分.

例 7.1.3　前面我们利用直线获得平面上两点间的最短距离. 若采用 x，y 坐标，确定最短长度的曲线问题简单来说就是

$$\text{Minimize}\int\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x, y, y')=\sqrt{1+y'^2}$. 注意这里使用的是微分的通常记号.

为研究固定端点问题，首先要认识到，正如普通微积分一样，我们找到的是局部极小而不

335～336 是整体极小. 就像通常那样，为了认识极小曲线 $x(t)$，取 J 相对于 ϵ 的导数，同时注意，因为根据假设 $x(t)$是极小的，所以 $\epsilon=0$ 时该导数为零. 关键是由下面的结论我们可以在积分符号内取导数.

引理 7.1.4　*若 $f(\epsilon, y)$和$\partial f(\epsilon, y)/\partial\epsilon$ 是连续函数，则*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int_a^b f(\epsilon,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{\partial f(\epsilon,y)}{\partial\epsilon}\mathrm{d}y.$$

证明　令$h(z)=\int_a^b f_z(z,y)\mathrm{d}y$. 我们需要证明这个积分关于$\epsilon$的导数就是$h(\epsilon)$. 因为在二重积分中可以改变积分的顺序(即富比尼定理)，所以得到

$$\begin{aligned}\int_c^\epsilon h(z)\mathrm{d}z&=\int_c^\epsilon\int_a^b f_z(z,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_a^b\int_c^\epsilon f_z(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\&=\int_a^b f(\epsilon,y)\mathrm{d}y-\int_a^b f(c,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因为第二项不依赖于 ϵ，所以由微积分基本定理得

$$\begin{aligned}h(\epsilon)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int_c^\epsilon h(z)\mathrm{d}z\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int_a^b f(\epsilon,y)\mathrm{d}y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int_a^b f(c,y)\mathrm{d}y\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int_a^b f(\epsilon,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

这正是我们想要的结论. ■

利用这一引理，我们分析刚刚提及的问题. 假设 $x(t)$是使得积分 $J=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))\mathrm{d}t$ 取到极小值的曲线. 令 $x^*(t)=x(t)+\epsilon\eta(t)$是 x 的变分. 也就是说，认为 ϵ 逐渐变小且 $\eta(t_0)=0$，$\eta(t_1)=0$. 因此曲线 $x^*(t)$依然连结 x_0，x_1，而且趋近 x. 注意$\dot{x}^*=\dot{x}+\epsilon\dot{\eta}$，可以把积分 J 看成是参数ϵ 的函数

$$J(\epsilon)=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x^*,\dot{x}^*)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x+\epsilon\eta,\dot{x}+\epsilon\dot{\eta})\mathrm{d}t.$$

为确定最小的 $x(t)$，取 J 对ϵ 的导数. 因为由链式法则，

337 $$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\epsilon}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^*}\frac{\partial x^*}{\partial\epsilon}+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}^*}\frac{\partial\dot{x}^*}{\partial\epsilon}\right)\mathrm{d}t,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^*}\eta+\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^*}\dot{\eta}\right)\mathrm{d}t.$$

又因为在 $\varepsilon=0$ 处，$x^*(t)=x(t)$，所以有

$$0=\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\eta+\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right)\mathrm{d}t.$$

对上面积分的第二项使用分部积分．设

$$u=\frac{\partial f}{\partial \dot{x}},\quad \mathrm{d}v=\dot{\eta}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\mathrm{d}t,\quad v=\eta.$$

计算得

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\mathrm{d}t=\Big|_{t_0}^{t_1}\eta\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}-\int_{t_0}^{t_1}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\mathrm{d}t.$$

最后一个等号成立是因为 $\eta(t_0)=0=\eta(t_1)$，所以第一项为零．代入上面的方程有

$$0=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial f}{\partial x}\eta\mathrm{d}t-\int_{t_0}^{t_1}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\eta\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

此方程对每一个满足 $\eta(t_0)=0=\eta(t_1)$的函数 η 都成立．这说明什么问题呢？下面的练习提供了一个解答．

练习 7.1.5 假设连续函数 $y=f(x)$在点 x_0 为正，证明可以找到函数 $\eta(x)$使在某区间$[a,b]$的积分

$$\int_a^b\eta(x)f(x)\mathrm{d}x>0.$$

提示：(1)画出 $f(x)$在 x_0 点附近的图，对于 x_0 附近的点 x，说明 $f(x)$的情况；(2)作一个保证上面积分为正的“凸”函数 $\eta(x)$，方法是画出在相同坐标系下它与$f(x)$在 x_0 点附近的图；(3)回忆正被积函数的积分为正． 338

这个练习告诉我们只有一种可能使得方程($*$)对任意的 η 成立，即必须

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)=0.$$

这个方程称为欧拉-拉格朗日方程，它给出了 $x(t)$为极小曲线的必要条件．

定理 7.1.6 *若 $x=x(t)$是固定端点问题的极小曲线，则 x 满足欧拉-拉格朗日方程．*

注意这并不是说欧拉-拉格朗日方程的解就是固定端点问题的解．欧拉-拉格朗日方程是解决固定端点问题的第一步，类似于找微积分中的临界点．然而，因为固定端点问题的可能的解

集大得让我们无法想象．所以欧拉-拉格朗日方程是一个必不可少的有利工具．实际上，某些时候欧拉-拉格朗日方程的解加上很少的条件或者不需要其他的信息，就得到固定端点问题的解．因此欧拉-拉格朗日方程的解有一个特别的名字——极值曲线．例如固定端点问题的解曲线 $x(t)$ 通常被描述为连结固定端点使得积分 J 取得极值的曲线．此时欧拉-拉格朗日方程的解就是所求的曲线．

练习 7.1.7 假设 J 依赖于两个函数 $x(t)$ 和 $y(t)$，即

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))\mathrm{d}t.$$

证明由变分 $x^*=x+\epsilon\eta$，$y^*=y+\epsilon\tau$ 可得

$$\begin{aligned}0&=\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\epsilon}+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\epsilon}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\epsilon}+\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\epsilon}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\eta+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\dot{\eta}+\frac{\partial f}{\partial y}\tau+\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\dot{\tau}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\eta\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_1}\tau\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\right)\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

而且对任意的 η，τ 方程都成立当且仅当下面的欧拉-拉格朗日方程成立：

339

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)=0,\quad\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\right)=0.$$

练习 7.1.8 假设 J 依赖于自变量 t，s，令

$$J=\iint_{\mathcal{R}} f(t,s,x(t,s),x_t(t,s),x_s(t,s))\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

证明由满足 $\eta|_C=0$ 的变分 $x^*(t,s)=x(t,s)+\epsilon\eta(t,s)$ 可得

$$0=\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\iint\left(\frac{\partial f}{\partial x}\eta+\frac{\partial f}{\partial x_t}\eta_t+\frac{\partial f}{\partial x_s}\eta_s\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s,$$

其中 C 是积分区域 $\mathcal{R}$ 的边界．进而回忆格林定理，$\int -P\mathrm{d}t+Q\mathrm{d}s=\iint\partial Q/\partial t+\partial P/\partial s\mathrm{d}t\mathrm{d}s$，令 $Q=\eta(\partial f/\partial x_t)$，$P=\eta(\partial f/\partial x_s)$，利用 $\eta|_C=0$，计算积分的后两项，得

$$\iint\left(\frac{\partial f}{\partial x_t}\eta_t+\frac{\partial f}{\partial x_s}\eta_s\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s=-\iint\eta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_t\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial s}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

代入原始的积分，有

$$0=\iint_{\mathcal{R}}\eta\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_t\partial t}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial s}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

最后，论证由此可得两个独立变量的欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_t}\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right)=0.$$

练习 7.1.9 假设 $f(t,x,\dot{x})=f(x,\dot{x})$ 与 t 无关，故有 $\partial f/\partial t=0$．证明非常数的 $x(t)$ 满足欧

拉-拉格朗日方程当且仅当

$$f-\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}=c,$$

其中 c 为常数. 提示：左边求关于 t 的导数，不要忘记利用链式法则.

练习 7.1.10 假设 $f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})=f(x, y, \dot{x}, \dot{y})$与 t 无关，故有$\partial f/\partial t=0$. 证明非常数的 $x(t)$，$y(t)$满足欧拉-拉格朗日方程当且仅当

$$f-\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}-\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=c,$$

其中 c 是常数. 提示：左边求关于 t 的导数，不要忘记利用链式法则.

练习 7.1.11 证明若$\partial f/\partial x=0$，则 $x(t)$满足欧拉-拉格朗日方程当且仅当$\partial f/\partial \dot{x}=c$，其中 c 为常数. 340

练习 7.1.12 证明积分

$$\int f(t,x,\dot{x})\mathrm{d}t \quad 和 \quad \int f(t,x,\dot{x})+\frac{\mathrm{d}g(t,x)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

的欧拉-拉格朗日方程相同. 特别地，当 $g(t, x)=ct$ 时，其中 c 是常数，$\int f\mathrm{d}t$ 和$\int (f+c)\mathrm{d}t$ 的欧拉-拉格朗日方程相同. 在讨论雅可比定理 7.7.6 时要用到这一事实.

练习 7.1.13 求固定端点问题

$$J=\int_0^{\pi}\left(x\sin t+\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)\mathrm{d}t$$

的极值曲线 $x(t)$，其中 $x(0)=0$，$x(\pi)=\pi$.

练习 7.1.14 求固定端点问题

$$J=\int_0^1(\dot{x}x^2+\dot{x}^2x)\mathrm{d}t$$

的极值曲线 $x(t)$，其中 $x(0)=1$，$x(1)=4$.

练习 7.1.15 求固定端点问题

$$J=\int_0^{\pi/2}(\dot{x}^2-x^2)\mathrm{d}t$$

的极值曲线 $x(t)$，其中 $x(0)=0$，$x(\pi/2)=1$.

练习 7.1.16 下面有一类问题，求出的极值曲线是极小化曲线(同时给出计算 J 值的简单方法). 考虑满足 $x(t_0)=x_0$，$x(t_1)=x_1$ 的固定端点问题

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(p^2\dot{x}^2+q^2x^2)\mathrm{d}t$$

的极小值曲线，其中 $p=p(t)$，$q=q(t)$是任意光滑函数.

(1)证明若 $x=x(t)$是 J 的极值曲线，则 $J=p^2x\dot{x}\Big|_{t_0}^{t_1}=p^2x\dot{x}(t_1)-p^2x\dot{x}(t_0)$，因此可以求出极值曲线的 J 值.

(2)证明若 $x=x(t)$是 J 的极值曲线，且 $\eta=\eta(t)$满足 $\eta(t_0)=0=\eta(t_1)$，则

$$\widetilde{J}=\int_{t_0}^{t_1}(p^2\dot{x}\dot{\eta}+q^2x\eta)\mathrm{d}t=0.$$

(3)由(1)、(2)证明 J 的极值曲线 $x(t)$ 是固定端点问题的解，即 $x(t)$ 是 J 取到极小值的
341 曲线.

提示：对(1)利用乘积法则，求 $xp^2\dot{x}$ 关于 t 的微分，记住 x 是极值曲线；对(2)分部积分 $\int p^2\dot{x}\dot{\eta}\mathrm{d}t$，记住 x 是极值曲线或复习欧拉-拉格朗日方程的导数．对(3)将 x 变成 $x+\eta$(这里通常的 ϵ 包含在 η 中)，展开 $\hat{J}$ 的被积函数，注意 $\hat{J}=J+T$．T 又是怎样的呢？

$$\hat{J}=\int_{t_0}^{t_1}(p^2(\dot{x}+\dot{\eta})^2+q^2(x+\eta)^2)\mathrm{d}t.$$

练习 7.1.17 在固定端点问题中，假设时间 t_1 固定，(t_0 和 $x(t_0)$ 也是一样)，而终点位置 $x(t_1)$ 不定．由欧拉-拉格朗日方程的导数，证明它不仅仅满足欧拉-拉格朗日方程，而且满足

$$\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}(t_1)=0.$$

提示：分部积分后，除了第一项不为零以外，所有的项都不变．论证欧拉-拉格朗日方程成立是因为最终的极值曲线可以看作是固定端点问题的极值曲线，使得极值曲线在 $t=t_1$ 时恰好是 $x(t_1)$.

注记 7.1.18 前面的练习暗示我们不是所有的变分问题都是固定端点的．实际上，很多时候最终的时间 t_1 和状态 $x(t_1)$ 都是不确定的．同这一练习一样，此时欧拉-拉格朗日方程依然成立，同时满足一个附加条件(有时被称为横截性条件)．而这就是下一节要研究的对象.

7.2 横截性和自然边界条件

很多变分法问题不能用固定端点问题的方法解决，简单归纳如下.

定义 7.2.1(端点曲线问题) *求曲线 $x=x(t)$，使得 $x(t_0)=x_0$，$x(t_1)$ 位于曲线 α 上，且下面的积分取得极小值：*

$$J=\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t))\mathrm{d}t.$$

这是 t_1 不确定的情形.

342 实际上，上述定义中的情形如此频繁出现，使得我们给它特定的定义和名字.

定义 7.2.2(不定时间问题) *求满足 $x(t_0)=x_0$，$x(t_1)=x_1$ 的曲线 $x=x(t)$，使得下面的积分取得极小值：*

$$J=\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),\dot{x}(t))\mathrm{d}t.$$

其中 t_1 不确定.

我们考虑端点曲线问题，并取特殊情形回答定义 7.2.2 中的问题．和以往一样，设 $x(t)$ 表示问题的解，$x^*(t)=x(t)+\epsilon\eta(t)$ 是 $x(t)$ 的变分．现在只要求 η 满足 $\eta(t_0)=0$，因此 $x^*(t_0)=x_0$．当然隐含了 $x^*(t_1^*)$ 位于曲线 α 上，其中 $t_1^*=t_1+\epsilon\xi(t_1)$，这是因为(它是解 $x(t)$ 的终点时间)t_1 可以改变．为了求

$$J=\int_{t_0}^{t_1+\xi\varepsilon} f(t,x,\dot{x})\mathrm{d}t$$

的微分．我们必须知道怎样计算积分的上下限微分．以下是引理 7.1.4 的另一种陈述．

引理 7.2.3 若 $f(\varepsilon, y)$和$\partial f(\varepsilon, y)/\partial\varepsilon$ 连续，$g(\varepsilon)$可微，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_a^{g(\varepsilon)} f(\varepsilon,y)\mathrm{d}y=g'(\varepsilon)f(\varepsilon,g(\varepsilon))+\int_a^{g(\varepsilon)}\frac{\partial f(\varepsilon,y)}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}y.$$

证明 设 $h(\varepsilon,w)=\int_a^w f(\varepsilon,y)\mathrm{d}y$ 是 ε，w 的函数．根据引理 7.1.4 和微积分基本定理，h 的偏导数为

$$h_\varepsilon=\int_a^w f_\varepsilon(\varepsilon,y)\mathrm{d}y,\quad h_w=f(\varepsilon,w).$$

由链式法则，h 对 ε 的全微分为

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varepsilon}=h_\varepsilon+h_w\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varepsilon}.$$

因为 $w=g(\varepsilon)$，所以 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}\varepsilon=g'(\varepsilon)$．作代换 $w=g(\varepsilon)$，就得到想要的结论． ■

一旦我们知道怎样微分上限为 ε 的函数的积分，就可以修正之前的欧拉-拉格朗日方程的微分．因为 $\varepsilon=0$，$x^*(t)=x(t)$，所以 343

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}&=\int_{t_0}^{t_1^*}\frac{\partial f}{\partial x^*}\frac{\partial x^*}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}^*}\frac{\partial\dot{x}^*}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}t_1^*}{\mathrm{d}\varepsilon}f(t_1^*)\\&=\int_{t_0}^{t_1^*}\frac{\partial f}{\partial x^*}\eta+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}^*}\dot{\eta}\mathrm{d}t+\xi f(t_1^*),\end{aligned}$$

其中

$$0=\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial f}{\partial x}\eta+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\dot{\eta}\mathrm{d}t+\xi f(t_1).$$

因为 $\eta(t_0)=0$，所以积分里的第二项通过分部积分计算可得

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\dot{\eta}\mathrm{d}t&=\left.\eta\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)\mathrm{d}t\\&=\eta(t_1)\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

代入上面的积分，有

$$\begin{aligned}0&=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial f}{\partial x}\eta-\int_{t_0}^{t_1}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)\mathrm{d}t+\eta(t_1)\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}(t_1)+\xi f(t_1)\\&=\int_{t_0}^{t_1}\eta\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t+\eta(t_1)\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}(t_1)+\xi f(t_1).\end{aligned}$$

若 $x(t)$是满足终点在曲线 α 上使得 J 取极值的广义问题的解，则 $x(t)$也是终点为 $x(t_1)$的固定

端点问题的解．因此 $x(t)$ 自然满足欧拉-拉格朗日方程．上面方程的第一项为零，且有

$$\eta(t_1)\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)+\xi f(t_1)=0.$$

利用对任意 $t_1^*=t_1+\epsilon\xi$，$x^*(t_1^*)$ 在曲线 α 上理解 η 和 ξ 之间的关系．

记 α 为水平集合 $g(t, x)=c$ 确定的曲线．两边同时对 ϵ 微分

$$\begin{aligned}0&=\frac{\mathrm{d}g(t_1^*, x^*)}{\mathrm{d}\epsilon}\\&=g_t\xi+g_x\cdot(\dot{x}\xi+\eta+\epsilon\dot{\eta}\xi))\\&=g_t\xi+g_x(\dot{x}\xi+\eta(t_1)),\end{aligned}$$

344 其中最后一行是在 $\epsilon=0$ 的取值．解 $\eta(t_1)$ 并代入上面的方程，得到

$$\eta(t_1)\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)+\xi f(t_1)=0$$

$$\left(\frac{-g_t-g_x\dot{x}}{g_x}\right)\xi\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)+\xi f(t_1)=0$$

$$\xi\left(f(t_1)-\left(\frac{g_t+g_x\dot{x}}{g_x}\right)\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)\right)=0.$$

因为 ξ 非零，所以括号里的项为零．由这个简化的条件可得以下定理．

定理 7.2.4（横截性定理） *端点曲线问题的极值曲线在终点时间 t_1 满足下面的横截性条件：*

$$f(t_1)g_x(t_1)-(g_t(t_1)+g_x(t_1)\dot{x}(t_1))\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)=0.$$

注记 7.2.5 横截性这个词来源于上述条件可看作是曲线 $g(t, x)=c$ 和极值曲线 $x(t)$ 的夹角满足的条件．为了看出几何条件是什么，回忆梯度 $\nabla g=(g_t, g_x)$ 垂直于水平线 $g(t, x)=c$．即极值曲线可用 $(t, x(t))$ 参数化，且切向量为 $(1, \dot{x})$．由点积得

$$g_t+g_x\dot{x}=\nabla g\cdot(1,\dot{x})=|\nabla g|\sqrt{1+\dot{x}^2}\cos\theta,$$

其中 θ 是梯度 ∇g 和切向量 $(1, \dot{x})$ 的夹角．代入 $g_t+g_x\dot{x}$，解横截性条件得到

$$\cos\theta=\frac{f(t_1)g_x(t_1)}{\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)|\nabla g(t_1)|\sqrt{1+\dot{x}(t_1)^2}}.$$

角 θ 决定了曲线的交角（因为 ∇g 垂直于曲线 $g=0$）．

例 7.2.6 假设 $g(t, x)=t$，$c=t_1$，该曲线在 (t, x) 平面内是竖直线，于是有 $g_t=1$，$g_x=0$，这时横截性条件变成

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)=0.$$

这是最终时间固定为 t_1 的情形，但是终点 $x(t_1)$ 的位置并不确定．这种情形下的横截性条件有时被称为自然边界条件．

例 7.2.7 假设 $g(t, x)=x$，$c=x_1$，该曲线在 (t, x) 平面内是水平线，故 $g_t=0$，$g_x=1$，

这时横截性条件变成 345

$$f(t_1)-\dot{x}(t_1)\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)=0.$$

这是终点固定在 x_1 的情形，但最终的时间是不确定的．因此，这个横截性条件是解定义 7.2.2 中问题的必要的附加条件．

练习 7.2.8 求 $J=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),y(t),\dot{x},\dot{y})\mathrm{d}t$ 的极值曲线，其中起始点固定在 3 维空间中，终点位于由$g(t,x,y)=c$ 给定的曲面上．证明这种情形下的自然边界条件为

$$f(t_1)g_x(t_1)-(g_t(t_1)+g_x(t_1)\dot{x}(t_1)+g_y(t_1)\dot{y}(t_1))\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)=0,$$

$$f(t_1)g_y(t_1)-(g_t(t_1)+g_x(t_1)\dot{x}(t_1)+g_y(t_1)\dot{y}(t_1))\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(t_1)=0.$$

为证明这些关系式，对每个函数(即 x，y)运用定理 7.2.4 的证明．即先取变分 x^* 和 t_1^*，保持极值曲线中的 y 不变诱导自然边界条件．然后对 y^* 和 t_1^*，x 作相同的工作．注意当曲面形如函数 $g(t,x,y)=t-h(x,y)$的图像时，条件变成

$$f(t_1)h_x(t_1)+(1-h_x(t_1)\dot{x}(t_1)-h_y(t_1)\dot{y}(t_1))\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)=0,$$

$$f(t_1)h_y(t_1)+(1-h_x(t_1)\dot{x}(t_1)-h_y(t_1)\dot{y}(t_1))\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(t_1)=0.$$

练习 7.2.9 利用练习 7.2.8 的自然边界条件，证明 3 维空间中一点到面 $g(x,y,z)=c$ 的距离的极值曲线必然垂直于这一曲面．提示：证明极值曲线的切向量平行于由 g 的梯度给出的曲面的法向量．

练习 7.2.10 $x(0)=0$ 且 $x(1)$不定，求下列积分的极值曲线：

$$\int_0^1 (x^2+\dot{x}^2+2xe^t)\mathrm{d}t.$$

练习 7.2.11 $x(1)=0$ 且 $x(2)$不定，求下列积分的极值曲线： 346

$$\int_1^2 (\dot{x}+t^2\dot{x}^2)\mathrm{d}t.$$

练习 7.2.12 $x(0)$，$x(1)$不定，求下列积分的极值曲线：

$$\int_0^1 (\dot{x}^2+x\dot{x}+x+\dot{x})\mathrm{d}t.$$

练习 7.2.13 $x(0)=1$ 且 $x(T)$位于曲线 $x(t)=2+(t-1)^2$ 上，求下列积分的极值曲线：

$$\int_0^T \frac{\dot{x}^2}{t^3}\mathrm{d}t.$$

7.3 基本例子

变分法的讨论如果不涉及最速下降问题就不算完整．这个名字来源于希腊语 brachist 和 chronos，这两个词的意思分别意味着最短和时间．问题本身如下．

例 7.3.1(最速下降问题) 给出 xy 平面上的一点(a, b)，求连结(a, b)和原点的曲线 $y(x)$，使得一颗珠子在重力的作用下从(a, b)到$(0, 0)$沿曲线 $y(x)$无摩擦地滑下所经历的时间最短．如图 7-2 所示．

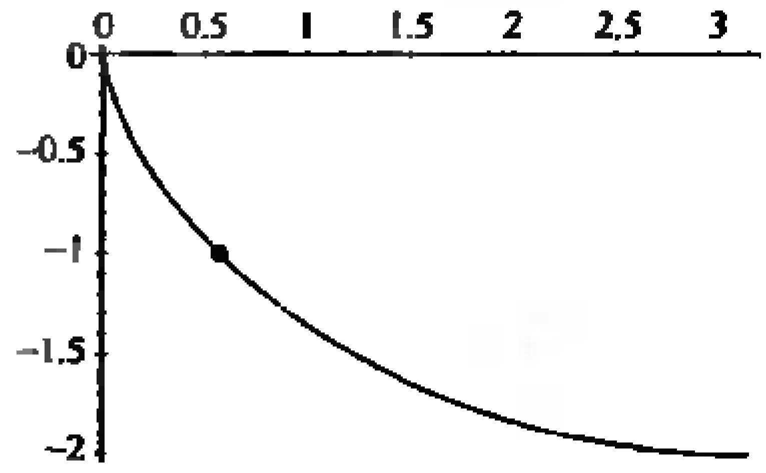


图 7-2 金属丝上的珠子

解决这个问题的关键就是公式 $D=RT$，即距离等于速度乘以时间．这个无穷小距离就是金属丝的弧长 $D=\sqrt{1+y'^2}$，下降速度由重力势能 mgh 决定，其中 m 为珠子的质量，$g=9.8\text{m/s}^2$ 是(地球表面的)重力加速度，h 是珠子相对于固定参考面的高度(通常取地面为零)．若珠子在(a, b)开始时的速度为零，能量守恒要求珠子的动能等于由于高度降低而损失的势能．换句话说，

347

$$mg(b-y)=\frac{1}{2}mv^2,$$

其中 v 是珠子的速度．故有 $v=\sqrt{2g(b-y)}$．由 $D=RT$ 可知时间 T 是 y 和 y'的函数，

$$T(y,y')=\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{b-y}}.$$

取 $T(y, y')$对 x 从 a 到 0 的积分得到总时间．最速下降问题就变成固定端点问题：求积分

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^0\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{b-y}}\mathrm{d}x$$

的极小值曲线，其中 $y(a)=b$，$y(0)=0$．

为解这一问题首先作替换 $u=b-y$，不考虑常数因子 $1/\sqrt{2g}$，则需要求下面积分的极值．

$$J=\int_a^0\frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}x.$$

因为自变量在 J 中没有出现，所以由练习 7.1.9 得到

$$\frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}}-u'\frac{u'}{\sqrt{u(1+u'^2)}}=c.$$

现在找出公分母，化简并用常数 c 替换 $1/c$，得到可分离变量的微分方程 $c=u(1+u'^2)$，继而

$$\begin{aligned}x&=\int\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{c-u}}\mathrm{d}u\\&=-2\int\sqrt{c^2-w^2}\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

其中 $w=\sqrt{c-u}$，并用 c^2 代替 c．令 $w=c\sin\theta$，故

$$\begin{aligned}x&=-2\int c\cos\theta\quad c\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&=-2c^2\int\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$= -2c^2\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{c^2}{2}(2\theta + \sin 2\theta) + r$$

$$x(\phi) = k(\phi + \sin\phi) + r.$$

其中 $2\theta=\phi$. 由上面的代换知 $b-y=u=c^2\cos^2\theta=c^2\cos^2\frac{\phi}{2}$. 又 $\cos^2\frac{\phi}{2}=(1+\cos\phi)/2$，故 348

$$y(\phi) = k(1+\cos\phi) + b,$$

其中对于 $x(\phi)$，$k=-c^2/2$. 注意 $y(\pi)=b$，故必须有 $x(\pi)=a$. 这意味着 $r=a-k\pi$. 如果令 $\zeta=\phi-\pi$，那么得到 x，y 的参数表示：

$$x(\zeta) = k(\zeta - \sin\zeta) + a \quad 和 \quad y(\zeta) = k(1-\cos\zeta) + b.$$

这是摆线的参数方程. 因此，最速下降问题的解是第 1 章中的标准曲线之一. 注意由练习 1.1.14 知最速下降线也是等时线. 用 Maple 绘制最速下降曲线见[Opr00]. 最后考虑有摩擦的最速下降曲线见[HK95]，在[Law96]中叙述了一种完全不同的方法.

例 7.3.2(到直线的最速下降问题) 修改例 7.3.1 的最速下降问题，求从一点到一条竖直线的曲线，使得珠子下降的时间最短. 此时被积函数 f 变为

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{b-y}}.$$

其中 x，y 和 $\mathrm{d}y$ 是变量. 由例 7.2.6，横截性条件是

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y'}(0) = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{b-y}}.$$

即在平面 xy 上 $y'=0$. 也就是说到直线的最速下降曲线必然水平地到达竖直线(即夹角是直角).

练习 7.3.3 伯努利独到地解决了最速下降问题，他利用光线以最短时间传播的费马原理和折射的斯内尔法则(见[Wei74]和[Opr00]). 下面是一个类似的问题. 假设光子在上半平面移动且使得时间最短，而且在该介质中，光子的速度总是和它到 x 轴上的距离成正比，即 $v=ky$，其中 $k>0$，那么光子经过的轨迹是怎样的呢？提示：建立时间积分并求极值.

例 7.3.4(平面上的最短距离曲线) 给定平面上的点(a, b)和(c, d)，求连结这两点的曲线 $x(t)$，使得弧长积分

$$J = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t$$ 349

取到最小值. 这里选择双变量的公式来说明这类问题. 因为被积函数不依赖于 x 和 y，所以欧拉-拉格朗日公式简化为

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}} = c \quad 和 \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}} = d.$$

求每个方程的平方根，令它们相等，得到

$$\frac{\dot{y}}{d} = \frac{\dot{x}}{c}$$

$$y=\frac{d}{c}x+r.$$

即为平面上的直线方程. 因此弧长积分的极值曲线是直线. 事实上，这个极值曲线就是使得弧长极小的曲线.

练习 7.3.5 利用单变量解平面上的最短距离问题，即弧长为 $\int\sqrt{1+y'(x)^2}\mathrm{d}x$.

例 7.3.6 假设我们要求从固定点到曲线的距离是极小的，那么由定理 7.2.4 上可得到什么条件? 这个距离是弧长积分 $J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ (其中极值曲线的参数形式为 $(x, y(x))$，目标曲线写成隐形式 $g(x, y)=c$. (在 xy 坐标下)定理 7.2.4 中的横截性条件(在 x_1 点)是

$$\sqrt{1+y'^2}g_y-(g_x+g_yy')\frac{\partial\sqrt{1+y'^2}}{\partial y'}=0.$$

化简得到

$$y'=\frac{g_y}{g_x}.$$

y' 是曲线与极值曲线交点处的切线的斜率，g_y/g_x 是由梯度 (g_x, g_y) 确定的直线的斜率. 因此极值曲线与目标曲线相交于梯度方向，即垂直于曲线的切线. 所以通常情况下，距离极值曲线和目标曲线垂直相交.

例 7.3.7(旋转曲面的最小面积) 我们已经知道极小旋转曲面是悬链面，且最小面积曲面是极小曲面，所以这一问题有另一解法. 旋转曲面的面积为

350

$$A=2\pi\int y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

练习 7.3.8 上面曲面面积积分中的被积函数与 x 无关，欧拉-拉格朗日方程化简为 $y'=\sqrt{y^2-c^2}$. 解可分离变量的微分方程得 $y=c\cosh(x/c-d)$，验证悬链面是旋转曲面中唯一的极小曲面. 因为悬链面只在某些特定条件下才是给定边界时的最小面积，所以这个例子再次说明了极值曲面不一定总是极小值曲面.

练习 7.3.9 设 $z=f(x, y)$ 是二元函数，曲面的面积是

$$A=\iint\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用练习 7.1.8 中两个独立变量的欧拉-拉格朗日方程证明这个积分的极值曲面是极小曲面方程的解.

练习 7.3.10 设 $z=\phi(x, y)$ 是二元函数，狄利克雷函数为

$$A=\iint(\phi_x^2+\phi_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用练习 7.1.8 中两个独立变量的欧拉-拉格朗日方程证明这个积分的极值曲线是调和函数. 狄利克雷积分来源于物理和工程学(见练习 4. 5. 5). 特别地，上面两个变量可以表示成有环形交的圆柱形电容器的容积(单位长度)，类似地三个变量可以表示电场的势能. 因为后者在势能极小时达到稳定平衡，所以狄利克雷积分的极小值等于电场的势. 更详细的内容见[Wei74].

例 7.3.11 力学的哈密顿原理是说通过求所谓的作用积分

$$J=\int(T-V)\mathrm{d}t$$

的极值曲线可以得到物理系统的运动方程，其中 T 和 V 分别表示动能和势能. 显然 T，V 的形式依赖于具体问题. 为搞清这一原理的来历，我们来看特殊的 1 维情形，单个粒子在守恒力场 F 的作用下沿 x 轴运动. 这意味着 F 是某个势函数 $V(x)$ 的(负的)梯度(简化为单一偏导数)， 351
$F=-\mathrm{grad}V=-\partial V/\partial x$(负号是物理中的习惯问题). 粒子的动能 $T=(1/2)m\dot{x}^2$，故作用积分变成

$$J=\int\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)\right)\mathrm{d}t.$$

这一积分的欧拉-拉格朗日方程为

$$-\frac{\partial V(x)}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x})=0.$$

用 F 替换第一项并取第二项的微分得牛顿定律：

$$F=m\ddot{x}.$$

而且注意被积函数 $T-V$ 与 t 无关，所以我们由练习 7.1.9 中的第一个积分 $f-\dot{x}(\partial f/\partial\dot{x})=c$ 得

$$T-V-\dot{x}\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{x}}=c$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V-\dot{x}m\dot{x}=c$$

$$-\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V=c$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V=\bar{c}$$

$$T+V=\bar{c}$$

$$E=\bar{c},$$

其中 $E=T+V$ 是粒子的总能量. 这个计算意味着在保守力场中总能量是不变的(即为常数). 这一事实说明，牛顿定律和能量守恒可以由哈密顿原理推导出来，这也说明了为什么哈密顿原理是经典力学的基石. 下面我们将在 7.6 节看到哈密顿原理和几何之间的关系.

7.4 高阶问题

7.4.1 高阶欧拉-拉格朗日方程

不是所有变分问题的被积函数 $f(t,x,\dot{x})$ 都只涉及 x 和一阶导数 $\dot{x}$. 特别地，包含对象如何弯曲的问题经常涉及二阶导数，因此和曲率相关. 我们也可以找出这种情形下的欧拉-拉格朗日方程. 当然对任意阶的导数都可以，这里我们只考虑被积函数形如 $f(t,x,\dot{x},\ddot{x})$ 的情形. (或用几何记号 $f(x,y,y',y'')$.) 352

假设 $x(t)$ 是下面积分

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t))\mathrm{d}t$$

取到极小值的曲线．令 $x^*(t)=x(t)+\epsilon\eta(t)$ 是 x 的变分，且要求 $\eta(t_0)=0$，$\eta(t_1)=0$，$\dot{\eta}(t_0)=0$，$\dot{\eta}(t_1)=0$．所以曲线 $x^*(t)$ 仍是连结 x_0 和 x_1 的曲线并在终点和 $x(t)$ 的方向相同(因为 $\dot{x}^*=\dot{x}+\epsilon\dot{\eta}$)．则

$$J(\epsilon)=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x^*,\dot{x}^*,\ddot{x}^*)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x+\epsilon\eta,\dot{x}+\epsilon\dot{\eta},\ddot{x}+\epsilon\ddot{\eta})\mathrm{d}t.$$

求对 ϵ 的导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\epsilon}&=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^*}\frac{\partial x^*}{\partial\epsilon}+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}^*}\frac{\partial\dot{x}^*}{\partial\epsilon}+\frac{\partial f}{\partial\ddot{x}^*}\frac{\partial\ddot{x}^*}{\partial\epsilon}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^*}\eta+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}^*}\dot{\eta}+\frac{\partial f}{\partial\ddot{x}^*}\ddot{\eta}\right)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

且因为当 $\epsilon=0$ 时 $x^*(t)=x(t)$，所以

$$0=\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\eta+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\dot{\eta}+\frac{\partial f}{\partial\ddot{x}}\ddot{\eta}\right)\mathrm{d}t.$$

积分号中的第二项可以通过分部积分积出，下面的练习告诉我们具体怎样处理第三项．

练习 7.4.1 通过两次分部积分计算第三项

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial f}{\partial\ddot{x}}\ddot{\eta}\mathrm{d}t=\dot{\eta}\frac{\partial f}{\partial\ddot{x}}\bigg|_{t_0}^{t_1}-\bigg|_{t_0}^{t_1}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\ddot{x}}\right)+\int_{t_0}^{t_1}\eta\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\ddot{x}}\right)\mathrm{d}t.$$

注意由 η 在端点满足的条件知，前两项为零．因此可化简为

$$0=\int_{t_0}^{t_1}\eta\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\ddot{x}}\right)\right]\mathrm{d}t.$$

这个方程对每一个满足 $\eta(t_0)=\eta(t_1)=0=\dot{\eta}(t_0)=\dot{\eta}(t_1)$ 的函数 η 都成立．和前面的做法一样，可以得到关于二阶问题的欧拉–拉格朗日方程．

定理 7.4.2 *积分*

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,\dot{x},\ddot{x})\mathrm{d}t$$

353 *的极值曲线 $x(t)$ 满足*

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\ddot{x}}\right)=0.$$

这里要求 $x(t_0)=x_0$，$x(t_1)=x_1$，$\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$，且 $\dot{x}(t_1)=\dot{x}_1$．

练习 7.4.3 如果定理 7.4.2 中的拉格朗日被积函数 f 与 x 无关，证明欧拉–拉格朗日方程化简为

$$-\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\ddot{x}}\right)=c.$$

练习 7.4.4 证明下面积分

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,\dot{x},\ddot{x},\cdots,x^{(n)})\mathrm{d}t$$

的极值曲线满足一般的高阶欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right)-\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}\right)=0.$$

其中约束条件是 $x(t_i)=x_i$，$\dot{x}(t_i)=\dot{x}_i$，…，$x^{(n)}(t_i)=x_i^{(n)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

在考虑下面例子之前，回忆平面曲线的曲率．设 $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ 是平面上切向量为 $\dot{\alpha}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t))$ 的曲线．由练习 1.3.2 知 α 的曲率为 $\kappa=|\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s|$，其中 θ 是 α 的切线和 $(1,0)$ 之间的夹角．对于非弧长参数 t，我们需要修改此公式．回忆这一参数和弧长参数之间的关系为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\dot{\alpha}(t)|,$$

这里用点表示对于 t 的导数．记 $\alpha(t)$ 的速度为 ν，于是 α 的曲率为

$$\kappa=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|\frac{1}{\nu}.$$

以下用两种方法计算一个特定的涉及 θ 的量．回忆 $\dot{\alpha}=(\dot{x},\dot{y})$．因为

$$\dot{\alpha}\cdot(1,0)=\dot{x}\quad 和\quad \dot{\alpha}\cdot(1,0)=\nu\cos(\theta),$$

所以（利用 $\nu=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$）

$$\cos(\theta)=\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}.$$

现在我们要得到 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$，对两边微分，利用 $\sin(\theta)=\sqrt{1-\cos^2(\theta)}=\dot{y}/\nu$ 得 [354]

$$-\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{y}\frac{\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\dot{y}}{\nu}\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|=\dot{y}\frac{\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\nu}\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

$$\kappa=\frac{|\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}.$$

若 α 由函数给定，我们可记 $\alpha(x)=(x,y(x))$，那么 $\alpha'(x)=(1,y'(x))$，且

$$x'=1,\quad x''=0,\quad x'^2+y'^2=1+y'^2.$$

因此，曲率可以化简为

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

其中我们用标准的记号表示对 x 的导数．显然这是练习 1.4.6 的特殊情形．下面我们分析一个由变分原理决定形状的具体例子．关于这一问题的一本很好的参考书是[Tro96].

例 7.4.5(在压力下的弯曲) 取(沿 x 轴的)一个杆．假设有一个平行于它的外力 P 作用在它的端点 $x=L$ 处．通过实验，伯努利证明了使单位长度的杆弯曲所做的功与杆形变的曲率的平方成正比．假设这个平面曲线(即杆的中心曲线)的参数方程是$(x(t),\ y(t))$．由上述结论，曲率为

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

弯曲所做的功(张力因杆弯曲的势能)为

$$\begin{aligned}W_{\text{bend}}&=\mu\int_0^{s(L)}\kappa^2\mathrm{d}s\\&=\mu\int_0^L\frac{(y'')^2}{(1+y'^2)^3}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x\\&=\mu\int_0^L\frac{(y'')^2}{(1+y'^2)^{5/2}}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

355 其中由 $s=\int\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 得 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$．其中杨模 E 和惯性力矩 I 决定了比例常数 $\mu=EI/2$．这里压力 P 也做了功，这由曲线回复到原先形状所需要的功决定．即

$$W_{\text{comp}}=P\left(\int_0^L\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x-L\right),$$

其中 L 是杆起始的长度．弯曲杆的总势能为

$$\begin{aligned}U&=W_{\text{bend}}-W_{\text{comp}}\\&=\mu\int_0^L\frac{(y'')^2}{(1+y'^2)^{5/2}}\mathrm{d}x-P\left(\int_0^L\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x-L\right)\\&=\int_0^L\mu\frac{(y'')^2}{(1+y'^2)^{5/2}}-P(\sqrt{1+y'^2}-1)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

W_{comp}前面的负号是因为弯曲的杆长度增加了，所以使得分子远离的运动产生的排斥电场导致势能的减少．

因为当 U 最小时杆达到平衡位置，所以它是高阶的变分问题．注意端点条件是 $y(0)=0$，$y(L)=0$(即端点是定的)，同时 $y'(0)=0$ 且 $y'(L)$不定(即左边保持其形状而受压的右边自由)．由这种情形的自然边界条件可以证明 $y''(L)=0$(见练习 7.4.9)．由定理 7.4.2，高阶的欧拉-拉格朗日方程(用 $y(x)$代替 $x(t)$)为(做一些化简以后)

$$-5\mu y'y''^2+Py'(1+y'^2)^3+2\mu y'''(1+y'^2)=c(1+y'^2)^{7/2}.$$

最小偏差理论假设弯曲的杆总的形状在某种程度上逼近于最初的杆．相应地就是$|y'|$和$|y''|$足够小以至于它们高于一阶的乘方和乘积都可以忽略不计．因此在这一假设前提下，微分方程化简为

$$Py'+2\mu y'''=c.$$

这个方程的一个解是(其中 $\omega^2=P/(2\mu)$)

$$y(x)=\frac{c}{\omega^2}x-\frac{c}{\omega^3}\tan(\omega L)+\frac{c}{\omega^3}\tan(\omega L)\cos(\omega x)-\frac{c}{\omega^3}\sin(\omega x).$$

回忆为了得到这个解，我们将问题分成两部分：首先求齐次微分方程 $y'''+\omega^2y'=0$ 的通解，然后再求原始方程 $y'''+\omega^2y'=c$ 的特解．与齐性方程对应的代数方程 $D^3+\omega^2D=0$ 的解是 $D=0$

和 $D=\pm i\omega$. 因此，齐次微分方程的通解为

$$y_h = b + A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$ 356

为求非齐次微分方程的特解，我们通常猜测方程右端项. 因为常数是齐次微分方程的解的一部分，所以我们考虑 $y_p = Kx$. 计算 y_p 的导数并将其带入到方程得 $\omega^2 K = c$，进而 $K = c/\omega^2$ 且 $y_p = (c/\omega^2)x$. 于是非齐次微分方程的通解为

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= b + A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) + \frac{c}{\omega^2}x. \end{aligned}$$

由条件 $y(0)=0$ 和 $y'(0)=0$ 得 $b=-A$ 和 $B=-c/\omega^3$，由自然边界条件 $y''(L)=0$ 得

$$A = \frac{c}{\omega^3}\tan(\omega L) = -b.$$

最终 $y(x)$的表达式为

$$y(x) = -\frac{c}{\omega^3}\tan(\omega L) + \frac{c}{\omega^3}\tan(\omega L)\cos(\omega x) - \frac{c}{\omega^3}\sin(\omega x) + \frac{c}{\omega^2}x.$$

由条件 $y(L)=0$ 得到横截性方程 $\tan(\omega L)=\omega L$，可用 Maple 解出 ω. 显然对应杆的震动有无数多个解，而第一个解大约是 $\omega_1 L = 4.4934$. 第一个弯曲的临界力为

$$P_1 \approx 2\mu\left(\frac{4.4934}{L}\right)^2.$$

换言之，作用在杆上的力必须大于这个值杆才会出现弯曲. 注意利用 $\tan(\omega L)=\omega L$，我们可以化简出现弯曲时 $y(x)$的表达式为

$$y(x) = \frac{c}{\omega^2}x - \frac{c}{\omega^2}L + \frac{c}{\omega^2}L\cos(\omega x) - \frac{c}{\omega^3}\sin(\omega x).$$

类似地，可求 P_2，P_3 等等. 只有更大的力出现才会有更高的弯曲模型. 在 7.10.2 小节，我们运用 Maple 给出了前三个模型，如图 7-8、图 7-9 和图 7-10 所示.

练习 7.4.6 当长度为 L 的悬梁重量分布为 $p(x)$，用函数 $y(x)$表示偏转后的位置. 由弹性定理知，这个稳定状态(即平衡)的势能为

$$U(y) = \int_0^L \left(\frac{1}{2}\mu(y'')^2 - p(x)y\right)dx,$$

其中 $\mu>0$ 称为由梁横截面决定的弯曲刚度. 假设 $y(x)$是满足 357

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y''(L)=0,\quad y^{(3)}(L)=0$$

的 U 的极值曲线. 最后两个“自然”的边界条件是因为假设在梁的自由端弯曲力矩和剪切力为零. 对于 $P(x)=c$ 是常数(偏转是在它自身重力作用下发生的)，求偏转的形状 $y(x)$(提示：$y(x)$是 4 次多项式).

实际上，在弯曲杆的例子中，势能积分中的$(y'')^2$ 可以用曲率的平方替换. 做该替换，并计算欧拉-拉格朗日方程. 利用最小偏差定理，得到一个微分方程，这个方程和由$(y'')^2$ 诱导的方程是一样的. 这就是为什么工程师们常用$(y'')^2$ 代替曲率. 不过这里没有保证在取欧拉-拉格朗日方程之前这个替换总是和应用最小偏差定理得到的结果相同. 见 7.10.2 节和练习 7.10.5.

7.4.2 高阶自然边界条件

在7.4.1节高阶欧拉-拉格朗日方程的导数中，我们假设扰动η满足$\eta(t_0)=\eta(t_1)=\dot{\eta}(t_0)=\dot{\eta}(t_1)=0$. 如果没有这个假设，就得到下面的一般方程：

$$0=\left(\dot{\eta}\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}-\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right)+\eta\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\eta\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right)\right]\mathrm{d}t.$$

和前面一样，这个更加广泛问题的极值曲线依然是固定端点(和端点方向)问题的极值曲线，所以它满足欧拉-拉格朗日方程. 这意味着方程中的积分为零. 所以

$$0=\left(\dot{\eta}\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}-\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right)+\eta\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

现在让我们看一些可能的典型的边界条件.

例7.4.7(自然边界条件) 下面是典型的自然边界条件.

(1)假设$x(t_0)=x_0$和$x(t_1)=x_1$是固定端点. 这意味着$\eta(t_0)=0=\eta(t_1)$，且上述方程可以化简为

$$\dot{\eta}(t_1)\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}(t_1)=\dot{\eta}(t_0)\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}(t_0).$$

这对于任意在端点处为零的η都成立. 特别地，对于满足$\dot{\eta}(t_1)\neq 0$和$\dot{\eta}(t_0)=0$的η也成立. 这
358 意味着$\partial f/\partial\ddot{x}(t_1)=0$. 类似地，由$\dot{\eta}(t_1)=0$和$\dot{\eta}(t_0)\neq 0$可得$\partial f/\partial\ddot{x}(t_0)=0$. 归结为

$$\{x(t_0)=x_0,x(t_1)=x_1\}\Rightarrow\left\{\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}(t_0)=0,\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}(t_1)=0\right\}.$$

(2)假设$x(t_0)=x_0$和$\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$. 也就是说$\eta(t_0)=0$且$\dot{\eta}(t_0)=0$，上述方程化简为

$$0=\dot{\eta}(t_1)\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}(t_1)-\eta(t_1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right)-\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)(t_1).$$

对所有适当的η都成立，特别地对满足$\dot{\eta}(t_1)\neq 0$和$\eta(t_1)=0$的η也成立. 由此可得$\partial f/\partial\ddot{x}(t_1)=0$. 类似地，因为$\eta$满足$\dot{\eta}(t_1)=0$和$\eta(t_1)\neq 0$. 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right)(t_1)=\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1).$$

归结为

$$\{x(t_0)=x_0,\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0\}\Rightarrow\left\{\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}(t_1)=0,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right)(t_1)=\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)\right\}.$$

(3)假设$\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$且$\dot{x}(t_1)=\dot{x}_1$. 则

$$\{\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0,\dot{x}(t_1)=\dot{x}_1\}$$
$$\Rightarrow\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right)(t_0)=\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_0),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right)(t_1)=\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)\right\}.$$

(4)假设$x(t_0)=x_0$且$\dot{x}(t_1)=\dot{x}_1$. 则

$$\{x(t_0)=x_0,\dot{x}(t_1)=\dot{x}_1\}\Rightarrow\left\{\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}(t_0)=0,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right)(t_1)=\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_1)\right\}.$$

练习 7.4.8 验证例 7.4.7 中的自然边界条件(3)(4).

练习 7.4.9 假设 $x(t_0)=x_0$，$x(t_1)=x_1$，$\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$ 且$\dot{x}(t_1)$不定. 证明自然边界条件是

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}(t_1)=0.$$

在例 7.4.5 中应用这个结论，得到那里用到的自然边界条件 $y''(L)=0$.

练习 7.4.10 一个初始长度为 L 的细弹性杆，夹住一端向上倾斜，在垂线 $x=L$ 处钉住，如果杆可用 $y(x)$表示，那么势能正比于 $y(x)$的曲率的平方，

$$U=\mu\int_0^L\frac{y''(x)^2}{(1+y'(x)^2)^{5/2}}\mathrm{d}x,$$ 359

其中 μ 是常数. 物理上要求的边界条件是 $y(0)=0$，$y'(0)=0$ 和 $y(L)=y_1$.

(a)求 U 的极值得到关于 y 的微分方程.

(b)因为 $y'(L)$是不确定的，那么由横截性得到的条件是什么？(提示：$y''(L)=0$.)

(c)由最小偏差定理，$|y'(x)|$和$|y''(x)|$在区间$[0,L]$上都很小. 此时，求 y 的微分方程并解之得

$$y(x)=-\frac{3y_1}{L^3}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{Lx^2}{2}\right).$$

(d)选择不同的 L 和 y_1 的值，用 Maple 绘制解的图像.

至此我们看到，微分几何的不变量(如曲线的曲率)在物理问题中是怎么产生的. 通常来说，它符合变分法中的物理几何原理(如伯努利原理).

7.5 魏尔斯特拉斯 E-函数

对于给定的积分 J，我们如何判断积分的极值曲线确实是极小值曲线？除了特别指出的(练习 7.1.16)之外，有很多可能被用来判断极小的充分条件. 但是对于大型问题而言，没有一个是特别方便的. 本节我们给出一个相当直接的条件. 这一条件由魏尔斯特拉斯得到(我们在第 4 章已经提到他关于极小曲面的工作).

设 $x=x(t)$是固定端点的积分 $J=\int f(t,x,\dot{x})\mathrm{d}t$ 的极小值曲线，$\hat{x}=\hat{x}(t)$是另外一条连结相同端点的曲线. 分别用 $J[x]$和 $J[\hat{x}]$表示沿曲线 x 和$\hat{x}$的 J 值. 因为 x 使得 J 取得极小值，所以必然有

$$\Delta J\overset{\text{def}}{=}J[\hat{x}]-J[x]\geqslant 0.$$

这个条件不可能用于判断极值曲线 x 和比较曲线$\hat{x}$. 因此为了比较 $J[\hat{x}]$和 $J[x]$，我们在空间的指定区域比较$\hat{x}$(或更详细地如它的 f 值或它的斜率)和其他极值曲线. 当然因为并没有保证这些极值曲线的存在性，所以我们还需要一个定义.

定义 7.5.1 对于积分为 J 的标准的固定端点问题，极值曲线域(即欧拉-拉格朗日方程的

解)是指 J 的极值曲线的集合，使得在给定的区域内，通过每一点恰好有该集合中的一条极值
360 曲线.

例 7.5.2 考虑固定端点问题，其中 $x(0)=0$，$x(2)=2$，积分是

$$J=\int_0^2\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2+x\dot{x}+x+\dot{x}\right)\mathrm{d}t.$$

由欧拉-拉格朗日方程得一般的极值曲线为

$$x(t)=\frac{t^2}{2}+ct+d.$$

再利用初始条件得到 $x(t)=t^2/2$. 极值曲线域可以由一般极值曲线公式中的积分常数确定. 这样我们可以保证对于最初的 J 得到的是极值曲线. 例如，我们可以取极值曲线域为

$$x_d(t)=\frac{t^2}{2}+d.$$

如果极值曲线 x_{d_1} 和 x_{d_2} 都经过给定的点$(t,\ x)$，那么 $t^2/2+d_1=t^2/2+d_2$. 因而 $d_1=d_2$，即极值曲线相同. 因此我们得到一个极值曲线域.

练习 7.5.3 求练习 7.1.13 中的固定端点问题的极值曲线域，其中 $x(0)=0$，$x(\pi)=\pi$，积分是

$$J=\int_0^\pi\left(x\sin t+\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)\mathrm{d}t.$$

练习 7.5.4 求练习 7.1.14 中的固定端点问题的极值曲线域，其中 $x(0)=1$，$x(1)=4$，积分是

$$J=\int_0^1(\dot{x}x^2+\dot{x}^2x)\mathrm{d}t.$$

练习 7.5.5 求练习 7.1.15 中的固定端点问题的极值曲线域，其中 $x(0)=0$，$x(\pi/2)=1$，积分是

$$\int_0^{\pi/2}(\dot{x}^3-x^2)\mathrm{d}t.$$

一旦得到某一问题的极值曲线域，我们就可以比较极值曲线域和连结端点的曲线. 更准确地，给定积分 J、端点条件 $x(t_0)=x_0$ 和 $x(t_1)=x_1$ 以及连结这两个端点的曲线$\hat{x}$，在任意一点$(t,\ x)$定义 $p=p(t,\ x)$——经过$(t,\ x)$点的唯一一条极值曲线的导数. 因为 p 定义为极值曲线的导数，所以称它为域的斜率函数. 为比较沿曲线 J 的值，给出下面的定义.
361

定义 7.5.6 给定与 $J=\int f(t,x,\dot{x})\mathrm{d}t$ 相关的极值曲线域，斜率函数为 $p=p(t,\ x)$，魏尔斯特拉斯 E-函数为

$$E(t,x,\dot{x},p)=f(t,x,\dot{x})-f(t,x,p)-(\dot{x}-p)\frac{\partial f}{\partial p}(t,x,p).$$

为什么如此定义 E-函数？这里有一种不正规的解释. 假设固定$(t,\ x)$，并将 f 视为变量$\dot{x}$的函数，f 在点$(t,\ x,\ p)$的泰勒展开是

$$f(t,x,\dot{x})=f(t,x,p)+(\dot{x}-p)\frac{\partial f}{\partial p}(t,x,p)+(\dot{x}-p)^2\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(t,\bar{x},\bar{\dot{x}}),$$

其中点$(\mathfrak{t},\mathfrak{x},\dot{\mathfrak{x}})$位于$(t,x,\dot{x})$和$(t,x,p)$之间. 在方程两边同时减去右边的前两项，得到

$$E(t,x,\dot{x},p)=(\dot{x}-p)^2\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(\mathfrak{t},\mathfrak{x},\dot{\mathfrak{x}}).$$

如果我们知道例如 f 的 2 阶导向对于 p 总是正的，那么 E-函数也总是正的. 而且如果取 E-函数的积分(在任意曲线$\hat{x}$上取值)，那么有自然的分解

$$\begin{aligned}\int E(t,\hat{x},\dot{\hat{x}},p)\mathrm{d}t&=\int\left(f(t,\hat{x},\dot{\hat{x}})-f(t,\hat{x},p)-(\dot{\hat{x}}-p)\frac{\partial f}{\partial p}(t,\hat{x},p)\right)\mathrm{d}t\\&=\int f(t,\hat{x},\dot{\hat{x}})\mathrm{d}t-\int\left(f(t,\hat{x},p)+(\dot{\hat{x}}-p)\frac{\partial f}{\partial p}(t,\hat{x},p)\right)\mathrm{d}t\\&=J[\hat{x}]-K[\hat{x}],\end{aligned}$$

其中 $K[\hat{x}]$是积分

$$K[\hat{x}]=\int\left(f(t,\hat{x},p)+(\dot{\hat{x}}-p)\frac{\partial f}{\partial p}(t,\hat{x},p)\right)\mathrm{d}t.$$

现在，

(1)若 E 总是非负$\left(\text{故也有}\int E\mathrm{d}t\geqslant 0\right)$.

(2)如果对于固定端点问题的极值曲线 x，$K[\hat{x}]=J[x]$，那么有

$$\Delta J=J[\hat{x}]-J[x]=J[\hat{x}]-K[\hat{x}]=\int E\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

且 $x(t)$应该是 J 的极小值曲线. 我们先证明(2)总是成立的. 事实上，我们将证明 K 与轨迹无关，即任意曲线$\hat{x}(t)$对应的 $K[\hat{x}]$相同. 因此——又因这个积分是由希尔伯特发现的——K 被称为希尔伯特不变积分.

引理 7.5.7 积分

$$K[\hat{x}]=\int\left(f(t,\hat{x},p)+(\dot{\hat{x}}-p)\frac{\partial f}{\partial p}(t,\hat{x},p)\right)\mathrm{d}t$$ 362

与连结端点 x_0 和 x_1 的曲线$\hat{x}(t)$无关.

注记 7.5.8 在这种情况下 $p=\dot{x}$，所以对于极值曲线 x，$K[x]=J[x]$.

这里不给出引理的直接证明，而是考虑双变量的情形，因为它在微分几何中很有用但又很少被提及. 考虑固定端点问题，端点条件为 $x(t_0)=x_0$，$y(t_0)=y_0$，$x(t_1)=x_1$，$y(t_1)=y_1$，积分是

$$J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}f(t,x,y,\dot{x},\mathrm{d}y)\mathrm{d}t.$$

假设$(x,y)=(x(t),y(t))$是这个问题的极值曲线，再进一步假设极值曲线域存在，且两个变量的斜率函数是

$$p=(p_1,p_2)\stackrel{\text{def}}{=}(\dot{x},\dot{y}),$$

相应地魏尔斯特拉斯 E-函数是

$$E(t,\hat{x},\hat{y},\dot{\hat{x}},\dot{\hat{y}},p_1,p_2)=f(t,\hat{x},\hat{y},\dot{\hat{x}},\dot{\hat{y}})-f(t,\hat{x},\hat{y},p_1,p_2),$$

$$-(\dot{\hat{x}}-p_1)\frac{\partial f}{\partial p_1}(t,\hat{x},\hat{y},p_1,p_2)-(\dot{\hat{y}}-p_2)\frac{\partial f}{\partial p_2}(t,\hat{x},\hat{y},p_1,p_2).$$

且希尔伯特不变积分为

$$\begin{aligned}K[\hat{x},\hat{y}]&=\int\Big(f(t,\hat{x},\hat{y},p_1,p_2)+(\dot{\hat{x}}-p_1)\frac{\partial f}{\partial p_1}(t,\hat{x},\hat{y},p_1,p_2)\\&\quad+(\dot{\hat{y}}-p_2)\frac{\partial f}{\partial p_2}(t,\hat{x},\hat{y},p_1,p_2)\Big)\mathrm{d}t\\&=\int\left(f-p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}-p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial p_1}\mathrm{d}\,\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial p_2}\mathrm{d}\,\hat{y}.\end{aligned}$$

这里用到$\dot{\hat{x}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\,\hat{x}$和$\dot{\hat{y}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\,\hat{y}$. 最后一个等式将 K 转化为线积分，而线积分与路径无关(在单连通区域)当且仅当所在的向量场有势函数. 回忆在开单连通区域$O\subseteq\mathrm{R}^3$ 的向量场是映射 F: $O\to\mathrm{R}^3$, $F(t,x,y)=(A(t,x,y),B(t,x,y),C(t,x,y))$, F 沿 $\alpha(t)=(t,x(t),y(t))$的线积分为$\int_\alpha F\cdot\mathrm{d}\alpha=\int A\mathrm{d}t+B\mathrm{d}x+C\mathrm{d}y$，其中 $\mathrm{d}\alpha=(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$. 向量场 F 有势函数，如果

$$F=(A,B,C)=\mathrm{grad}\phi=(\phi_t,\phi_x,\phi_y),$$

其中 grad 表示梯度，ϕ_t 等表示它们相对于下标变量的偏导数. 显然势函数的存在条件是

363

$$\frac{\partial A}{\partial\hat{x}}=\frac{\partial B}{\partial t},\quad\frac{\partial A}{\partial\hat{y}}=\frac{\partial C}{\partial t},\quad\frac{\partial B}{\partial\hat{y}}=\frac{\partial C}{\partial\hat{x}}.$$

特别地，如果 $K[\hat{x},\hat{y}]$与路径无关，那么

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(f-p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}-p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)}{\partial\hat{x}}&=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial p_1}\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\frac{\partial p_1}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t},\\\frac{\partial\left(f-p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}-p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)}{\partial\hat{y}}&=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial p_2}\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial p_2\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_2^2}\frac{\partial p_2}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}\frac{\partial p_1}{\partial t},\\\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial\hat{y}}&=\frac{\partial^2 f}{\partial p_2\partial\hat{x}}.\end{aligned}$$

第三个条件是极值曲线域上的条件，而且我们默认它总是成立. 这样的极值曲线域被称为 Mayer 域. 进一步的讨论见[Sag92]. 注意在单变量的情形下，第三个条件没有什么意义. 以下证明第一个条件成立，第二个条件类似. 在下面的证明中为了记号的简化，我们用"无帽"符号 x 代替$\hat{x}$. 这不意味着 x 是极值，只是说我们仅对形式偏导数而不是特定的曲线感兴趣.

定理 7.5.9 $K[\hat{x},\hat{y}]$与路径无关.

证明 虽然这个证明冗长，但对于练习链式法则还是很有益处的. 求(1)的微分，设它与我们想得到的量相等，从而得到一个恒等式. (2)式的证明类似.

$$\frac{\partial\left(f-p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}-p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-p_1\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial p_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial p_2}{\partial x}\right]$$
$$-p_2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial p_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\frac{\partial p_2}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial p_2}{\partial y}\right],$$

令其等于

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\frac{\partial p_2}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t}.$$ 364

化简，并分离$\partial f/\partial x$，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial p_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\frac{\partial p_1}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t}+p_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial p_1}+p_2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial p_1}+p_1\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\frac{\partial p_1}{\partial x}\\&\quad+p_1\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x}+p_2\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\frac{\partial p_1}{\partial y}+p_2\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial y}\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial p_1}+p_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial p_1}+p_2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial p_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial t}+p_1\frac{\partial p_1}{\partial x}+p_2\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)\\&\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial t}+p_1\frac{\partial p_2}{\partial x}+p_2\frac{\partial p_2}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

因为沿极值曲线，$p_1=\dot{x}$和$p_2=\dot{y}$，所以微分可得p_1和p_2满足的等式，即

$$\dot{p}_1=\frac{\partial p_1}{\partial t}+p_1\frac{\partial p_1}{\partial x}+p_2\frac{\partial p_1}{\partial y},\quad \dot{p}_2=\frac{\partial p_2}{\partial t}+p_1\frac{\partial p_2}{\partial x}+p_2\frac{\partial p_2}{\partial y}.$$

代入得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial p_1}+p_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial p_1}+p_2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial p_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\dot{p}_1+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}\dot{p}_2.$$

注意这是关于f的偏导数和与极值曲线域相关的斜率函数的分量的表达式．还可以利用极值曲线得到p_1和p_2满足的另一个关系式．因为沿极值曲线欧拉-拉格朗日方程成立，所以(用p_1替换记号$\dot{x}$)利用链式法则，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial p_1}+p_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial p_1}+p_2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial p_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\dot{p}_1+\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}\dot{p}_2=\frac{\partial f}{\partial x}.$$

因为这和上面的式子一致，所以我们得到了所要的等式．因此回到我们的主题，所有式子都成立．所以我们证明了(1)(因为(2)类似可证)，从而K与路径无关． ■

推论 7.5.10(魏尔斯特拉斯条件)　如果轨迹$(x,y)=(x(t),y(t))$属于积分为J的固定端点问题的极值曲线域，且

$$E(t,x,y,\dot{x},\dot{y},p_1,p_2)\geqslant 0,$$

则(x,y)使J取得最小值．

证明　虽然前面已经说明这一证明比较简单，但为了方便和完整，重新做一遍．设$\hat{x}$表示任意连结端点的曲线．因为包含$\dot{x}-p_1$和$\dot{y}-p_2$的项为零，所以对于极值曲线(x,y)，$K[(x,y)]=J[(x,y)]$．因为K不变，所以 365

$$\Delta J=J[(\hat{x},\hat{y})]-J[(x,y)]$$

$$= J[(\hat{x},\hat{y})] - K[(x,y)]$$
$$= J[(\hat{x},\hat{y})] - K[(\hat{x},\hat{y})].$$

又因为 $E \geqslant 0$，所以

$$\Delta J = \int E(t,x,y,\dot{x},\mathrm{d}y,p_1,p_2)\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

因此，$J[(\hat{x},\hat{y})] \geqslant J[(x,y)]$. ■

练习 7.5.11 对于单变量 x 的情形，证明 $K[x]$ 与路径无关. 然后证明若 x 属于极值曲线域，且 $E(t,x,\dot{x},p) \geqslant 0$，则 x 是 J 的极小值曲线.

例 7.5.12 考虑 $x(0)=0$，$x(2)=2$ 以及积分是

$$J = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\dot{x} + x + \dot{x}\right)\mathrm{d}t$$

的固定端点问题. $x(t)=t^2/2$ 是一条极值曲线，极值曲线域可定义为 $x_d(t)=\frac{t^2}{2}+d$，以下计算魏尔斯特拉斯 E-函数.

$$\begin{aligned}
E(t,x,\dot{x},p) &= \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\dot{x} + x + \dot{x} - \frac{1}{2}p^2 - xp - x - p - (\dot{x}-p)(p+x+1) \\
&= \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}p^2 - \dot{x}p + p^2 \\
&= \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}p^2 - \dot{x}p \\
&= \frac{1}{2}[\dot{x}^2 - 2\dot{x}p + p^2] \\
&= \frac{1}{2}(\dot{x}-p)^2 \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

366 因此，$x(t)=t^2/2$ 是 J 的极小值曲线.

例 7.5.13(最速下降问题) 假设最速下降问题有极值曲线域. 于是 E-函数形如

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}} - \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{u}} - (u'-p)\frac{p}{\sqrt{u(1+p^2)}} \\
&= \frac{\sqrt{1+u'^2}\sqrt{1+p^2} - (1+p^2) - pu' + p^2}{\sqrt{u(1+p^2)}} \\
&= \frac{\sqrt{1+u'^2}\sqrt{1+p^2} - 1 - pu'}{\sqrt{u(1+p^2)}} \\
&= \frac{|(1,u')||(1,p)| - (1,u')\cdot(1,p)}{\sqrt{u(1+p^2)}},
\end{aligned}$$

其中 ‖ 表示长度，· 表示点积. 故由施瓦茨不等式，得

$$E = \frac{|(1,u')||(1,p)| - (1,u')\cdot(1,p)}{\sqrt{u(1+p^2)}} \geqslant 0.$$

因此摆线是最速下降问题的极小值曲线. 比较[HK95]尤其是[Law96].

练习 7.5.14 我们已经知道直线是弧长积分

$$J=\int\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$$

的极值曲线．显然由直线简单的上下平移就得到极值曲线域．计算双变量的魏尔斯特拉斯 E-函数，并证明直线的确给出平面上两点间的最短距离．提示：模仿最速下降的例子．

练习 7.5.15 证明对于有最小面积的旋转曲面的极值曲线，魏尔斯特拉斯 E-函数总是非负的(见练习 7.3.7 和练习 7.3.8)．悬链面不总是最小面积的原因就是过了某个特定点，它不再属于极值曲线域．

练习 7.5.16 计算练习 7.1.13 中的固定端点问题的魏尔斯特拉斯 E-函数，其中 $x(0)=0$，$x(\pi)=\pi$．且积分是

$$J=\int_0^{\pi}\left(x\sin t+\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)dt.$$

证明这个极值曲线是极小值曲线．

练习 7.5.17 计算练习 7.1.14 中的固定端点问题的魏尔斯特拉斯 E-函数，其中 $x(0)=1$，$x(1)=4$，且积分是

$$J=\int_0^1(\dot{x}x^3+\dot{x}^2x)\,dt.$$

367

证明这个极值曲线是极小值曲线．

练习 7.5.18 计算练习 7.1.15 中的固定端点问题的魏尔斯特拉斯 E-函数，其中 $x(0)=0$，$x(\pi/2)=1$，且积分是

$$\int_0^{\pi/2}(\dot{x}^3-x^2)\,dt.$$

证明这个极值曲线是极小值曲线．

练习 7.5.19 计算固定端点问题的魏尔斯特拉斯 E-函数，其中 $x(0)=1$，$x(1)=1$，且积分是

$$\int_0^1(t^2-\dot{x}^2)\,dt.$$

证明这个极值曲线是极小值曲线．

魏尔斯特拉斯 E-函数是验证极小值曲线的有力工具．不过，它也不是万能的．例如，通常证明的 $E\geqslant 0$，仅当在某些特殊的代数结构下成立．特别地我们证明对任意变量 p 有 $E\geqslant 0$，而不是利用斜率函数的特殊性质．这很简单，因为关于 p 的性质用处不大．因此，对于简单问题要证明 E 函数非负性并不难，对于比较复杂的问题这个代数复杂度就呈指数上升．其次，极值曲线域的存在性没有保证．实际上，雅可比微分方程类似于第 5 章的共轭点，它可以确定极值曲线是否属于极值曲线域．特别地对于测地线，这也解释了为什么通过测地线的共轭点就意味着测地线不是最短的．一般的雅可比条件非常复杂，有兴趣的读者可以参考[Pin93]，也可以看[Bli46，Ewi85，Sag92]．在下面例子中对测地线问题作粗略的介绍，详见[Hsi81]．

练习 7.5.20(复习雅可比方程) 假设 v-参数曲线 $\boldsymbol{\alpha}(v)=\boldsymbol{x}(0,v)$ 是连结两个固定端点的最短距离的测地线，且 u-参数曲线 $\boldsymbol{x}(u,u_0)$ 是正交于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的测地线．实际上，可以证明在 $\boldsymbol{\alpha}$ 的邻近区域内总是存在这样的坐标补片，这时参数 u，v 称为费米坐标．取 v 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的弧长参数，则度量系数 $E=1$，$F=0$，$G>0$ 且

$$G(0,v)=1\quad 和\quad G_u(0,v)=0.$$

368

第一个等式成立是因为测地线 $\alpha=\mathbf{x}(0,\ v)$ 的参数是弧长参数的，所以 $G(0,\ v)=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=\alpha'\cdot\alpha'=1$. 第二个等式是从定理 5.4.12 中的测地曲率公式推导出来的. 因为 α 是测地线，α' 和 $\mathbf{x}_u$ 的夹角以及度量系数 $E=1$ 为常数，所以 $\kappa_g=0$. 因此，$G_u(0,\ v)=0$. 上面的等式是说在一阶导数的意义下，沿曲线 α 的度量类似于欧几里得度量. 若我们在平面上，就可以取下面的二阶变分.

练习 7.5.21 利用等式 $G(0,\ v)=1$ 和 $G_u(0,\ v)=0$ 证明曲面沿曲线 $\alpha=\mathbf{x}(0,\ v)$ 的高斯曲率 $K=-G_{uu}(0,\ v)/2$. 提示：利用定理 3.4.1.

考虑 α 的形如 $\mathbf{x}(\varepsilon\eta(v),\ v)$ 的变分，其中 ε 很小，且 $\eta(a)=0$，$\eta(b)=0$($\alpha(a)$，$\alpha(b)$ 是 α 上的固定端点)，于是弧长积分为

$$J(\varepsilon)=\int_a^b\sqrt{\varepsilon^2\eta'^2+G(\varepsilon\eta(v),v)}\,\mathrm{d}v.$$

因为假设 α 是最短距离，所以对 ε 的导数为

$$0=\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\left.\int_a^b\frac{2\varepsilon\eta'^2+G_u\eta}{2\sqrt{\varepsilon^2\eta'^2+G(\varepsilon\eta(v),v)}}\mathrm{d}v\right|_{\varepsilon=0}.$$

又因为 α 给出了弧长的最小值，所以弧长函数的二阶导数(在 $\varepsilon=0$)必然非负. 因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}\varepsilon^2}&=\int_a^b\frac{[2\eta'^2+G_{uu}\eta^2]\sqrt{\varepsilon^2\eta'^2+G}-[2\varepsilon\eta'^2+G_u\eta][2\varepsilon\eta'^2+G_u\eta]/2\sqrt{\varepsilon^2\eta'^2+G}}{\varepsilon^2\eta'^2+G}\mathrm{d}v\\&=\int_a^b\frac{2[2\eta'^2+G_{uu}\eta^2][\varepsilon^2\eta'^2+G]-[2\varepsilon\eta'^2+G_u\eta]^2}{2(\varepsilon^2\eta'^2+G)^{3/2}}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

求 $\varepsilon=0$ 的值，得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}&=\int_a^b\frac{2[2\eta'^2+G_{uu}(0,v)\eta^2]G(0,v)-G_u^2(0,v)\eta^2}{2G^{3/2}(0,v)}\mathrm{d}v\\&=\int_a^b(2\eta'^2+G_{uu}(0,v)\eta^2)\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

这是因为 $G(0,\ v)=1$ 且 $G_u(0,\ v)=0$. 如果 α 是连结端点的最短距离的测地线，那么作为函数 $J(\varepsilon)$ 的最小值，上述积分(即 J 的二阶导数)对于所有满足 $\eta(a)=0=\eta(b)$ 的 η 必然非负. 而
369 J 的二阶导数的被积函数是 $f(v,\ \eta,\ \eta')$，所以使得积分取得最小值的 η 满足欧拉-拉格朗日方程. 这样我们就得到了雅可比二阶变分问题. 即我们必须计算 J 的二阶导数的欧拉-拉格朗日方程，

$$2G_{uu}(0,v)\eta-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(4\eta')=0$$

$$\eta''-\frac{G_{uu}(0,v)}{2}\eta=0$$

$$\eta''+K(0,v)\eta=0.$$

这是因为由上面的练习 7.5.21 知 $G_{uu}(0,\ v)=2K$. 显然这就是第 6 章的雅可比方程. 以下是雅可比方程的解和最短长度的测地线的联系. 回忆若 η 是雅可比方程的解，且满足 $\eta(a)=0$，$\eta(c)=0$，则称点 $c\in[a,\ b]$ 共轭于点 a(假设 c 是区间$[a,\ b]$的第一个具有此性质的点). 我们将要证明存在共轭点意味着存在 η 使得 J 的二阶导数为负，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}<0.$$

由上述讨论可知，这意味着 α 不可能是弧长函数的最小值. 换言之，在第一个共轭点出现之前，测地线是最短弧长.（从专业角度，实际上我们只是说对所有充分接近测地线的曲线，在第一个共轭点出现之前，测地线是最短距离的.）

为证明满足 $\eta(c)=0$ 的雅可比方程的解 η 使得 J 的二阶导数为负，我们必须借用变分法中的工具——魏尔斯特拉斯-Erdmann 拐点条件（见[Pin93]或[Sag92]中）. 这个条件是说，沿分段光滑的积分 $J=\int f(t,x,\dot{x})\mathrm{d}t$ 的极值曲线 $x(t)$（即这个极值曲线除有限多个拐点外光滑）的偏导数 $\partial f/\partial\dot{x}$ 在拐点 T 处必须是连续的. 即在拐点 T 两边同时取极限，极限值相同. 现在设 η 是雅可比方程 $\eta''+K\eta=0$ 的非零解，其中 $\eta(c)=0$，且对任意 $p\in(a,c)$，$\eta(p)\neq0$. 定义

$$\xi(p)=\begin{cases}\eta(p) & \text{对于 } p\in[a,c]\\ 0 & \text{对于 } p\in[c,b].\end{cases}$$

对于变分 ξ（同时利用 $K=-G_{uu}/2$），二阶导数为

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}&=2\int_a^b(\xi'^2-K\xi^2)\mathrm{d}v\\&=2\int_a^b\xi'^2\mathrm{d}v-2\int_a^bK\xi^2\mathrm{d}v\\&=2\int_a^c\eta'^2\mathrm{d}v-2\int_a^cK\eta'^2\mathrm{d}v.\end{aligned}$$ 370

这是因为在 $[a,c]$ 上，$\xi=\eta$；其余 $\xi=0$. 对第一项分部积分，得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}&=2\eta\eta'\Big|_a^c-2\int_a^c\eta\eta''\mathrm{d}v-2\int_a^cK\eta^2\mathrm{d}v\\&=-2\int_a^c\eta[\eta''+K\eta]\mathrm{d}v\\&=0,\end{aligned}$$

这是因为在点 a 和 c 处 η 是零，且 η 满足雅可比方程. 所以 ξ 的二阶导数为零. 那么 ξ 会不会是这个二阶导数的极小值曲线呢？若是，则满足魏尔斯特拉斯-爱尔德曼拐点条件. 在拐点 c 的一侧，J 的二阶导数的被积函数 $\eta'^2-K\eta^2$ 的 η' 导数是 $2\eta'$，而另一侧（在 $\xi=0$ 处），η' 的导数为零. 因此，$\eta'(c)=0$. 又 η 是二阶线性微分方程（雅可比方程）的解，且 $\eta(c)=0$. 由给定初值的微分方程的解的唯一性，必然有 $\eta=0$. 这和 η 的假设相矛盾. 因此 η 不满足魏尔斯特拉斯-爱尔德曼拐点条件，即不是二阶导数的极小值曲线. 因为 η 是这个二阶导数的零点，所以必然存在分段光滑的函数 $\bar{\eta}$，使得二阶导数为负，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}[\bar{\eta}]<0.$$

实际上，这一函数的任意拐点都可以去掉，从而得到一个光滑的函数 $\bar{\eta}$. $\bar{\eta}$ 的存在性说明，原始的测地线不能给出任意过 c 点的两点之间的最短弧长. 这个例子说明了雅可比方程在判定极值曲线为极小值时的重要作用. 同样，由坐标补片 $\boldsymbol{x}(u,v)$ 的定义也可以看出雅可比方程和极值曲线域的存在性密切相关.

除了 E-函数、共轭点以及极值曲线域的问题之外，还有一个我们一直都避而不谈的问题.

虽然欧拉-拉格朗日方程给出了极值曲线的必要条件，但是对于给定的变分问题，可能无解. 例如，考虑去掉原点的平面上连结(1, 0)和(−1, 0)的最短距离的曲线. 因为连结端点的极值曲线是直线且经过原点，所以无解. 在变分法中，必须具体分析每个问题解的存在性. 这就引出什么类型的函数可能是解的问题. 通常就像上面例 7.5.20 中的那样，变分问题可容许的函
371 数是分段光滑函数，即连续函数，导数存在且除有限个拐点外处处连续. 下面的练习描述了这类问题的微妙之处.

练习 7.5.22 对于满足 $x(0)=1$，$x(1)=0$，积分是

$$J[x]=\int_0^1\left(x^4+x\dot{x}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$$

的固定端点问题.

(1)证明唯一的极值曲线是 $x(t)=0$. 所以不存在极小值曲线.

(2)证明 $J[x]\geqslant 0$. 提示：证明 $J[x]=\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}t$ 并利用 $\dot{x}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

(3)证明 $J[x]$ 趋于 0. 提示：考虑由

$$x(t)=\begin{cases}1-\epsilon t & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{\epsilon}\\[2mm] 0 & \dfrac{1}{\epsilon}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

定义的分段线性函数并计算 $J[x]$.

有很多分析极值曲线是否为极小值曲线的方法，详见[Bli46, Sag92, Ewi85]. 特别地，这里有一种较为常用的称为第二变分的方法，但是我们没有讨论，只是以例 7.5.20 作为示范. [dC76]很好地讨论了如何把第二变分法应用于测地线，而[Opr00]用第二变分法探讨了极小曲面是否有最小面积问题.

7.6 带约束条件的问题

7.6.1 积分约束条件

通常的变分问题需要满足特定的边界条件. 例如，在第 4 章中所看到的空间中围出固定体积的紧曲面的最小面积问题，回忆这个最小曲面是球面(这一条件约束下的变分问题，我们将其设计成描述聚酯薄膜气球的形状，见[Pau94]). 实际上，这类问题以前都是下面这种 2 维情形：给定一个固定长度的闭曲线，它是什么形状时围成的面积最大？因此，此类变分问题有时被称为等周问题(即相同的周长). 本节我们将对以前的工作作必要的修改从而解决这一约束下的变分问题. 问题的标准形式：求曲线使得积分

372 $$J=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,\dot{x})\mathrm{d}t$$

的值最小，而且满足端点条件 $x(t_0)=x_0$，$x(t_1)=x_1$ 且

$$I=\int_{t_0}^{t_1} g(t,x,\dot{x})\mathrm{d}t=c,$$

其中 c 是常数.

现在我们要推导欧拉-拉格朗日方程的另一种形式，它是约束问题的解必须满足的必要条件. 正如前面所述，假设 $x=x(t)$ 是问题的解，取变分 $\hat{x}=x+\varepsilon(a\eta+b\xi)$，其中 $\eta(t_0)=0=\eta(t_1)$，$\xi(t_0)=0=\xi(t_1)$. 我们取两个"扰动"η 和 ξ，因为若只取一个，当保持 I 不变时，就无法变化 J. 取 η 和 ξ，当 J 变化时，可以用一个扰动抵消另一个扰动在 I 上的作用. 由通常的欧拉-拉格朗日方程知

$$0=\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}(a\eta+b\xi)\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t.$$

无论如何要修订以前的讨论，这是因为 $a\eta+b\xi$ 不是任意的. 因为 $I=c$，所以 a 和 b 要满足某些约束条件. 对 I 做相同的讨论，得到

$$0=\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}(a\eta+b\xi)\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t,$$

其中因为 $I=c$ 是常数，所以导数为零. 因为 x 不是 I 的极值曲线，所以关于 g 的欧拉-拉格朗日方程不成立. 但是我们有

$$\int_{t_0}^{t_1}(a\eta+b\xi)\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t=0=\int_{t_0}^{t_1}(a\eta+b\xi)\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t.$$

从而

$$-\frac{\int_{t_0}^{t_1}\xi\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t}{\int_{t_0}^{t_1}\eta\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t}=\frac{a}{b}=-\frac{\int_{t_0}^{t_1}\xi\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t}{\int_{t_0}^{t_1}\eta\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t}.$$

重新整理，得到

$$\frac{\int_{t_0}^{t_1}\xi\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t}{\int_{t_0}^{t_1}\xi\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t}=\frac{\int_{t_0}^{t_1}\eta\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t}{\int_{t_0}^{t_1}\eta\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t}.$$

左边是 ξ 的函数，而右边是 η 的函数. 所以等式仅当两边都等于同一个常数 λ（拉格朗日乘子）时成立，化简表达式 373

$$\frac{\int_{t_0}^{t_1}\eta\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t}{\int_{t_0}^{t_1}\eta\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t}=\lambda$$

得到方程

$$\int_{t_0}^{t_1}\eta\left(\frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mathrm{d}t=0.$$

现在可以继续通常的讨论了. 因为 η 是任意的，所以仅当括号内的项等于零时，上面的等式才成立. 因此我们得到约束问题的欧拉-拉格朗日必要条件.

定理 7.6.1 若 $x=x(t)$ 是标准约束问题的解，则

$$\frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial \dot{x}}\right)=0.$$

例 7.6.2 正如我们在 7.4 节中所看到的那样，平面曲线的弯曲能量定义为沿曲线的曲率平方的积分 $\int \kappa^2(s)\mathrm{d}s$. 回忆在第 1 章中，平面曲线的曲率由 $\dot{\theta}=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s$ 确定，其中 $\theta(s)$ 是单位切线 $T(s)$ 与 x 轴的夹角. 我们将会看到，在讨论哈密顿原理时假设一条线总是试图保持具有最小弯曲能量的形状是合理的.（对于这一思想在生物学上的应用见[Can70]，[DH76a]和[DH76b]）. 因此自然可以提出下面的问题：若一条线的切向量总的变化固定，且端点的变化为零，那么线会取什么形状？作为约束变分问题，可表述为：求积分

$$J=\int_0^1 \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\mathrm{d}s$$

的极小值曲线，其中 $\theta(0)=0$，$\theta(1)=0$，且 $I=\int_0^1\theta\mathrm{d}s=\frac{1}{6}$. 第一个积分中的因子 1/2 只是为了计算上的简洁. 求弯曲能量的极小值显然等价于求它的一半的极小值. 类似地，第二个积分的值取 1/6，也只是为了避免后面出现分数. 即对于这个约束条件的欧拉-拉格朗日方程是 $-\lambda-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dot{\theta}=0$，解为

$$\theta(s)=\frac{\lambda}{2}(-s^2+s).$$

应用约束条件，得

$$\frac{1}{6}=I=\frac{\lambda}{2}\bigg|_0^1\left(-\frac{s^3}{3}+\frac{s^2}{2}\right)=\frac{\lambda}{12}.$$

因此，$\lambda=2$ 且 $\theta(s)=-s^2+s$. 而且，$\theta_d=-s^2+s+d$ 是一个极值曲线域，魏尔斯特拉斯 E-函
374 数是 $E=1/2(\dot{\theta}-p)^2\geqslant 0$. 因此 θ 是满足约束条件的弯曲能量的真正极小值曲线. 前面我们在练习 1.5.14 中已经计算过曲线 θ 的参数方程. 回忆曲率为 $\kappa=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s$ 的平面曲线 $\beta(s)$ 的参数方程是

$$\beta(s)=\left(\int_0^s\cos(\theta(u))\mathrm{d}u,\int_0^s\sin(\theta(u))\mathrm{d}u\right).$$

此例取 $\theta(s)=-s^2+s$，就得到了欧拉螺线(如图 7-3 所示).

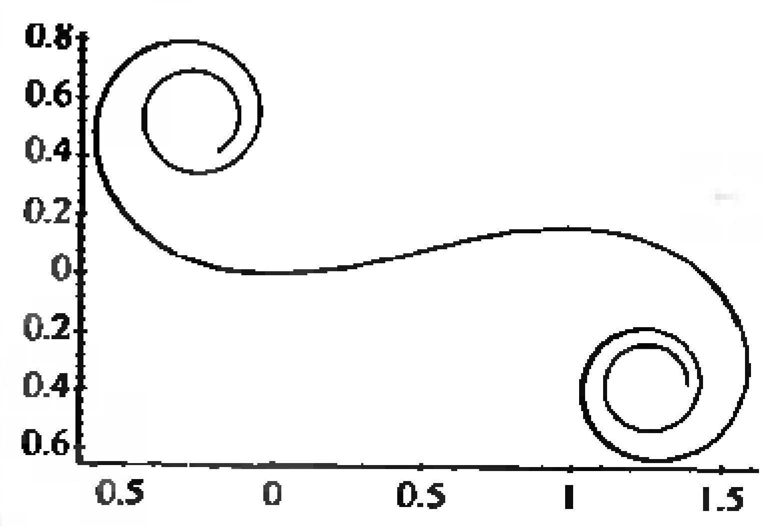


图 7-3 欧拉螺线(Cornu 螺线)

注记 7.6.3 读者可比较前例和典型的有固定长度 L 的弹性杆问题(见[Sag92]). 假设杆分别以 θ_a 和 θ_b 的夹角固定在点(a, y_a)和(b, y_b). 杆平衡时的形状由它的最小势能决定，而最小势能正比于 $\int\kappa^2(s)\mathrm{d}s$. 这个问题的约束条件由固定的角度决定. 投影到 x，y 轴，得 $\int_0^L\cos\theta\mathrm{d}s=b-a$，$\int_0^L\sin\theta\mathrm{d}s=y_b-y_a$. 因此，利用两个拉格朗日乘子，求积分

$$J=\int_0^L\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2-\lambda_1\cos\theta-\lambda_2\sin\theta\mathrm{d}s$$

的极值曲线，得到欧拉-拉格朗日方程

$$\lambda_1 \sin\theta - \lambda_2 \cos\theta - \frac{d}{ds}\left(2\frac{d\theta}{ds}\right) = 0.$$

练习 7.6.4 求欧拉-拉格朗日方程对 s 的积分，得

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\lambda_1}{2}y + \frac{\lambda_2}{2}x + C.$$ 375

解释为什么弹性杆的所有变形点位于一条直线上.

如果旋转由练习 7.6.4 确定的直线 $-\frac{\lambda_1}{2}y+\frac{\lambda_2}{2}x+C=0$，使其成为新的 y 轴，那么弹性杆形状的方程为

$$y = \int \frac{x^2/2+a}{\sqrt{1-(x^2/2+a)^2}}dx + b.$$

练习 7.6.5 求积分

$$J = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\dot{x}\right)dt$$

的极小值曲线，其中端点条件是 $x(0)=0, x(1)=1$，约束条件是 $I=\int_0^1 x dt = \frac{7}{12}$.

练习 7.6.6 求积分

$$J = \int_0^1 \left(xt^2 - \frac{1}{2}\dot{x}^2\right)dt$$

的极小值曲线，其中端点条件是 $x(0)=0, x(1)=1$，约束条件是 $I=\int_0^1 x dt = 1$.

练习 7.6.7 用本节的符号证明(假设拉格朗日乘子 λ 非零)使得 I 为常数、J 极小的曲线 $x(t)$ 同时也是使得 J 为常数、I 极小的曲线.

练习 7.6.8 由练习 1.1.22 知长度固定的自由悬挂链的形状为悬链线 $y=c\cos(x/c+d)$. 证明不仅由练习 1.1.22 中的力的图示可以得到这个结论，而且考虑能量也能得到相同的结果. 即悬链线的势能正比于 $\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx$，且悬链线的平衡位置为势能最低点. 链的长度 $L=\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx$ 是一个约束条件. 因此，当积分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2} - \lambda\sqrt{1+y'^2}dx$$

取得极值时，y 达到平衡位置. 这个积分的极值曲线就是悬链线. 提示：被积函数与 x 无关.

例 7.6.9(等周问题) 求长度为 $L=\int\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$ 且围出的面积最大的闭合曲线. 由格林定理，面积可表示为线积分 $\int(1/2)(-y\dot{x}+x\dot{y})dt$. 因此，此变分问题就变为：求积分

$$J = \int(1/2)(-y\dot{x}+x\dot{y}) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$$ 376

的极大值曲线. 双变量的欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{\dot{y}}{2} - \frac{d}{dt}\left(-\frac{y}{2} - \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) = 0, \quad -\frac{\dot{x}}{2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{2} - \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) = 0.$$

也可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y+\frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-x+\frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)=0.$$

于是有

$$y+\frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=C \quad 和 \quad -x+\frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=-D.$$

通过简单的代数运算，得

$$(x-D)^2+(y-C)^2=\lambda^2,$$

这是圆心在(D, C)半径为$r=\lambda$的圆. 对于圆，$L=2\pi r$. 故$r=\lambda=L/2\pi$且面积$A=L^2/(4\pi)$. 由等周不等式定理 1.6.1 知，此圆就是长为L且围出的面积最大的图形. 这里我们再一次地看到变分法在微分几何中的重要作用.

练习 7.6.10 证明对于该问题双变量的魏尔斯特拉斯E-函数总是非正的. 因此假设它可以嵌入到极值曲线域，那么这个圆就是使得J取最大值的曲线，进而这个圆就是有固定长度且围出最大面积的曲线.

练习 7.6.11 用变分法证明圆是围出面定面积的长度最短的曲线，然后再用下面的论点证明同样的结论. 令α是围出固定面积A和弧长L的闭曲线. 因为圆是固定长度的围出面积最大的曲线，必然有$A\leqslant L^2/(4\pi)$. 通过简单的代数运算可知面积为A的圆的周长小于L. 所以，对于给定的面积A，圆的弧长最小.

练习 7.6.12 圆是等周问题的解，且有固定曲率的平面曲线是圆(见定理 1.3.21). 现在假设要解决曲面M上等周问题. 即求一个有固定长度的闭曲线 C，它在曲面M上围出的面积最大. 证明这样的曲线一定有常测地曲率. 提示：利用练习 4.4.2 和练习 5.1.4 证明，对于固定弧长求最大曲面面积的约束问题，对于任意(适当的)向量场V，有$\int_C(1-\lambda\kappa_g)(U\times T)\cdot V\mathrm{d}s=0$. 由
377 通常的讨论知，$\kappa_g=1/\lambda$.

7.6.2 完整性约束条件

上面的积分约束并非变分问题中出现的唯一约束类型. 我们还将考虑一类几何和力学上的约束问题，称之为完整性约束. 思考下面的情形：一个弹球放在一个光滑的半圆形的碗里，给它一个水平的推力，那么球在碗里的运动轨迹是什么？这里存在两个力，一个是重力，另一个是使球约束在碗里的力. 由达朗贝尔原理知这个约束力在碗的法向量方向，所以对球不做功. 对完整性约束和达朗贝尔原理的讨论见[Arn78]. 为求小球的运动方程，考虑小球的地心引力势能为$V(x, y, z)=mgz$，把小球约束在曲面上的动能$T=(1/2)m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$. 换句话说，因为半径为$R$的球的参数方程为

$$\boldsymbol{x}(u,v)=(R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v),$$

所以，V和T的限定条件是

$$V=mgR\sin v,\quad T=\frac{1}{2}mR^2(\cos^2 v\,\dot{u}^2+\dot{v}^2).$$

为证明后者，可以根据$\dot{u}$，$\dot{v}$直接计算$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$，或者用下面的推理. 小球在 3 维空间中的轨迹是$\alpha(t)=(x(t), y(t), z(t))$，速度向量是$\alpha'(t)=(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. 动能可以写成$T=(1/2)|\alpha'|^2$. 正

如我们前面多次所见，由链式法则 $\alpha'=x_u\dot{u}+x_v\dot{v}$. 又 $F=0$，故而动能是

$$|\alpha'|^2=x_u\cdot x_u\dot{u}^2+x_v\cdot x_v\dot{v}^2$$

$$|\alpha'|^2=E\dot{u}^2+G\dot{v}^2$$

$$T=\frac{1}{2}m(E\dot{u}^2+G\dot{v}^2).$$

显然对于 R 球，$E=\cos^2 v$，$G=1$，所以可以得出上面 T 的表达式. 以上所做体现了完整性约束的本质. 实际上，我们说约束是完整性的，就是将约束曲面的参数形式带入到通常的力学量中所产生的约束条件，例如动能和势能. 由上面的讨论知，球在半圆碗中的作用积分是

$$J=\int\left(\frac{1}{2}mR^2(\cos^2 v\dot{u}^2+\dot{v}^2)-mgR\sin v\right)dt.$$ 378

这个双变量问题的欧拉-拉格朗日方程是

$$mR^2\cos^2 v\dot{u}=c$$

$$-mgR\cos v-mR^2\sin v\cos v\dot{u}^2-mR^2\ddot{v}=0,$$

化简为

$$\dot{u}=\frac{c}{mR^2\cos^2 v}\quad 和\quad \ddot{v}+\frac{g}{R}\cos v+\sin v\cos v\dot{u}^2=0.$$

此处我们用到了被积函数与 u 无关. 当后面使用 Maple 的时候(见 7.10.4 节)，不必这么做. 这就是小球的运动方程. 对应于这些方程的轨迹如图 7-4 所示(用 Maple 绘制的 $g=m=R=1$ 的情形).

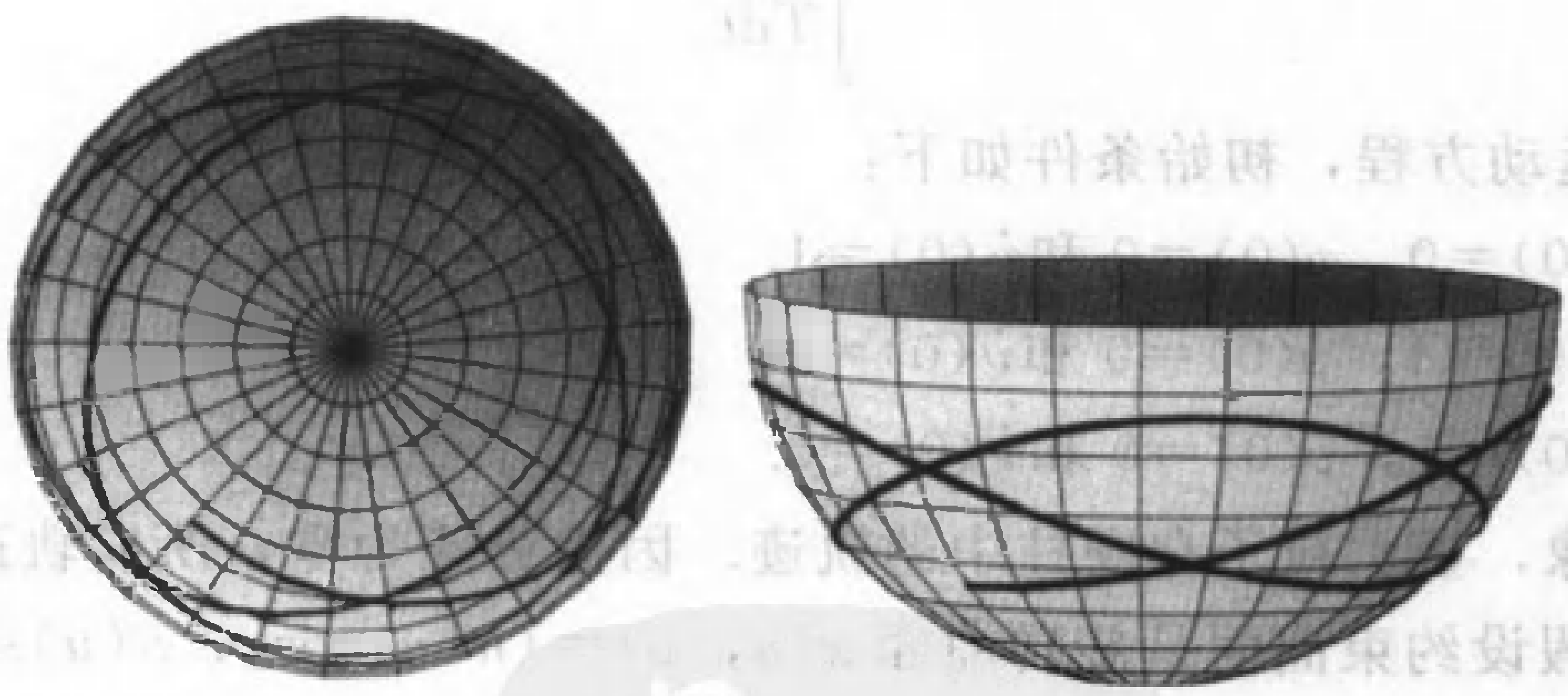


图 7-4 半球碗中的小球

练习 7.6.13 求出小球在抛物形碗中的运动方程. 取 $x(u, v)=(u\cos v, u\sin v, u^2)$ 作为抛物面的参数方程.

考虑曲面 M: $x(u, v)$ 上的势能 $V=0$ 的粒子，就可以看出几何的观点在物理上的作用. 在物理上我们称粒子在曲面上作惯性运动——即仅受约束力的作用. 由达朗贝尔原理，这些力是曲面的法向力，所以粒子的加速度同样在法向量方向. 几何上我们知道这种粒子的轨迹是测地线. 实际上，我们有以下定理(为简单起见，取正交坐标补片).

定理 7.6.14 *若势能为零，根据哈密顿原理，受约束粒子沿测地线运动.*

证明 粒子的动能为

379 $$T=\frac{1}{2}m\mid\alpha'\mid^2=\frac{1}{2}m(E\dot{u}^2+G\dot{v}^2),$$

其中作用积分 $J=\int T\mathrm{d}t$．这一作用积分的欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{E_u}{2}\dot{u}^2+\frac{G_u}{2}\dot{v}^2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E\dot{u})=0 \quad 和 \quad \frac{E_v}{2}\dot{u}^2+\frac{G_v}{2}\dot{v}^2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G\dot{v})=0.$$

关于 t 的导数是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E\dot{u})=(E_u\dot{u}+E_v\dot{v})\dot{u}+E\ddot{u},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G\dot{v})=(G_u\dot{u}+G_v\dot{v})\dot{v}+G\ddot{v}.$$

重新整理并化简，得到

$$\ddot{u}+\frac{E_u}{2E}\dot{u}^2+\frac{E_v}{E}\dot{u}\dot{v}-\frac{G_u}{2E}\dot{v}^2=0$$

和

$$\ddot{v}-\frac{E_v}{2G}\dot{u}^2+\frac{G_u}{G}\dot{u}\dot{v}+\frac{G_v}{2G}\dot{v}^2=0.$$

由哈密顿原理知，这就是粒子的运动方程．再根据第 5 章的知识，这恰好是测地线方程． ■

练习 7.6.15 不考虑重力，动能为 T 的粒子无摩擦地在圆柱 $x(u,v)=(\cos v,\sin v,u)$ 内部滚动．利用求约束在圆柱上的作用积分

$$\int T\mathrm{d}t$$

的极值曲线求小球运动方程，初始条件如下：

a) $u(0)=1$，$\dot{u}(0)=0$，$v(0)=0$ 和 $\dot{v}(0)=1$.

b) $u(0)=1$，$\dot{u}(0)=1$，$v(0)=0$ 和 $\dot{v}(0)=1$.

c) $u(0)=1$，$\dot{u}(0)=1$，$v(0)=0$ 和 $\dot{v}(0)=0$.

并用 Maple 绘制图像，显示粒子在圆柱中的轨迹．因为势能为零，所以轨迹是圆柱的测地线．

练习 7.6.16 假设约束曲面是旋转曲面 $x(u,v)=(h(u)\cos v,h(u)\sin v,g(u))$．取(如上)作用积分 $J=\int T\mathrm{d}t$ 的 v-欧拉-拉格朗日方程，得到 $h^2\dot{v}=b$ 为常数．同样取第一个积分(见练习 7.1.10)，证明极值曲线 α 有常速度．然后利用类似于命题 5.2.16 的方法推导克莱罗关系

380 式 $h(u)\sin\phi=c$.

练习 7.6.17 证明积分 $J=\int T\mathrm{d}t$ 的双变量魏尔斯特拉斯 E-函数总是非负的．因此测地线是否是作用积分取到极小值的曲线就转化为极值曲线域的存在性问题．实际上，共轭点(见定理 6．8．10)恰好就是测地线的端点，故测地线不再是经过共轭点的最短弧长曲线．

练习 7.6.18 $V=V(u,v)$是约束曲面上运动粒子的非零势能，证明粒子的运动方程是

$$\ddot{u}+\frac{E_u}{2E}\dot{u}^2+\frac{E_v}{E}\dot{u}\dot{v}-\frac{G_u}{2E}\dot{v}^2=-V_u$$

和

$$\ddot{v}-\frac{E_v}{2G}\dot{u}^2+\frac{G_u}{G}\dot{u}\,\dot{v}+\frac{G_v}{2G}\dot{v}^2=-V_v.$$

回忆测地线方程的生成过程，这些方程可以写为

$$\alpha''_{un}=\nabla_{\alpha'}\alpha'=-\text{grad}V,$$

其中 V 的梯度是相对于 u，v 的. 因此势能的梯度正是粒子沿测地线运动的阻碍. 当然在守恒系统中，通常记 $-\text{grad}V=F$，故从物理的观点看，力使粒子的运动轨迹偏离了测地线. 这类似于牛顿第一定律.

7.6.3 微分方程约束条件

现在假设要求积分

$$J=\int_{t_0}^{t_1}f(t,x_1,x_2,\cdots,x_k,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_k)\mathrm{d}t$$

的极值，其中 $x_i(t)$ 是使得极值曲线满足 $N<k$ 个微分方程的 k 个 t 的函数：

$$G_1(x_1,x_2,\cdots,x_k,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_k)=0,\cdots,$$

$$G_N(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,x_k,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_k)=0.$$

如通常一样求导(变分 $x_i^*=x_i+\varepsilon\eta_i$)，得

$$0=J'(0)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\eta_1+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}_1}\dot{\eta}_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_k}\eta_k+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}_k}\dot{\eta}_k\right)\mathrm{d}t.$$

这样，对微分方程 G_j 求微分导出 η_i 满足的方程. 因为变分也必须满足这个微分方程的约束，所以取 G_j 对 ε 微分，得(在 $\varepsilon=0$) 381

$$\frac{\partial G_j}{\partial x_1}\eta_1+\frac{\partial G_j}{\partial\dot{x}_1}\dot{\eta}_1+\cdots+\frac{\partial G_j}{\partial x_k}\eta_k+\frac{\partial G_j}{\partial\dot{x}_k}\dot{\eta}_k=0.$$

对 $j=1,2,\cdots,N$，用非限定的函数 $\mu_j(t)$ 乘第 j 个方程，且把这些新方程加入到 $J'(0)$ 的被积函数中，得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_{j=1}^{N}\mu_j\frac{\partial G_j}{\partial x_j}\right)\eta_1+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}_k}+\sum_{j=1}^{N}\mu_j\frac{\partial G_j}{\partial\dot{x}_j}\right)\dot{\eta}_k\right)\mathrm{d}t=0.$$

记 $F=f+\sum_{j=1}^{N}\mu_j(t)G_j$，再分部积分，得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{x}_1}\right)\right)\eta_1+\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{x}_k}\right)\right)\eta_k\right)\mathrm{d}t=0.$$

可是因为满足对 G_j 求微分所得方程，故 η_i 不是相互独立的，所以在这里还不能说每个小括号都是零. 然而，若 $\mathrm{d}G_j/\mathrm{d}\varepsilon$ 作为函数是独立的，因为 N 个方程中有 k 个未知量，那么我们希望 $k-N$ 个是无关的. 假设 $\eta_1,\cdots,\eta_N$ 可由 $\eta_{N+1},\cdots,\eta_k$ 表出.

令 $\mu_1(t),\cdots,\mu_N(t)$ 是使得积分中前 N 个括号为零的函数的任意集合，则积分变为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_{N+1}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{x}_{N+1}}\right)\right)\eta_1+\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{x}_k}\right)\right)\eta_k\right)\mathrm{d}t=0.$$

而 η_{N+1}，…，η_k 是独立的，由通常的讨论知每个括号都是零，即对于 $j=N+1$，…，k，有

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\right)=0.$$

同样，由 $\mu_i(t)$的选择，对 $j=1$，2，…，N，有

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\right)=0.$$

因此，就有通常的欧拉-拉格朗日方程组.

定理 7.6.19 如果积分

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x_1,x_2,\cdots,x_k,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_k)\mathrm{d}t$$

的极值曲线(其中 $x_i(t)$是 k 个 t 的函数)满足 $N<k$ 个微分方程

$$G_1(x_1,x_2,\cdots,x_k,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_k)=0,\cdots,$$

382 $$G_N(x_1,x_2,\cdots,x_k,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_k)=0,$$

那么它是

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}\right)=0,\quad j=1,\cdots,k$$

的解，其中 $F=f+\sum_{j=1}^{N}\mu_j(t)G_j$.

例 7.6.20(二阶积分) 我们考虑二阶积分的情形

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,\dot{x},\ddot{x})\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,y,\dot{y})\mathrm{d}t$$

且附加微分方程条件

$$y-\dot{x}=0.$$

取 $F=f(t,x,y,\dot{y})+\mu(t)(y-\dot{x})$，则欧拉-拉格朗日方程是

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\mu)=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}+\mu-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}+\mu-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)=0.$$

消去 μ，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right)=0.$$

这就是通常说的二阶欧拉-拉格朗日方程.

7.7 微分几何与力学中的进一步应用

本节中我们将看到测地线的弧长势能最小. 而且我们将定理 7.6.14 推广到为：粒子总是沿着测地线运动的——曲面上的度量是与最初给定的度量相关的共形度量. 同时也会看到由变分原理如何诱导 3.6 节的德洛奈曲面.

我们总是说从常理来看，测地线应该是弧长最短的曲线. 我们使用的测地线的定义是加速度没有切分量的曲线，因为这刻画了 3 维空间的直线而且看起来是一个可以直接验证的条件. 我们在定理 6.8.10 中学到(还有例 7.5.20)，测地线并不总是有最短弧长，但我们还是要问测地线是不是弧长的极值曲线. 为方便我们假设度量 $F=0$. 383

定理 7.7.1 *M：$x(u, v)$是度量为 E 和 G 的曲面，那么，弧长积分*

$$J=\int\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}\,\mathrm{d}t$$

的极值曲线是曲面 M 上的测地线.

证明 双变量的欧拉-拉格朗日方程是

$$\frac{E_u\dot{u}^2+G_u\dot{v}^2}{2\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E\dot{u}}{\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}}\right)=0,$$

$$\frac{E_v\dot{u}^2+G_v\dot{v}^2}{2\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{G\dot{v}}{\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}}\right)=0.$$

因为测地线必须参数化为常速度，所以引进弧长参数 $s(t)$. 这意味着有关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cdot\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2},$$

$$u'=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{\dot{u}}{\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}},\quad v'=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{\dot{v}}{\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}}.$$

代入上面的方程(且除以因子$\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}$)，得

$$\frac{E_u}{2}u'^2+\frac{G_u}{2}v'^2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(Eu')=0,$$

$$\frac{E_v}{2}u'^2+\frac{G_v}{2}v'^2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(Gv')=0.$$

微分并化简得

$$u''+\frac{E_u}{2E}u'^2+\frac{E_v}{E}u'v'-\frac{G_u}{2E}v'^2=0$$

和

$$v''-\frac{E_v}{2G}u'^2+\frac{G_u}{G}u'v'+\frac{G_v}{2G}v'^2=0.$$

这就是测地线方程. ■

注记 7.7.2 弧长积分的魏尔斯特拉斯 E-函数为

$$E(t,u,v,\dot{u},\dot{v},p_1,p_2)=\frac{\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}\sqrt{Ep_1^2+Gp_2^2}-(E\dot{u}p_1+G\dot{v}p_2)}{\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}}.$$

因为由度量 E，G 可以定义每个切平面的内积为

$$\boldsymbol{v}\circ\boldsymbol{w}=Ev_1w_1+Gv_2w_2,$$

384 且对内积有施瓦茨不等式 $|\boldsymbol{v}\circ\boldsymbol{w}|\leqslant|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|$，所以 $E\geqslant 0$. 因此我们再一次看到，测地线有最短距离的性质完全依赖于极值曲线域的存在性，进而依赖于雅可比方程的解没有零点.

练习 7.7.3 取测地线方程

$$u''+\frac{E_u}{2E}u'^2+\frac{E_v}{E}u'v'-\frac{G_u}{2E}v'^2=0$$

$$v''-\frac{E_v}{2G}u'^2+\frac{G_u}{G}u'v'+\frac{G_v}{2G}v'^2=0.$$

第一个方程乘以 $-v'$，第二个方程乘以 u'，相加并比较定理 5.1.5 的公式，证明这个弧长积分的极值曲线的测地曲率是零(因此是测地线)

练习 7.7.4 考虑上面(弧长参数化的)弧长积分的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(Eu')=\frac{E_u}{2}u'^2+\frac{G_u}{2}v'^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(Gv')=\frac{E_v}{2}u'^2+\frac{G_v}{2}v'^2.$$

令 $\alpha(s)$ 是极值曲线(即是这些方程的解曲线)，直接证明 α'' 的切分量为零. 提示：记 $\alpha'=\boldsymbol{x}_u u'+\boldsymbol{x}_v v'$，故 $Eu'=\alpha'\cdot\boldsymbol{x}_u$，$Gv'=\alpha'\cdot\boldsymbol{x}_v$. 对等式的右边微分，再比较欧拉-拉格朗日方程.

我们知道测地线是弧长积分的极值曲线. 利用约束在保守系中的运动方程的雅可比方程，我们可以给出一个很漂亮的解释. 回忆动能和势能的公式：

$$T=\frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right|^2=\frac{1}{2}(E\dot{u}^2+G\dot{v}^2)\quad 和\quad V=V(u,v),$$

其中 α 是粒子的轨迹. 因为作用积分 $\int(T-V)\mathrm{d}t$ 与 t 无关，所以练习 7.1.10 中第一个双变量

385 积分表明沿运动轨迹，能量 $H=T+V$ 为定值. 特别地

$$T-V-\dot{u}\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{u}}-\dot{v}\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{v}}=c$$

$$\frac{1}{2}(E\dot{u}^2+G\dot{v}^2)-V-\dot{u}(E\dot{u})-\dot{v}(G\dot{v})=c$$

$$\frac{1}{2}(E\dot{u}^2+G\dot{v}^2)-V-E\dot{u}^2-G\dot{v}^2=c$$

$$-\frac{1}{2}(E\dot{u}^2+G\dot{v}^2)-V=c$$

$$T+V=-c.$$

这里和下面用 H 表示能量，以区别于度量 E.

现在取曲线 α：$I\to M$ 表示粒子在限定曲面 M 上的运动轨迹，这个轨迹是由哈密顿原理决定的. 取曲面的度量为 E、$F=0$ 和 G. 我们知道粒子的轨迹必须保持能量不变，因为这个条件和单位速度条件不相容，所以我们必须将曲线参数化为有面定的能量. 为此设 H_0 表示沿粒子轨迹的能量，且定义

$$\tau = \int \frac{1}{\sqrt{2(H_0 - V)}} \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}\, dt.$$

引理 7.7.5 重新参数化的曲线 $\alpha(\tau)$ 有固定的能量.

证明 首先由微积分基本定理知

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2(H_0 - V)}} \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2},$$

所以由链式法则有

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{du}{dt}\frac{\sqrt{2(H_0 - V)}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}},$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dv}{dt}\frac{\sqrt{2(H_0 - V)}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}}.$$

利用这些等式，下面的计算说明重新参数化后沿曲线仍然保持能量 H_0 不变. 386

$$\begin{aligned}
T(\tau) + V(\tau) &= \frac{1}{2}\left(E(\tau)\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 + G(\tau)\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2\right) + V(\tau) \\
&= \frac{1}{2}\left(E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \frac{2(H_0 - V)}{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \frac{2(H_0 - V)}{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}\right) + V \\
&= 2(H_0 - V)\frac{1}{2}\left(\frac{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}\right) + V \\
&= H_0 - V + V \\
&= H_0.
\end{aligned}$$

■

而且，这一计算说明 $T(\tau) = H_0 - V$. 同时由一般能量方程 $T + V = H$ 得 $2T - H = 2T - (T + V) = T - V$. 我们将利用这两个方程确定粒子运动方程是 $\int (T(\tau) - V(\tau))d\tau$ 的极值曲线. 注意因为能量守恒，所以这一极值曲线必然存在于能量为 H_0 的曲线族中. 第一步就是由上面的讨论知

$$\int (T(\tau) - V(\tau))d\tau = \int (2T(\tau) - H_0)d\tau.$$

而且因为常数的导数为零，所以在被积函数上加一个常数对欧拉-拉格朗日方程没有影响. 因此求上述等式两边的极值曲线等价于求

$$\begin{aligned}
\int 2T(\tau)d\tau &= \int 2(H_0 - V)d\tau \\
&= \int 2(H_0 - V)\frac{d\tau}{dt}dt \\
&= \int 2(H_0 - V)\frac{1}{\sqrt{2(H_0 - V)}}\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}\,dt \\
&= \int \sqrt{2(H_0 - V)E\dot{u}^2 + 2(H_0 - V)G\dot{v}^2}\,dt \\
&= \int \sqrt{\overline{E}\dot{u}^2 + \overline{G}\dot{v}^2}\,dt
\end{aligned}$$

的极值曲线，其中 $\tilde{E}=2(H_0-V)E$，$\tilde{G}=2(H_0-V)G$ 定义了 M 的新度量，是与初始的 E 和 G 相关的共形度量(这里我们假设在参数域中有 $H_0>V$)．显然，现在求 $\int(T-V)\mathrm{d}\tau$ 的极值曲线其实就是求 $\int\sqrt{\bar{E}\dot{u}^2+\bar{G}\dot{v}^2}\mathrm{d}t$ 的极值曲线．根据定理 7.7.1，$\int\sqrt{\bar{E}\dot{u}^2+\bar{G}\dot{v}^2}\mathrm{d}t$ 的极值曲线是 M
387 中对应于度量 $\bar{E}=2(H_0-V)E$ 和 $\bar{G}=2(H_0-V)G$ 的测地线．因此，以下是雅可比的结论在 $F=0$ 时的特殊情形．

定理 7.7.6 *设曲面 M 的度量是 E，$F=0$，G，α 表示有固定能量 H_0 的粒子在势能 V 作用下约束在曲面 M 上的运动轨迹，则对 $H_0>V$，α 是 M 的相对于共形度量*

$$\bar{E}=2(H_0-V)E,\quad \bar{F}=0,\quad \bar{G}=2(H_0-V)G$$

的测地线．

这个定理很难明确地描述运动方程，不过告诉我们测地线应用于力学系统的一个理论上的结果．特别地，力学系统中一个很重要的问题是是否存在周期解．也就是说对于某些粒子，以后的某个时刻是否再次经过初始位置．由上面的定理，这个问题等价于曲面 M(在任意度量下)是否存在闭合的测地线——测地线 α：$[a,b]\to M$ 满足 $\alpha(a)=\alpha(b)$．1951 年 Lusternik 和 Fet [LF51](也见[Kli78])证明了一个一般的定理．特别地，紧致曲面(即闭有界)一定存在闭合的测地线．将这个结果应用于曲面并结合雅可比定理有下面推论．

推论 7.7.7 *若 M 是紧致曲面，$V(u,v)$ 是定义在 M 的参数域 (u,v) 上满足 $H_0>V(u,v)$ 的势函数．则曲面上的粒子在 V 作用下的运动方程有周期解．*

例 7.7.8(双体问题) 下回的问题源于[Pin75]．假设两个连结体的势能是 V，且该势能仅依赖于它们间的距离．由力学原理知，这个问题可以简化为向心力作用下单个物体的平面运动．沿固定能量曲线运动的雅可比度量的共形比例因子为 $f=1/\sqrt{2(H_0-V)}$，因此由练习 5.4.2 知高斯曲率

$$K=\frac{1}{4}\left[\frac{V_{uu}+V_{vv}}{(H_0-V)^2}+\frac{V_u^2+V_v^2}{(H_0-V)^3}\right].$$

练习 7.7.9 利用练习 5.4.2 证明上面的高斯曲率公式．这个曲率称为力学曲率．并证明若 V 在 (u_0,v_0) 局部最小，则对任意充分接近 (u_0,v_0) 的点 (u,v)，有 $K(u,v)>0$．类似地，在局部最大值附近有 $K(u,v)<0$．

练习 7.7.10 $V=-1/\sqrt{u^2+v^2}$ 是平面的牛顿势能．证明

388 $$V_u^2+V_v^2=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\quad 和\quad V_{uu}+V_{vv}=-\frac{1}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

利用练习 7.7.10，由牛顿势能 $V=-1/\sqrt{u^2+v^2}$ 知

$$K=-\frac{H_0}{4(H_0\sqrt{u^2+v^2}+1))^3}=-\frac{H_0}{4(H_0r+1))^3}.$$

其中 $r=\sqrt{u^2+v^2}$ 是到原点的距离．由常能量方程 $(1/2)v^2-1/r=H_0$ 得到 $v^2=2(H_0r+1)/r>0$．因此 K 的分母为正．所以

$$H_0>0\Leftrightarrow K<0$$

$$H_0 = 0 \Leftrightarrow K = 0$$
$$H_0 < 0 \Leftrightarrow K > 0.$$

对于双体问题，轨道可由能量确定(见[PC93])．结合上面的结果，得

$$K < 0 \Leftrightarrow H_0 > 0 \Leftrightarrow \text{轨道是双曲型的，}$$
$$K = 0 \Leftrightarrow H_0 = 0 \Leftrightarrow \text{轨道是抛物型的，}$$
$$K > 0 \Leftrightarrow H_0 < 0 \Leftrightarrow \text{轨道是椭圆型的.}$$

由此可见对于双体问题，轨道由高斯曲率确定．特别地，存在 $K>0$ 的点保证了周期轨道的存在性.

在结束雅可比定理的讨论之前，我们要明确指出所有的命题在高维的时候同样成立．现在来看爱因斯坦关于重力几何化的一个重要结论：粒子、行星和光子都沿着它们所在时空区域的测地线运动，而度量由该区域的质量能决定．我们可以将爱因斯坦的断言看成是雅可比定理的一个自然演变.

下面我们将利用哈密顿原理研究一些地球上的物理问题.

例 7.7.11(钟摆问题)　将一个长为 ℓ 的钟摆拉离其平衡位置然后释放(垂直悬挂)，让其自由摆动．运动方程是什么？所用的坐标是摆线和垂直轴的夹角 y．质量为 M 的摆锤的势能

$$V = Mgh = Mg\ell(1-\cos(y)),$$

其中 $g=9.8m/s^2$，h 是高出零势能点的高度(即平衡点)．因为线速度 v 等于角速度$\dot{y}$乘以半径 ℓ，所以它的动能为

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\ell^2\dot{y}^2.$$

于是有

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\ell^2\dot{y}^2 - Mg\ell(1-\cos(y)).$$ 389

且欧拉-拉格朗日方程是

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)\\ &= -Mg\ell\sin(y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\ell^2\dot{y})\\ &= -Mg\ell\sin(y) - M\ell^2\ddot{y}\\ &= \ddot{y} + \frac{g}{\ell}\sin(y).\end{aligned}$$

说明此时欧拉-拉格朗日方程可以化简为通常的摆的运动方程.

例 7.7.12(联合弹性摆)　假设质量为 m 的物体由一条弹性系数为 k 的弹性绳连结，作水平运动．它和长为 ℓ 的摆连结，摆锤的质量为 M．我们将用坐标 x 和 y 描述这一运动，其中 x 是质量为 m 的物体到平衡位置的距离，y 是(和例 7.7.11 中一样)摆和垂直方向的夹角(实际上，我们取的这些变量和以后 Maple 中取的一样)．回忆虎克定律，弹性恢复力为 $F=-kx$，弹性势能为 $V=kx^2/2$．因此，考虑质量为 M 的振子的运动．它的势能是

$$V = \frac{kx^2}{2} + Mg\ell(1-\cos(y)).$$

处理动能稍微麻烦一些．设 r 和 s 分别表示 M 距离平衡位置的水平和竖直方向的距离．于是有

$$r = x + \ell\sin(y) \quad 和 \quad s = \ell - \ell\cos(y).$$

M 的速度为

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{s}^2} = \sqrt{(\dot{x} + \ell\cos(y)\,\dot{y})^2 + \ell^2\sin^2(y)\,\dot{y}^2},$$

所以

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + M\ell\cos(y)\,\dot{x}\,\dot{y} + \frac{1}{2}M\ell^2\,\dot{y}^2. \end{aligned}$$

系统的拉格朗日方程是

390 $$L = \frac{1}{2}(m+M)\,\dot{x}^2 + M\ell\cos(y)\,\dot{x}\,\dot{y} + \frac{1}{2}M\ell^2\,\dot{y}^2 - \frac{kx^2}{2} - Mg\ell(1-\cos(y)).$$

且欧拉-拉格朗日方程是(由练习 7.1.7)

$$-kx - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((m+M)\,\dot{x} + M\ell\cos(y)\,\dot{y}) = 0$$

$$(m+M)\,\ddot{x} - M\ell\sin(y)\,\dot{y}^2 + M\ell\cos(y)\,\ddot{y} = -kx$$

和

$$-M\ell\sin(y)\,\dot{x}\,\dot{y} - Mg\ell\sin(y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\ell\cos(y)\,\dot{x} + M\ell^2\,\dot{y}) = 0$$

$$M\ell^2\,\ddot{y} + M\ell\cos(y)\,\ddot{x} + Mg\ell\sin(y) = 0$$

$$\ell\ddot{y} + \cos(y)\,\ddot{x} + g\sin(y) = 0.$$

这就是弹性摆系统的运动方程．虽然这个方程无法手工求解，但是我们可以用 Maple 求出它的数值解，并绘制 M 的运动轨迹．见 7.10.3 节和练习 7.10.7.

练习 7.7.13(双摆)　假设两个摆相连，一个固定在曲面上，另一个固定在第一个的摆锤上．设第一个摆锤的质量为 m，第二个摆锤的质量为 M．同时假设它们的摆长都是 ℓ．摆角分别用偏离竖直位置的夹角 x 和 y 表示．证明它们的势能和动能分别是

$$V = mg\ell + mg\ell(1-\cos(x)) + Mg\ell(2-\cos(x)-\cos(y)),$$

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\ell^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + M\ell^2\,\dot{x}\,\dot{y}\cos(x-y).$$

其中选取距离双摆的悬挂点下 2ℓ 的平面作为势能零点．分别用单位向量 $\hat{x} = (\cos x,\ \sin x)$ 和 $\hat{y} = (\cos y,\ \sin y)$ 表示它们的圆周运动，且 M 的速度为 $\ell(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y})$．利用速度和它自身的点积可以求出动能．一旦动能和势能确定，我们就可以求出作用积分的欧拉-拉格朗日方程，并用 Maple 画出 M 在不同初始条件下的运动轨迹．

例 7.7.14(张紧的绳)　假设一根两端固定的绳，轻扯一下，绳将会怎样？我们将绳拉起的高度看成是函数 $u(t,\ x)$，则 t 时刻的动能 $T = 1/2\int_0^L \rho u_t(t,x)^2\,\mathrm{d}x$，其中 L 是两端点间的距离，$\rho = \rho(t,\ x)$ 是绳的线密度．因为绳被拉的最大值通常都很小，所以我们假设绳的弯曲功是

可以忽略不计的．唯一的势能就是绳相对于自身长度 L 的弹性势能，其中 $\tau=\tau(t, x)$ 是绳的弹 391
性力．这里我们同样忽略了重力的作用．在时刻 t，

$$V=\int_0^L \tau(\sqrt{1+u_x^2}-1)\mathrm{d}x.$$

系统的作用积分为

$$J=\int_0^T\int_0^L \frac{1}{2}\rho u_t(t,x)^2-\tau(\sqrt{1+u_x^2}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

初始波动决定的边界条件为 $u(t, 0)=0$，$u(t, L)=0$ 和 $u(0, x)=u_0(x)$，$u_t(0, x)=v(x)$．因为被积函数形如

$$f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x)),$$

所以必须使用练习 7.1.8 中的两个自变量的欧拉-拉格朗日公式．故有

$$0-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho u_t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-\tau u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho u_t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\tau u_x)=0$$

$$(\rho u_t)_t=(\tau u_x)_x$$

$$\rho u_{tt}=\tau u_{xx}$$

$$u_{tt}=\sigma^2 u_{xx},$$

其中在第二行我们利用 $|u_x|\ll 1$ 的假设消去了平方根(虽然在数学上这是不严格的)，在最后一行我们假设 ρ 和 τ 是常数(实际上即使直到取微分以后再假设 $|u_x|\ll 1$，我们依然可以得到相同的等式)．方程 $u_{tt}=\sigma^2 u_{xx}$ 称为 1 维波动方程．我们用分离变量法解这个方程．假设解的形式为 $u(t, x)=\phi(t)f(x)$，且 $u_{tt}=\ddot{\phi}(t)f(x)$ 和 $u_{xx}=\phi(t)f''(x)$．波动方程就变成

$$\ddot{\phi}(t)f(x)=\sigma^2\phi(t)f''(x),$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\frac{\ddot{\phi}}{\phi}=\frac{f''(x)}{f(x)}.$$

左边只是 t 的函数，右边只是 x 的函数，而两边又相等仅当它们都等于同一个常数 $-\lambda$(由物理意义 $\lambda>0$)．我们得到两个减弱的波动方程：

$$\ddot{\phi}+\lambda\sigma^2\phi=0,$$

$$f''+\lambda f=0.$$ 392

通解为

$$\phi(t)=A\cos(\sigma\sqrt{\lambda}t)+B\sin(\sigma\sqrt{\lambda}t),$$

$$f(x)=C\cos(\sqrt{\lambda}x)+D\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

由绳的初始条件知 $C=0$，以及因为 $D\sin(\sqrt{\lambda}L)=0$ 且 $f\neq 0$，所以存在整数 n，使得 $\sqrt{\lambda}L=n\pi$．因此，$\lambda=(n\pi/L)^2$．最终解为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi\sigma t}{L}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi\sigma t}{L}\right)\right),$$

其中 $u_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$，$v(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi\sigma}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. 波动的基本频率是

$$\omega_n=\frac{n\pi\sigma}{L}=\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}.$$

对于低能系统，频率与 τ 和 ρ 的平方根以及 L 的相反数有关. 具体地说，L 增加，则基本频率变小(任何一个小提琴演奏者都知道).

在结束本节之前，我们想再展示另一个前面学过但在这里可以看作约束变分问题的例子. 在 3.6 节我们考虑过有常平均曲率的旋转曲面——所谓的德洛奈曲面. 回忆这些曲面可以由特定的微分方程

$$h^2\pm\frac{2ah}{\sqrt{1+h'^2}}=\pm b^2$$

刻画，其中 a 和 b 是常数. $h=h(u)$表示旋转曲面的轮廓曲线(或平面上的子午线). 考虑使得体积 $V=\pi\int h(u)^2\mathrm{d}u$ 固定和面积 $S=2\pi\int h(u)\sqrt{1+h'(u)^2}\mathrm{d}u$ 极小的旋转曲面是什么样的呢? 可以建立一个变分问题：求积分

$$J=\int\left(2h(u)\sqrt{1+h'(u)^2}-\lambda h^2(u)\right)\mathrm{d}u$$

的极小值曲线.

定理 7.7.15 上述变分问题的极值曲线是德洛奈曲面.

证明 因为积分与自变量 u 无关，所以我们可以用第一个积分 $f-\dot{x}(\partial f/\partial\dot{x})=c$ 代替欧拉

393 -拉格朗日方程.

$$2h\sqrt{1+h'^2}-\lambda h^2-h'\left(\frac{2hh'}{\sqrt{1+h'^2}}\right)=c$$

$$2h(1+h'^2)-\lambda h^2\sqrt{1+h'^2}-2hh'=c\sqrt{1+h'^2}$$

$$2h=(c+\lambda h^2)\sqrt{1+h'^2}$$

$$\frac{2h}{\sqrt{1+h'^2}}=c+\lambda h^2$$

$$-\lambda h^2+\frac{2h}{\sqrt{1+h'^2}}=c$$

$$h^2\pm\frac{2ah}{\sqrt{1+h'^2}}=\pm b^2,$$

其中 $a=-1/\lambda$，$b=-c/\lambda$. 显然这恰好是上面提及刻画有常平均曲率的旋转曲面的方程. ■

我们在第 3 章中提到很多单细胞生物的对称转动和形状看起来都酷似德洛奈曲面. D'Arcy Wentworth Thompson 曾经提出：是不是体积固定外加特定生物的对称趋向使得面积极小的曲面一定是已知的曲面. 因为我们在第 4 章中已经知道常平均曲率的紧致曲面是球面，所以汤普生还需要加上其他生物上的条件使得没有"紧致性"的德洛奈曲面的存在是合理的. 更多关于细胞形态学的知识可以参考[Tho92]和[HT85].

7.8 庞特里亚金最大值原理

优化控制定理在处理变分问题时与变分法略有不同. 我们将介绍优化控制中的一个主要结果——庞特里亚金最大值原理——以及如何将它应用在几何中. 这个结论在处理非连续问题时很有用(称为砰砰控制), 诸如火箭发动机的控制和轨道控制. 这里只考虑一些简单的几何应用. 对于这一原理非几何方面的初步介绍见[Pin93]. 同样, 我们只是研究 2 维的问题.

优化控制的主要问题是求满足微分方程组

$$\dot{x}_1 = f_1(x,u), \quad \dot{x}_2 = f_2(x,u),$$ 394

且使得给定的成本函数

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x,u)\,dt$$

取得极小值的轨迹曲线 $x(x_1(t), x_2(t))$(其中 $u(u_1(t), u_2(t))$就是控制数). 注意这里我们用控制理论的下标取代了坐标函数的几何上标. 这对进一步学习优化定理是很方便的. 同样, 典型的优化控制问题也固定系统的初始和最终状态, $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$ 以及初始时间为 t_0. 最后时间 t_1 通常是不确定的. 例如, 太空船要在月球上以最短的时间着陆, 它必须满足由牛顿定律 $F=ma$ 和火箭的推动力控制诱导的微分方程组. 因为时间要最小, 且从 $t_0=0$ 开始, 成本为 $J=\int_{t_0}^{t_1} 1\,dt = t_1$, 所以最终时间 t_1 不是在开始时就确定的, 而是由问题本身决定. 对于这一问题的讨论见[Kir70, p. 247].

那么变分学家如何解决这个问题呢? 因为我们已经见过变分问题的各种类型的约束条件, 所以将微分方程组以及成本积分作为约束条件看起来也是合理的(见 7.6.3 节). 因为$\dot{x}_i(t)=f_i(x, u)$, 所以对于与时间有关的拉格朗日乘子 ψ_i, 有

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi_i(t)(\dot{x}_i(t) - f_i(x,u))\,dt = 0.$$

因此求解上面的优化控制问题也就变成解约束的变分问题: 求积分

$$\widetilde{J} = \int_{t_0}^{t_1} f_0 + \psi_1(\dot{x}_1(t) - f_1(x,u)) + \psi_2(\dot{x}_2(t) - f_2(x,u))\,dt$$

的极小值曲线. 为了解决这个问题, 记下被积函数与 t 无关的第一个积分, 欧拉-拉格朗日方程(关于 4 个函数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$), 计算端点条件, t_1 不确定, $x(t_1)$固定.

因为$\widetilde{J}$的被积函数显然不包含 t, 所以记

$$f_0 + \psi_2(\dot{x}_1(t) - f_1(x,u)) + \psi_2(\dot{x}_2(t) - f_2(x,u)) - \dot{x}_1\psi_2 - \dot{x}_2\psi_2 = c$$

或

$$f_0 - \psi_1 f_1 - \psi_2 f_2 = c. \tag{1}$$ 395

对应于 x_1, x_2, u_1, u_2 的欧拉-拉格朗日方程是

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\partial f_0}{\partial x_1} - \psi_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \psi_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \tag{2}$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{\partial f_0}{\partial x_2} - \psi_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \psi_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \tag{3}$$

$$0=\frac{\partial f_0}{\partial u_1}-\psi_2\frac{\partial f_1}{\partial u_1}-\psi_2\frac{\partial f_2}{\partial u_1} \tag{4}$$

$$0=\frac{\partial f_0}{\partial u_2}-\psi_2\frac{\partial f_1}{\partial u_2}-\psi_2\frac{\partial f_2}{\partial u_2}. \tag{5}$$

练习 7.8.1 验证上面的欧拉-拉格朗日方程.

在注记 7.1.18 中(也可见定理 7.2.4 和下面的例子)，注意使得 $J=\int f\mathrm{d}t$ 取得极值且最终的端点 t_1 位于曲线 $\alpha(t)$ 的一般条件是

$$f(t_1)+(\dot{\alpha}(t_1)-\dot{x}(t_1))\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}(t_1)=0.$$

此处，$\alpha(t)=x(t_1)$，所以 $\dot{\alpha}=0$，于是有

$$f(t_1)-\dot{x}(t_1)\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}(t_1)=0.$$

显然必须用这个条件的多变量形式．注意 $\tilde{J}$ 的被积函数与 $\dot{u}_1$，$\dot{u}_2$ 无关，而且 $F=f_0+\psi_1(\dot{x}_1(t)-f_1(x,u))+\psi_2(\dot{x}_2(t)-f_2(x,u))$，可得到端点条件

$$F(t_1)-\dot{x}_1(t_1)\frac{\partial F}{\partial\dot{x}_1}(t_1)-\dot{x}_2(t_1)\frac{\partial F}{\partial\dot{x}_2}(t_1)=0,$$

也可以写为

$$f_0(t_1)-\psi_1(t_1)f_1(t_1)-\psi_2(t_1)f_2(t_1)=0. \tag{6}$$

为方便起见，定义该问题的哈密顿函数为

$$H=-f_0+\psi_1 f_1+\psi_2 f_2.$$

并注意由方程(1)～(6)知下面的关系成立.

(1)由(1)和(6)知 $H(t,x,u)=0$.

(2)$\dot{\psi}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}$ 和 $\dot{\psi}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}$.

(3)沿最优化轨迹，$\partial H/\partial u_1=0$ 和 $\partial H/\partial u_2=0$.

396 进一步的研究讨论可以得到下面最优性的必要条件.

定理 7.8.2(庞特里亚金最大值原理) 假设 $u(t)$ 是一个控制，使得满足

(状态方程) $\dot{x}_1=f_1(x,u)\quad \dot{x}_2=f_2(x,u)$

的系统沿轨迹 $x(t)$ 从固定状态 x_0 转化到固定状态 x_1．如果 $u(t)$ 和 $x(t)$ 使得成本积分

$$J=\int_{t_0}^{t_1}f_0(x,u)\mathrm{d}t$$

取得极小值，那么存在 ψ_1，ψ_1 使得哈密顿函数 $H=-f_0+\psi_1 f_1+\psi_2 f_2$ 满足

(1)沿最优轨迹，$H(\psi_1,\psi_2,x_1,x_2,u_1,u_2)=0$.

(2)(共态方程) $\dot{\psi}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}$ 和 $\dot{\psi}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}$.

(3)对任意的 t，H 在 $u(t)$ 取得最大值．特别地，

$$\frac{\partial H}{\partial u_1}=0 \quad 和 \quad \frac{\partial H}{\partial u_2}=0.$$

例 7.8.3(测地线) 求曲面 M: $x(u, v)$ 的测地线．其中此曲线有正交度量 E 和 G．用简洁的语言表述这个问题：从 x_0 点开始，控制路径使得弧长最短．因为 M 上的曲线可记为 $\alpha(t)=x(u(t), v(t))$，所以事实上我们感兴趣的是控制函数 $u(t)$，$v(t)$．因此这个最优化的控制问题变为求曲线 $(u(t), v(t))$ 使得

$$\dot{u}=u_1, \quad \dot{v}=u_2$$

且积分

$$J=\int\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}\,\mathrm{d}t=\int\sqrt{Eu_1^2+Gu_2^2}\,\mathrm{d}t$$

取得极小值．与此相关的哈密顿函数是

$$H=-\sqrt{Eu_1^2+Gu_2^2}+\psi_1u_1+\psi_2u_2.$$

共态方程为

$$\dot{\psi}_1=-\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{E_uu_1^2+G_uu_2^2}{2\sqrt{Eu_1^2+Gu_2^2}}, \quad \dot{\psi}_2=-\frac{\partial H}{\partial v}=\frac{E_vu_1^2+G_vu_2^2}{2\sqrt{Eu_1^2+Gu_2^2}}.$$

且 H 的 u 临界点方程为

$$\frac{\partial H}{\partial u_1}=-\frac{Eu_1}{\sqrt{Eu_1^2+Gu_2^2}}+\psi_2=0=-\frac{Gu_2}{\sqrt{Eu_1^2+Gu_2^2}}+\psi_2=\frac{\partial H}{\partial u_2}.$$

由最后的方程得

$$\psi_2=Eu_1/\sqrt{Eu_1^2+Gu_2^2}, \quad \psi_2=Gu_2/\sqrt{Eu_1^2+Gu_2^2}.$$ 397

在共态方程中，代入 ψ_2，ψ_2 的上述表达式，且以 $\dot{u}$，$\dot{v}$ 替代 u_1，u_2，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E\dot{u}}{\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}}\right)=\frac{E_u\dot{u}^2+G_u\dot{v}^2}{2\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{G\dot{v}}{\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}}\right)=\frac{E_v\dot{u}^2+G_v\dot{v}^2}{2\sqrt{E\dot{u}^2+G\dot{v}^2}}.$$

显然，这是定理 7.7.1 中的测地线方程．因此该问题的最优轨迹就是测地线．

注记 7.8.4 对于上述 M 的度量，沿最优轨迹从一点到另一点的路程恰好是 $\int\left|u\right|_{E,G}^2\mathrm{d}t=\int\sqrt{Eu_1^2+Gu_2^2}\,\mathrm{d}t=J$．因此测地线可以看作是可控制的最小花费路径．参照[Pin93]和[Kir70]中的燃料最优化问题．注意使得弧长局部最小的就是测地线．控制量 u_1, u_2 $\left(因此成本 J=\int\sqrt{Eu_1^2+Gu_2^2}\,\mathrm{d}t\right)$ 被称为是局部的，是因为我们由状态方程和成本积分得到 $u(t)$，$v(t)$，而它们依赖于局部的控制信息．这与在所有连结给定端点的曲线中找出最小值——这一变分法的基本概念有很大差别．

练习 7.8.5 利用庞特里亚金最大值原理解决下面的最优控制问题：求满足

$$\dot{x}=u_1, \quad \dot{y}=u_2,$$

$$J=\int\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,\mathrm{d}t$$

的极小值曲线．从而证明平面上给出(1，2)和(2，3)之间的最短弧长的是直线 $y=x+1$.

练习 7.8.6 利用庞特里亚金最大值原理解决 1 维控制问题：求满足

$$y' = u, \quad J = \int y\sqrt{1+u^2}\,dx$$

的极小值曲面．从而证明旋转曲面中面积最小的曲面是悬链面．提示：诱导微分方程 $yy''-y'^2-1=0$，并令 $y'=w$，得 $y''=w(dw/dy)$.

练习 7.8.7(牛顿 Aerodynamical 问题) 牛顿曾经问道：穿过某种介质(他称之为稀有介质)的旋转曲面的最优形状是什么？这里的优化一词意为"在介质中运动的阻力最小"．同时我
398 们也要注意通常的介质如水和低层大气都不是稀有介质，而同温层的大气是稀有介质．用优化控制的语言描述牛顿问题(见[Tik90][VAF87，p.15])．求满足

$$y' = u, u \geqslant 0; \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b,$$

且使得成本

$$J = \int_0^a \frac{x}{1+u^2}\,dx$$

极小的曲线，其中 $y=y(x)$ 表示旋转曲面的轮廓曲线．利用庞特里亚金最大值原理决定 y，从而解决牛顿问题．提示：记住该原理的条件，考虑函数

$$\phi = \frac{w}{1+u^2} + u$$

的极小值．变量 w 的极小值是多少？可以利用 Maple．注意 $u\geqslant 0$．证明 $u=0$ 至少是局部最小的．怎样才能求出他们的最小值？由 u 决定 x 的系数，利用

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} = y'\frac{dx}{du}$$

求 y．不要忘记确定积分常数．问题的解参见练习 1.1.6.

最优化控制问题是 1950 年在研究火箭和卫星发射轨道时提出的，它的出现使得变分法获得了新生．我们现在介绍的只是其中很浅显但也很优美的一部分，而隐去了很多它在曲面几何性质上的应用．

7.9 关于气球形状的应用

聚酯薄膜气球是由两个聚酯薄膜圆环沿边界缝合而成，内充空气或氦气．令人诧异的是，原本我们以为对于给定面积的曲面，要使它体积最大，应该是球形，但事实并非如此．这一实验结果给我们提出这样一个数学问题：一个半径为 a 的圆形的聚酯薄膜气球．当它充满气体时将呈现什么形状(即满足约束条件 7.9.1 最大体积的聚酯薄膜气球是什么形状)？这一问题首先由 W. Paulsen 提出(见[Pau94])，他成功地得到了半径为 r(如图 7-5 所示)厚度为 τ(即南北极间的距离，如图 7-5 所示)的充气气球的体积．鲍尔什用 γ 函数面答了这一问题．这里我们用椭圆函数分析这个气球．这种方法

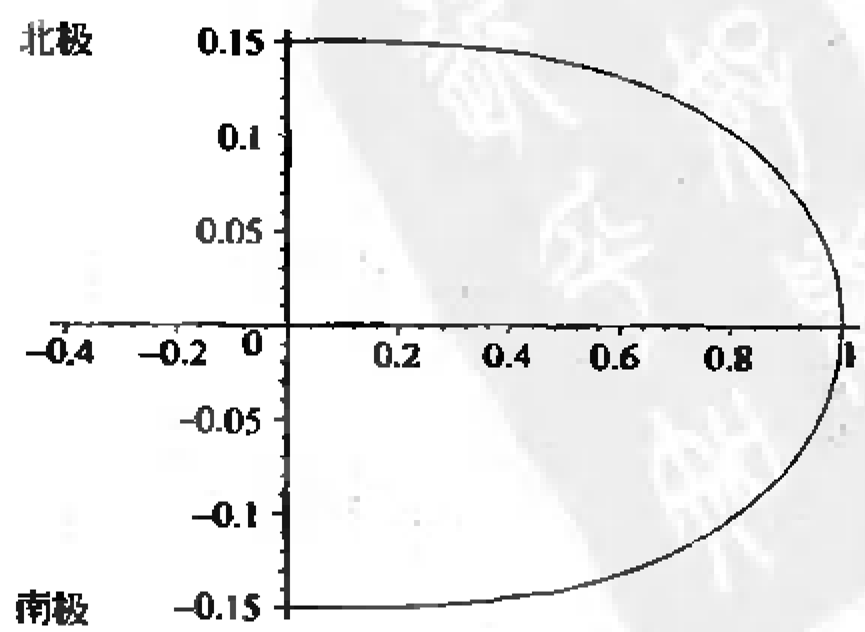


图 7-5 聚酯薄膜气球的轮廓曲线

的好处是可以得到确切的气球参数方程，进而计算高斯曲率和其他不变量. 注意[Opr00]用 Maple 给出了这个问题的数值解. 本节的内容类似于[MO03a]的方法，而且我们在 7.10.5 节也给出 Maple 的方法.

下面我们从鲍尔什最初的气球数学模型开始考虑. 当聚酯薄膜圆盘充满气体时，半径就是 xz 平面上第一象限的一条曲线 $z=z(x)$. 物理直觉告诉我们，曲线从它在 z 轴上的最高点，降到与 x 轴的交点. 这是曲线的右边. 若我们将曲线绕 z 轴旋转，就得到球的上半部分. 下半部分就是上半部分关于 xy 平面的反射.

设 r 是充气气球的半径，(即沿 x 轴从 $x=0$ 到与 x 轴交点的距离). 由其物理性质，聚酯薄膜气球的形状不会有明显的改变. 因此，从 $x=0$ 到 $x=r$ 的曲线 $z(x)$ 的弧长等于起始半径. 即

$$\int_0^r \sqrt{1+z'(x)^2}\,dx = a. \tag{7.9.1}$$

球的基本形状由这个约束条件决定. 显然，当气球充气时内部气压决定了最大体积. 因为气球是旋转曲面，所以由壳体理论，体积是

$$V = 4\pi\int_0^r xz(x)\,dx. \tag{7.9.2}$$

399～400

这样问题就转化为在约束条件 7.9.1 下 V 取得极值的变分问题. 限制的拉格朗日方程是 $f(x, z, z')=4\pi xz(x)+\lambda\sqrt{1+z'(x)^2}$，对应的欧拉-拉格朗日方程是

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda z'(x)}{\sqrt{1+z'(x)^2}}\right)-4\pi x = 0. \tag{7.9.3}$$

积分该方程，容易得到

$$\frac{\lambda z'(x)}{\sqrt{1+z'(x)^2}} = 2\pi x^2 + C, \tag{7.9.4}$$

其中 C 是积分常数. 利用几何(横截性)条件 $z'(0)=0$ 可以确定常数 C. 将 $x=0$ 代入(7.9.4)，且利用 $z'(0)=0$ 得 $C=0$. 因此，

$$\frac{z'(x)}{\sqrt{1+z'(x)^2}} = \frac{2\pi}{\lambda}x^2. \tag{7.9.5}$$

利用满截性条件 $\lim\limits_{x\to r^-} z'(x)=-\infty$，以及曲线从最高点降到与 x 轴的交点一直都没有临界点(即当 $0<x<r$ 时，$z'(x)<0$)，我们可记 $\lambda/(2\pi)$ 为 $-m^2$. 由(7.9.5)解 $z'(x)$，得

$$z'(x) = -\frac{x^2}{\sqrt{m^4-x^4}},$$

积分，有

$$z(x) = \int_x^r \frac{t^2}{\sqrt{m^4-t^4}}dt,$$

其中积分上限的选取是因为要求 $z(r)=0$. 确定了 m，也就是确定了聚酯薄膜气球的轮廓曲线. 若取 $m=r$ 显然 $\lim\limits_{x\to r^-} z'(x)=-\infty$. 因此

$$z(x)=\int_x^r \frac{t^2}{\sqrt{r^4-t^4}}dt \quad (0\leqslant x\leqslant r). \tag{7.9.6}$$

这是个椭圆积分，鲍尔什([Pau94，p.955])发现它的精确解无法用基本函数表出．下面我们将根据椭圆函数给出这个积分(7.9.6)的精确表达式，然后利用这个表达式推导与聚酯薄膜气球的几何性质密切相关的事实．为此将积分变量由 t 变为 u，做替换

$$t=r\,\mathrm{cn}(u,k), \tag{7.9.7}$$

401 其中 $\mathrm{cn}(u,k)$是雅可比余弦函数．在 3.7 节中，给出了椭圆函数的基本性质，且经过(7.9.7)的代换，(7.9.6)变为

$$z(u)=\frac{r}{\sqrt{2}}\int_0^{u_0}\frac{\mathrm{cn}^2(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\mathrm{sn}^2(u,k)}}. \tag{7.9.8}$$

其中 u_0 满足 $\mathrm{cn}(u_0,k)=x/r$．在上面的变换中，需要用到恒等式

$$1-\mathrm{cn}^4(u,k)=(1-\mathrm{cn}^2(u,k))(1+\mathrm{cn}^2(u,k))=\mathrm{sn}^2(u,k)(2-\mathrm{sn}^2(u,k)).$$

而且选取适当的椭圆系数 k，可以进一步化简(7.9.8)．令 $k=1/\sqrt{2}$，由恒等式 $\mathrm{dn}^2(u,k)+k^2\mathrm{sn}^2(u,k)=1$，得

$$z(u)=\frac{r}{\sqrt{2}}\int_0^u \mathrm{cn}^2\left(\tilde{u},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}\,\tilde{u}. \tag{7.9.9}$$

利用命题 3.7.5，可以用椭圆函数给出 $z(u)$的表达式，即

$$z(u)=r\sqrt{2}\left[E\left(\mathrm{sn}\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}F\left(\mathrm{sn}\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{7.9.10}$$

根据(7.9.7)，轮廓曲线(沿逆时针方向)的方程是

$$\begin{aligned} x(u)&=r\,\mathrm{cn}\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\\ z(u)&=r\sqrt{2}\left[E\left(\mathrm{sn}\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}F\left(\mathrm{sn}\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right], \end{aligned} \tag{7.9.11}$$

其中 $u\in[0,K(1/\sqrt{2})]$．注意，$\mathrm{cn}(u,1/\sqrt{2})$从 $1(u=0)$变到 $0(u=K(1/\sqrt{2}))$．

定理 7.9.1(聚酯薄膜气球) *旋转曲面 S 的参数方程为*

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

其中对于 $u\in\left[-K(1/\sqrt{2}),K(1/\sqrt{2})\right]$*且* $v\in[0,2\pi]$，*有*

$$\begin{aligned} x(u,v)&=r\,\mathrm{cn}\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos v,\quad y(u,v)=r\,\mathrm{cn}\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin v,\\ z(u,v)&=r\sqrt{2}\left[E\left(\mathrm{sn}\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}F\left(\mathrm{sn}\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{7.9.12}$$

可以将这个参数形式代入计算机代数体系绘制图形，例如利用 Maple 可以得到聚酯薄膜气
402 球的形状，如图 7-6 所示．

有了轮廓曲线(7.9.11)和聚酯薄膜气球曲面(7.9.12)确切的参数形式，我们可以从现在开

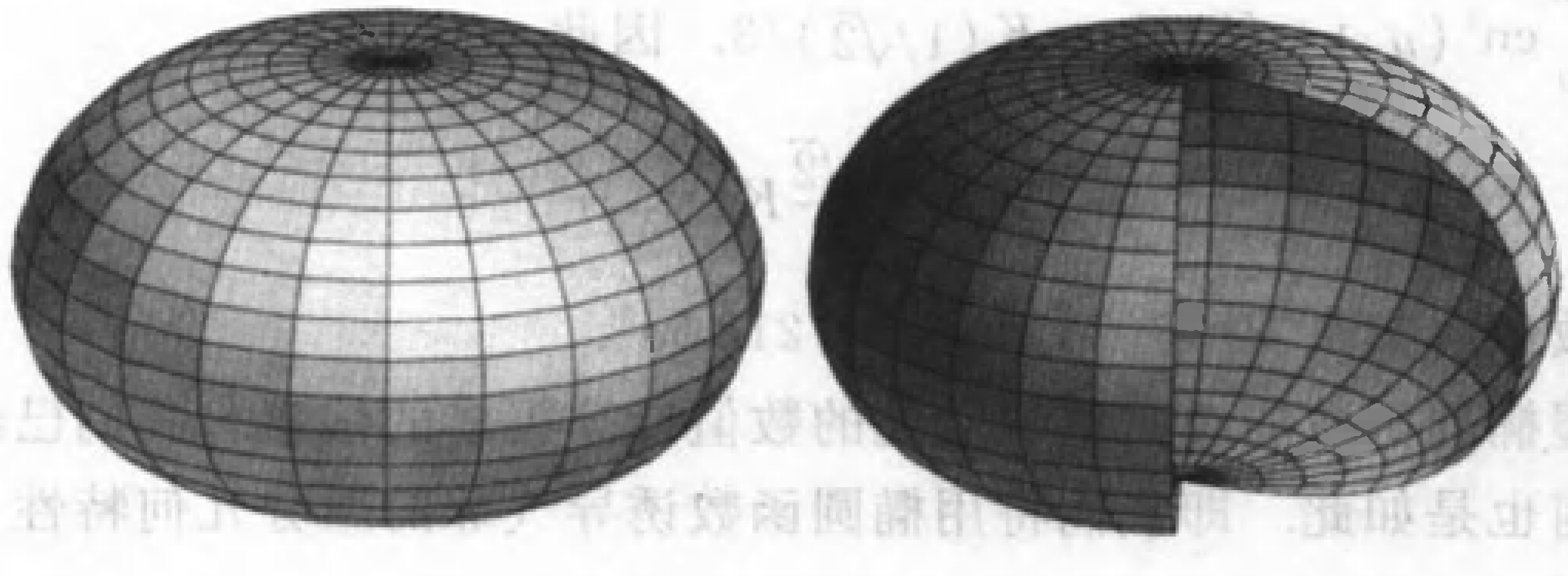


图 7-6 聚酯薄膜气球的两个视图

始研究它们的几何性质. 放气和充气时半径的关系是很重要的. 从(7.9.1)和(7.9.11), 我们可求出弧长(其中 $\mathrm{sn}(u,1/\sqrt{2})$ 简记为 $\mathrm{sn}u$, $K(1/\sqrt{2})$ 简记为 K),

$$\int_0^K\sqrt{x'(u)^2+z'(u)^2}\mathrm{d}u=\int_0^K\sqrt{r^2\mathrm{sn}^2u\mathrm{dn}^2u+r^2\frac{2}{4}\mathrm{cn}^4u\mathrm{d}u}$$

$$=\int_0^K r\sqrt{(\mathrm{sn}^2u)\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{sn}^2u\right)+\frac{1}{2}(1-\mathrm{sn}^2u)^2\mathrm{d}u}$$

$$=r\int_0^K\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}u=\frac{r}{\sqrt{2}}K=a.$$

也就是关系式

$$a=\frac{K(1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}}r. \tag{7.9.13}$$

用 Maple 计算可得 a 和 r 之间的数值关系为

$$a\approx 1.3110r,\quad r\approx 0.7627a. \tag{7.9.14}$$

北极到南极的距离即气球的厚度 $\tau=2z(K(1/\sqrt{2}))$, 其中 z 由(7.9.10)给出. 即

$$\tau=2z(K(1/\sqrt{2})=2\sqrt{2}\left[E(1/\sqrt{2})-\frac{1}{2}K(1/\sqrt{2})\right]r. \tag{7.9.15}$$

再次利用计算机代数系统, 得到 $\tau\approx 1.1981r\approx 0.9139a$.

为计算气球的体积, 首先将 $z(x)$ 的表达式(7.9.6)代入(7.9.2), 转换积分顺序, 对 x 积 403
分, 可得体积积分

$$V=2\pi\int_0^r\frac{t^4}{\sqrt{r^4-t^4}}\mathrm{d}t. \tag{7.9.16}$$

类似于(7.9.7), 积分变为

$$V=\pi\sqrt{2}r^3\int_0^K\mathrm{cn}^4\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}u. \tag{7.9.17}$$

可用数值方法也可以在简化后的公式

$$\int\mathrm{cn}^m u\mathrm{d}u=\frac{1}{(m+1)(1-k^2)}\Big[-\mathrm{cn}^{m+1}u\ \mathrm{sn}u\ \mathrm{dn}u$$

$$+(m+2)(1-2k^2)\int\mathrm{cn}^{m+2}u\mathrm{d}u+(m+3)k^2\int\mathrm{cn}^{m+4}u\mathrm{d}u\Big]$$

中令 $m=0$ 得到 $\int_0^K \mathrm{cn}^4(u,1/\sqrt{2})\,\mathrm{d}u=K(1/\sqrt{2})/3$. 因此，

$$V=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)r^3. \tag{7.9.18}$$

两种方式得到的数值解都是 $V\approx 2.745\,8r^3\approx 1.218\,5a^3$.

当然我们希望椭圆函数能够提供比单纯的数值计算更多的信息. 我们已经从分析的角度看到了一些，从几何也是如此. 即我们将用椭圆函数诱导气球的微分几何特性，进而应用这些结果研究它的曲率.

由关系式 $\mathrm{dn}^2(u,k)+k^2\mathrm{sn}^2(u,k)=1$，式(3.7.3)和 $k=1/\sqrt{2}$，计算定理 7.9.1 中曲面 S 的第一基本形式和第二基本形式的系数：

$$E=\frac{r^2}{2},\quad F=0,\quad G=r^2\mathrm{cn}^2\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$l=r\,\mathrm{cn}\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad m=0,\quad n=r\mathrm{cn}^3\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

虽然这些系数可以手算，但是在计算 l，m，n 时应用计算机代数系统是很方便的.

这些计算的第一个应用就足以使我们震惊. 因为发现聚酯薄膜气球的体积公式包含了第一
404 类完备的椭圆积分，所以我们可以认为它的面积积分也同样复杂. 相反地，有以下定理.

定理 7.9.2 *膨胀半径为 r 的聚酯薄膜气球 S 的曲面面积是 $A(S)=\pi^2r^3$.*

证明 面积元 $\mathrm{d}A(S)$ 为

$$\mathrm{d}A(S)=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sqrt{EG}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{r^3\mathrm{cn}(u,1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

计算以下积分(其中 $K=K(1/\sqrt{2})$)，很容易得到总的曲面面积 $A(S)$ 为

$$\begin{aligned}
A(S)&=\int_S \mathrm{d}A(S)\\
&=\frac{r^3}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-K}^{K}\mathrm{cn}\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=4\pi\frac{r^2}{\sqrt{2}}\int_0^K\frac{\mathrm{cn}(u,1/\sqrt{2})\mathrm{dn}(u,1/\sqrt{2})}{\mathrm{dn}(u,1/\sqrt{2})}\mathrm{d}u\\
&=4\pi\frac{r^2}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1-\frac{1}{2}w^2}}\quad (w=\mathrm{sn}(u,1/\sqrt{2}))\\
&=4\pi\frac{r^3}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\arcsin\left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^1\\
&=4\pi\frac{r^2}{\sqrt{2}}\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\\
&=\pi^2r^3.
\end{aligned}$$

■

接下来我们考虑和气球形状有关的性质. 从第一基本形式和第二基本形式的系数以及 3.2

节的通常的曲率 K 和 H 的公式，很容易计算气球的曲率：

$$K=\frac{r\mathrm{cn}(u,1/\sqrt{2})r\mathrm{cn}^3(u,1/\sqrt{2})}{r^2/2\cdot r^2\mathrm{cn}^2(u,1/\sqrt{2})}=\frac{2\mathrm{cn}^2(u,1/\sqrt{2})}{r^2},$$

$$H=\frac{r^2/2\cdot r\,\mathrm{cn}^3(u,1/\sqrt{2})+r^2\mathrm{cn}^2(u,1/\sqrt{2})r\,\mathrm{cn}(u,1/\sqrt{2})}{2(r^2/2\cdot r^3\mathrm{cn}^2(u,1/\sqrt{2}))}$$

$$=\frac{3\mathrm{cn}(u,1/\sqrt{2})}{2r}.$$

这些公式实际上验证了直观上关于气球几何形状的一个特殊现象．当我们看气球时，感觉它的北极和南极是平的，要准确地说明这一点却很困难．（虽然气球的轮廓曲线和 z 轴垂直相交，但这也无法保证平的，就像球面一样.）但不管怎么说，可以得到足以说明极点是平坦的几何结果． 405

定理 7.9.3 *聚酯薄膜气球的北极点和南极点是平面上的点(即在任意切方向上，法曲率为零)．*

证明 气球的北极点对应于 $u=K(1/\sqrt{2})$，而已知 $\mathrm{cn}(K(1/\sqrt{2}),1/\sqrt{2})=0$．因此，由高斯曲率和平均曲率的公式知它们在该点都为零．因此根据练习 3.1.7，有 $k_1=0$，$k_2=0$．因为它们分别是最大最小的法曲率，所以北极点所有的法曲率为零．由对称性知南极亦然． ■

高斯和平均曲率满足 $K=(8/9)H^2$．由练习 3.1.7，对任意的 u，主曲率满足(旋转曲面的主曲率见练习 3.3.5)

$$k_\mu=k_1=\frac{2\mathrm{cn}(u,1/\sqrt{2})}{r}=2k_2=2k_\pi. \tag{7.9.19}$$

由这些关系我们可以证明聚酯薄膜气球就是一种特殊的外恩加滕曲面(即主曲率满足某个函数关系的曲面)．令人吃惊的是主曲率之间的关系完全刻画了气球．

定理 7.9.4 *若旋转曲面 M 的参数方程是*

$$x(u,v)=(h(u)\cos v,h(u)\sin v,g(u)),$$

其中 $k_\mu=2k_\pi$，那么此曲面有形如(7.9.12)的参数方程．即曲面 M 是聚酯薄膜气球．

证明 根据参数方程．不失一般性．假设 M 的轮廓曲线$(h(u),g(u))$有常速度．(注意满足这一点的聚酯薄膜气球的参数方程不能是：$\sqrt{x'(u)^2+z'(u)^2}=rK/\sqrt{2}$，见(7.9.13).)因此存在 $A>0$，使得 $g'(u)^2+h'(u)^2=A^2$．两边同时对 u 微分．得 $g'g''+h'h''=0$．利用这两个关系式，练习 3.3.5 中的主曲率公式可化简为

$$k_\mu=\frac{g''}{Ah'},\quad k_\pi=\frac{g'}{Ah}.$$

再由假设 $k_\mu=2k_\pi$ 得

$$\frac{g''}{g'}=2\frac{h'}{h}, \quad 406$$

这也保证存在常数 α 使得 $g'=\alpha h^2$．代入常速度关系式，得到 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}u=h'=\pm\sqrt{A^2-\alpha^2h^4}$．作替换 $h=\sqrt{A/\alpha}\,\mathrm{cn}w$，$\mathrm{d}h=-\sqrt{A/\alpha}\,\mathrm{sn}w\mathrm{dn}w\mathrm{d}w$(椭圆系数取 $1/\sqrt{2}$)，分离变量，利用恒等式 $1-\mathrm{cn}^4w=$

$(\mathrm{sn}^2 w)(2-\mathrm{sn}^2 w)$，解微分方程，得

$$\pm A\int \mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2 h^4}},$$

$$\pm Au + c = \int \frac{\sqrt{\frac{A}{a}}\,\mathrm{sn}(w)\mathrm{dn}(w)}{\sqrt{2}\,\mathrm{sn}(w)\sqrt{1-\frac{1}{2}\mathrm{sn}(w)^2}}\mathrm{d}w = \sqrt{\frac{A}{2a}}\int \mathrm{d}w = \sqrt{\frac{A}{2a}}w,$$

因此$\sqrt{2aA}u+\bar{c}=w$，其中$\bar{c}$是常数. 应用椭圆余弦函数，替换关系式得

$$\sqrt{\frac{a}{A}}h = \mathrm{cn}(\sqrt{2aA}u+\bar{c}),$$

$$h(u) = \sqrt{\frac{A}{a}}\mathrm{cn}(\sqrt{2aA}u+\bar{c}).$$

方便起见取$\bar{c}=0$，又 $g'=ah^2=A\mathrm{cn}^2(\sqrt{2aA}u)$. 利用命题 3.7.5，得

$$\begin{aligned} g(u) &= A\int \mathrm{cn}^2(\sqrt{2aA}u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{A}{\sqrt{2aA}}\left(2E\left(\mathrm{sn}(u),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-F\left(\mathrm{sn}(u),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{2A}{a}}\left(E\left(\mathrm{sn}(u),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}F\left(\mathrm{sn}(u),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right). \end{aligned}$$

这就是形如(7.9.12)的参数方程(对于(7.9.12)中的气球，$A=rk/\sqrt{2}$，$a=K/(\sqrt{2}r)$). ■

还有其他几种情形类似于定理 7.9.4：在主曲率上附加条件，就可以刻画曲面 M.

- 若对于紧曲面 M 的任意一点，都有 $k_1=k_2$，则由定理 3.5.2 知 M 是球面.
- 若 M 是旋转曲面，且 $k_1=-k_2$，则 $H=(k_1+k_2)/2=0$，M 是极小旋转曲面. 由定理 3.5.7 知 M 是悬链面.
- 若 M 是旋转曲面，且 $k_1=-k_2+c$，其中 c 是非零常数，由定理 3.6.1 知 M 是德洛奈
407 曲面.

每一个肥皂泡都是极小曲面的物理模型(反之未必)，且可由面积形式的最小能量的变分原理生成(见第 4 章). 肥皂泡也满足 4.1 节中正比于肥皂泡的表面张力的拉普拉斯–杨方程. 因为肥皂泡两侧的压力相等，所以平均曲率为零且 $k_1=-k_2$. 自然就有如下问题.

1. 对于聚酯薄膜气球，是否有类似的拉普拉斯–杨方程？换言之，是否存在类似表面张力和压力的物理实体具有定理 7.9.4 中聚酯薄膜气球的不变特征.

2. 对于 $c\neq -1, 1, 2$，$k_1=ck_2$ 是不是曲面的特征？是否存在满足这种约束的物理过程？

以下是用几何方法证明分析结果的练习.

练习 聚酯薄膜气球的全高斯曲率满足高斯–博内定理：$\int_S K\mathrm{d}A = 2\pi\chi(S) = 4\pi$，其中 $\chi(S)=2$ 是因为聚酯薄膜气球与球面同胚，而球面的欧拉示性数为 2. 利用公式 $K=$

$2\mathrm{cn}^2(u, 1/\sqrt{2})/r^2$和$S$的面积元(见定理 7.9.2)计算$\int_S K\mathrm{d}A$，直接从几何可得出分析的关系式

$$\int_0^{K(1/\sqrt{2})} \mathrm{cn}^3\left(u, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

有关聚酯薄膜气球的内容，详见[MO03a]. 特别地，求聚酯薄膜气球上闭测地线的方法类似于 5.6.4 节中求波状体曲面的闭测地线的方法.

7.10 变分法和 Maple

7.10.1 基本欧拉-拉格朗日程序

本节我们将编写一些很有用的解欧拉-拉格朗日方程的程序. 进一步，我们将应用这些程序去解决各种问题，如弹性球在重力作用下无摩擦地在半圆碗里滚动问题，从而绘制弹性球的轨迹. 我们也将绘制各种梁在压力作用下的图. 首先看单变量的欧拉-拉格朗日方程.

```
> EL1:=proc(f)
local part1,part2,p2,dfdx,dfddx;
part1:=subs({x=x(t),dx=diff(x(t),t)},diff(f,x));
dfdx:=diff(f,dx);
dfddx:=subs({x=x(t),dx=dx(t)},dfdx);
p2:=diff(dfddx,t);
part2:=subs(dx(t)=diff(x(t),t),p2);
simplify(part1-part2=0);
end:
```
408

为保证输出的结果是 Maple 认为的微分方程的形式，需要做一下替换. 那么为什么不直接输入 f 的微分方程? 因为我们通常将变量积分的被积函数写成 $f(t, x, \dot{x})=x^2-\dot{x}^2-2x\sin t$. 这里更习惯于将$\dot{x}$记成 $\mathrm{d}(x(t))/\mathrm{d}t$(这里我们必须告诉 Maple x 是 t 的函数)，较容易记为

```
> f:=x^2-dx^2-2*x*sin(t);
```

$$f := x^2 - \mathrm{d}x^2 - 2x\sin(t).$$

“$\mathrm{d}x$”表示$\dot{x}$. 而且在上述程序中，一旦我们取定时间，注意 x 是 t 的函数，就可以得到最终的微分方程. 例如

```
> EL1(f);
```

$$2x(t) - 2\sin(t) + 2\left(\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}\right) = 0.$$

由以下程序

```
> dsolve({EL1(f),x(0)=1,x(Pi/2)=2},x(t));
```

$$x(t) = 2\sin(t) + \cos(t) - \frac{1}{2}\cos(t)t$$

解欧拉-拉格朗日方程. 考虑积分$\int(x\cos t + \dot{x}^2/2)\mathrm{d}t$ 的极值曲线问题，其中 $x(0)=0$，$x(\pi/2)=1$. 为避免混淆，以 $f2$ 表示被积函数.

```
> f2:=x*cos(t)+1/2*dx^2;
```

$$f2 := x\cos(t) + \frac{dx^2}{2}$$

```
> EL1(f2);
```

$$\cos(t) - \left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right) = 0.$$

```
> dsolve({EL1(f2),x(0)=0,x(Pi/2)=1},x(t));
```

409

$$x(t) = -\cos(t) + 1.$$

注意初始和最终状态是为了决定所有任意常数.

练习 7.10.1 用 Maple 求下列问题的解，其中被积函数是 $h(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2/t^3$，且 $x(1)=2$，$x(2)=17$.

练习 7.10.2 用 Maple 求下列问题的解，其中被积函数是 $h(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + 2x\sin t$，且 $x(0)=0$，$x(\pi)=0$.

下面程序解决了 f 不依赖于 t 的情形.

```
> EL2:=proc(f)
local part1,part2,dfddx;
part1:=subs({x=x(t),dx=diff(x(t),t)},f);
dfddx:=diff(f,dx);
part2:=diff(x(t),t)*subs({x=x(t),dx=diff(x(t),t)},dfddx);
simplify(part1-part2=c);
end:
```

例如，

```
> k:=dx^2/x^3;
```

$$k := \frac{dx^2}{x^3}.$$

```
> EL2(k);
```

$$-\frac{\left(\frac{dx^2(t)}{dt}\right)}{x^3(t)} = c.$$

```
> dsolve({diff(lhs(EL2(k)),t)=0,x(0)=1,x(2)=4},x(t));
```

$$x(t) = \frac{16}{t^2 - 8t + 16},\quad x(t) = \frac{16}{9\left(t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{16}{9}\right)}.$$

注意这里有两个答案，哪个错了呢？提示，计算被积函数 k 的积分.

```
> int(16/(t-4)^2,t=0..2);
```

$$4$$

```
> int(16/(9*(t-4/3)^2),t=0..2);
```

$$\infty$$ [410]

下面的例子展示如何解决等周问题. 这个问题是极小化积分$\int \dot{x}^2 dt$，其中$x(0)=2$，$x(1)=4$，且$\int x dt = 1$. 注意这里用到Maple中的命令“rhs”，这个命令是取一个Maple方程的右边.

```
> k1:=dx^2-lambda*x;
```

$$k1 := dx^2 - \lambda x$$

```
> EL1(k1);
```

$$-\lambda - 2\left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right) = 0$$

```
> dsolve({EL1(k1),x(0)=2,x(1)=4},x(t));
```

$$x(t) = -\frac{\lambda t^2}{4} + \left(\frac{\lambda}{4} + 2\right)t + 2$$

```
> a1:=rhs(dsolve({EL1(k1),x(0)=2,x(1)=4},x(t)));
```

$$a1 := -\frac{\lambda t^2}{4} + \left(\frac{\lambda}{4} + 2\right)t + 2$$

```
> a2:=int(a1,t=0..1);
```

$$a2 := \frac{\lambda}{24} + 3$$

```
> lam1:=solve(a2=1,lambda);
```

$$\text{lam1} := -48$$

```
> subs(lambda=lam1,dsolve({EL1(k1),x(0)=2,x(1)=4},x(t)));
```

$$x(t) = 12t^2 - 10t + 2$$

练习 7.10.3 考虑积分$\int \dot{x}^2/2 + x\dot{x} dx$的极值问题，其中$x(0)=0, x(1)=0, \int_0^1 x dt = 7/12$. 由以下步骤解决这一问题.

```
> gg:=1/2*dx^2+x*dx-lambda*x;
```

$$gg := \frac{1}{2}dx^2 + xdx - \lambda x.$$ [411]

```
> EL1(gg);
```

$$-\lambda - \left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right) = 0.$$

```
> xt:=rhs(dsolve({lhs(EL1(gg)),x(0)=0,x(1)=0},x(t)));
```

$$xt := -\frac{1}{2}\lambda t^2 + \frac{1}{2}\lambda t.$$

```
> solve(int(xt,t=0..1)=7/12,lambda);
```

$$7$$

练习 7.10.4 按照下列命令，用 Maple 解例 7.6.2 的问题. 最后的图如图 7-3 所示.

```
> Lag:=1/2* dx^2-lambda*x;
```

$$Lag := \frac{dx^2}{2} - \lambda x.$$

```
> EL1(Lag);
```

$$-\lambda - \left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right) = 0.$$

```
> de:=dsolve({EL1(Lag),x(0)=0,x(1)=0},x(t));
```

$$de := x(t) = -\frac{1}{2}\lambda t^2 + \frac{1}{2}\lambda t.$$

```
> In:=int(rhs(de),t=0..1);
```

$$In := \frac{\lambda}{12}.$$

```
> L:=solve(In=1/6,lambda);
```

$$L := 2.$$

```
> xx:=subs(lambda=L,de);
```

$$xx := x(t) = -t^2 + t.$$

```
> sh:=dsolve({D(x)(s)=cos(-s^2+s),D(y)(s)=sin(-s^2+s),
x(0)=0,y(0)=0},{x(s),y(s)}, type=numeric):
> odeplot(sh, [x(s),y(s)],-5..7,view=[-1..2,-1..1],
numpoints=400);
```

412

7.10.2 压力作用下的梁柱

下面我们考虑如何计算并绘制例 7.4.5 中压力 P 作用下梁的问题. 我们用符号 x 来替换 y，因为这更符合 Maple 的设置. 前三个模型如下. 首先，考虑有 2 阶导数的单变量的欧拉–拉格朗日方程的程序. 虽然这里用不到这个程序，但是它可以用在其他的问题中，例如求曲率平方的极值.

```
> EL2ndOrd:=proc(f)
local part1,part2,part3,dfdx,dfddx,dfd2x,d2tdfd2x;
part1:=subs({x=x(t),dx=diff(x(t),t),d2x(t)=diff(x(t),t$2)},
diff(f,x));
dfdx:=diff(f,dx);
dfddx:=diff(subs({x=x(t),dx=dx(t),d2x=d2x(t)},dfdx),t);
part2:=subs({dx(t)=diff(x(t),t),d2x(t)=diff(x(t),t$2)},
dfddx);
dfd2x:=diff(f,d2x);
d2tdfd2x:=diff(subs({x=x(t),dx=dx(t),d2x=d2x(t)},dfd2x),t$2);
part3:=subs({dx(t)=diff(x(t),t),d2x(t)=diff(x(t),t$2)},
d2tdfd2x);
simplify(part1-part2+part3=0);
end:
> kappa2:=d2x^2/(1+dx^2)^(5/2);
```

$$\kappa 2 := \frac{\mathrm{d}2x^2}{(1+\mathrm{d}x^2)^{(5/2)}}.$$

```
> EL2ndOrd(kappa2);
```

$$\Big(-20\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)\Big)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\Big)\Big(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}x(t)\Big)-20\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)\Big)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\Big)^3\Big(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}x(t)\Big)$$
$$+30\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)\Big)^3\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\Big)^2-5\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)\Big)^3+2\Big(\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}x(t)\Big)$$
$$+4\Big(\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}x(t)\Big)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\Big)^2+2\Big(\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}x(t)\Big)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\Big)^4\Big)\Big/\Big(1+\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\Big)^2\Big)^{(9/2)}=0.$$

当被积函数 f 与 t 无关时，只需对 t 求一次积分．以下是解决例 7.4.5 的程序．

```
> ELxindep2Ord:=proc(f)
local part1,part2,dfdx,dfd2x,d2tdfd2x;
dfdx:=diff(f,dx);
part1:=subs({x=x(t),dx=diff(x(t),t),d2x=diff(x(t),t$2)},
dfdx);
dfd2x:=diff(f,d2x);
d2tdfd2x:=diff(subs({x=x(t),dx=dx(t),d2x=d2x(t)},dfd2x),t);
part2:=subs({dx(t)=diff(x(t),t),d2x(t)=diff(x(t),t$2)},
d2tdfd2x);
simplify(-part1+part2=c);
end:
```
413

对例 7.4.5 的被积函数，应用上面的程序．压力作用下的前三个模型如图 7-8，7-9，7-10 所示．

```
> buckle:=mu*kappa2-P*(sqrt(1+dx^2)-1);
```

$$buckle := \frac{\mu \mathrm{d}2x^2}{(1+\mathrm{d}x^2)^{(5/2)}}-P(\sqrt{1+\mathrm{d}x^2}-1).$$

```
> ELxindep2Ord(buckle);
```

$$-\left(5\mu\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)^2\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)-P\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)-3P\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^3 -3P\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^5-P\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^7-2\mu\left(\frac{d^3}{dt^3}x(t)\right) -2\mu\left(\frac{d^3}{dt^3}x(t)\right)\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2\right)\Big/\left(1+\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2\right)^{(7/2)}=c.$$

由小误差理论得

```
> P*diff(x(t),t)+2*mu*diff(x(t),'$'(t,3))=c;
```

$$P\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)+2\mu\left(\frac{d^3x(t)}{dt^3}\right)=c.$$

令 $\omega^2=P/(2\mu)$，得

```
> dsolve(diff(x(t),'$'(t,3))+omega^2*diff(x(t),t)=c,x(t));
```

$$x(t)=-\frac{_C2\cos(\omega t)}{\omega}+\frac{_C1\sin(\omega t)}{\omega}+\frac{ct}{\omega^2}+_C3.$$

```
> eq1:=eval(-_C2/omega*cos(omega*t)+
_C1*sin(omega*t)/omega+1/omega^2*c*t+_C3=0,t=0);
eq2:=eval(diff(-_C2/omega*cos(omaga*t)+
_C1*sin(omega*t)/omega+1/omega^2*c*t+_C3,t)=0,t=0);
eq3:=eval(diff(-_C2/omega*cos(omega*t)+
_C1*sin(omega*t)/omega+1/omega^2*c*t+_C3,t$2)=0,t=L);
```

$$eq1:=-\frac{_C2}{\omega}+_C3=0$$

414 $$eq2:=_C1+\frac{c}{\omega^2}=0.$$

$$eq3:=_C2\cos(\omega L)\omega-_C1\sin(\omega L)\omega=0.$$

```
> solve({eq1,eq2,eq3},{_C1,_C2,_C3});
```

$$\left\{_C1=-\frac{c}{\omega^2},_C3=-\frac{c\sin(\omega L)}{\omega^3\cos(\omega L)},_C2=-\frac{c\sin(\omega L)}{\omega^2\cos(\omega L)}\right\}.$$

```
> x(t)=eval(-_C2/omega*cos(omaga*t)+
_C1*sin(omega*t)/omega+1/omega^2*c*t+_C3,{_C2 =
-c*sin(omega*L)/omega^2/cos(omega*L), _C3 =
-c*sin(omega*L)/omega^3/cos(omega*L),_C1 = -1/omega^2*c});
```

$$x(t)=\frac{c\sin(\omega L)\cos(\omega t)}{\omega^3\cos(\omega L)}-\frac{c\sin(\omega t)}{\omega^3}+\frac{ct}{\omega^2}-\frac{c\sin(\omega L)}{\omega^3\cos(\omega L)}.$$

```
> x(t)=c*tan(omega*L)/omega^3*cos(omega*t)-
1/omega^3*c*sin(omega*t)+1/omega^2*c*t-
c*tan(omega*L)/omega^3;
```

$$x(t)=\frac{c\tan(\omega L)\cos(\omega t)}{\omega^3}-\frac{c\sin(\omega t)}{\omega^3}+\frac{ct}{\omega^2}-\frac{c\tan(\omega L)}{\omega^3}.$$

```
> simplify(eval(c*tan(omega*L)/omega^3*cos(omega*t)-
1/omega^3*c*sin(omega*t)+1/omega^2*c*t-
c*tan(omega*L)/omega^3=0,t=L),trig);
```

$$\frac{c(\omega L\cos(\omega L)-\sin(\omega L))}{\omega^3\cos(\omega L)}=0.$$

```
> -L*omaga*cos(omega*L)+sin(omega*L)=0;
```

$$-\omega L\cos(\omega L)+\sin(\omega L)=0.$$

```
> tan(omega*L)=omega*L;
```

$$\tan(\omega L)=\omega L.$$

现在转化为变量 $x-y$，取 $c=1$，$\tan(\omega L)=\omega L$.

```
> y:=1/omega^2*x-1/omega^2*L+L/omega^2*cos(omega*x)
-1/omega^3*sin(omega*x);
```

$$y:=\frac{x}{\omega^2}-\frac{L}{\omega^2}+\frac{L\cos(\omega x)}{\omega^2}-\frac{\sin(\omega x)}{\omega^3}.$$ [415]

```
> plot({tan(t),t},t=0..20,view=[0..20,0..20]);
```

由图 7-7 知，t 和 $\tan t$ 的交点．可以用 Maple 的"fsolve"命令求出这些交点．为了得到好的浮点解，需要指定区间(例如，0.5..5)．

```
> wL:=fsolve(tan(t)=t,t,0.5..5);
```

$$wL:=4.493\,409\,458.$$

```
> yy:=subs(L=2,subs(omega=wL/L,-y));
```

$$yy:=-0.198\,110\,731\,3x+0.396\,221\,462\,6-0.396\,221\,462\,6\cos(2.246\,704\,729x)+0.088\,178\,356\,80\sin(2.246\,704\,729x) \quad (7.10.1)$$

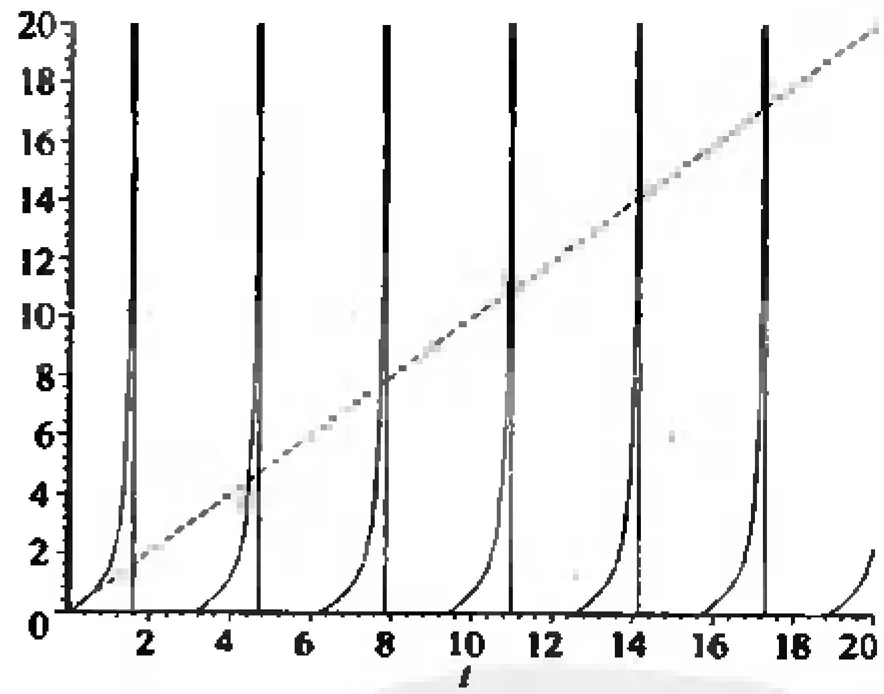


图 7-7　t 和 $\tan t$ 的交

```
> plot([x,yy,x=0..2],scaling=constrained,view=
[0..2,0..0.6]);
```

取其他 $\tan t=t$ 的解，得到另外的模型.

```
> wL2:=fsolve(tan(t)=t,t,2*Pi..5*Pi/2);
```

$$wL2:=7.725\,251\,837.$$

```
> yy2:=subs(L=2,subs(omega=wL2/L,-y));
```
[416]

$$yy2:=-0.067\,024\,672\,32x+0.134\,049\,344\,6-0.134\,049\,344\,6\cos(3.862\,625\,918x)+0.017\,352\,100\,29\sin(3.862\,625\,918x) \quad (7.10.2)$$

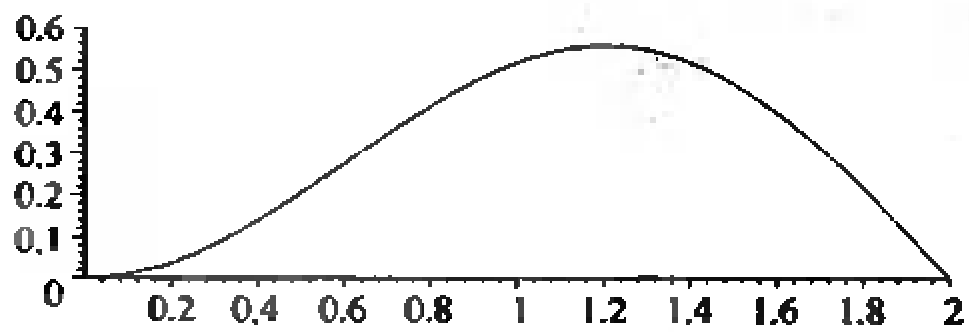


图 7-8 第一个模型

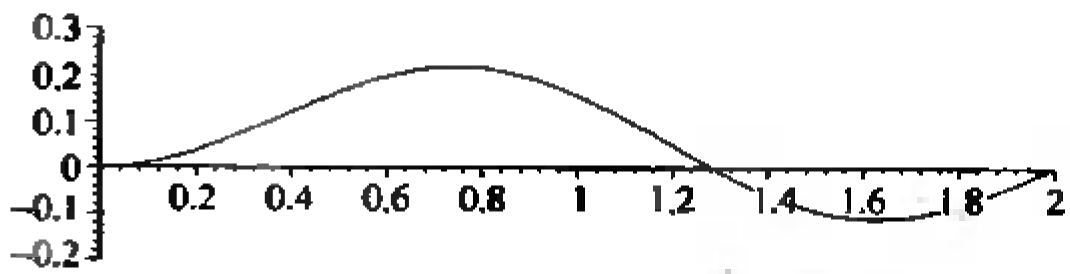


图 7-9 第二个模型

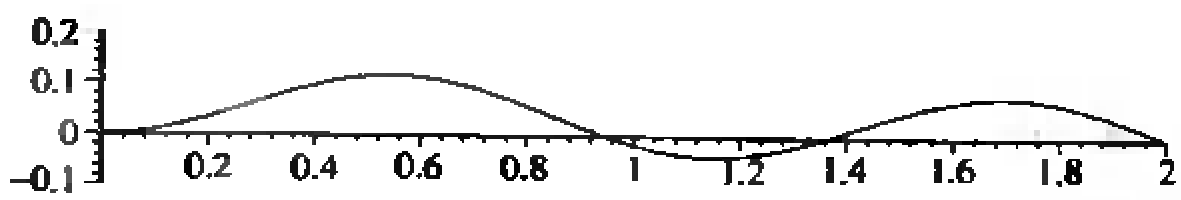


图 7-10 第三个模型

```
> plot([x,yy2,x=0..2],scaling=constrained,view=
[0..2,-0.2..0.3]);
> wL3:=fsolve(tan(t)=t,t,3*Pi..7*Pi/2);
```

$$wL3 := 10.904\,121\,66$$

```
> yy3:=subs(L=2,subs(omega=wL3/L,-y));
```

$$\begin{aligned} yy3 := & -0.033\,641\,752\,74x + 0.067\,283\,505\,49 \\ & -0.067\,283\,505\,49\cos(5.452\,060\,830x) \\ & +0.006\,170\,465\,406\sin(5.452\,060\,830x). \end{aligned} \tag{7.10.3}$$

```
> plot([x,yy3,x=0..2],scaling=constrained,view=
[0..2,-0.1..0.2]);
```

练习 7.10.5 用 Maple 解决悬臂梁问题(练习 7.4.6)和弹性杆问题(练习 7.4.10).

7.10.3 双摆

下面程序给出积分

$$\int f(t,x(t),y(t),dx(t),dy(t))dt$$

的欧拉-拉格朗日方程，其中 dx，dy 表示对于 t 的偏导数 $\frac{\partial}{\partial t}x$，$\frac{\partial}{\partial t}y$. 程序的所有输入函数 f 必须采用下面符号：t，x，y，dx，dy.

```
> ELsystem:=proc(f)
local el1,el2,part1,part2,part3,part4,p2,p4,dfddx,dfddy;
part1:=subs({x=x(t),y=y(t),dx=diff(x(t),t),dy=diff(y(t),t)},
diff(f,x));
dfddx:=subs({x=x(t),dx=dx(t),y=y(t),dy=dy(t)},diff(f,dx));
p2:= diff(dfddx,t);
part2:=subs({dx(t)=diff(x(t),t),dy(t)=diff(y(t),t)},p2);
el1:=simplify(part1-part2)=0;
part3:=subs({x=x(t),y=y(t),dx=diff(x(t),t),dy=diff(y(t),t)},
diff(f,y));
dfddy:=subs({x=x(t),dx=dx(t),y=y(t),dy=dy(t)},diff(f,dy));
p4:=diff(dfddy,t);
part4:=subs({dx(t)=diff(x(t),t),dy(t)=diff(y(t),t)},p4);
el2:=simplify(part3-part4)=0;
el1,el2;
end:
```

这里我们考虑练习 7.7.13 的情形．对于双摆我们得到如下欧拉-拉格朗日方程．其中，一个摆的悬挂点是(0，0)，摆锤的质量为 m，第二个挂在第一个摆的摆锤上，且摆锤质量为 M．输入的 l 是摆的公共长度．显然 g 是重力加速度．下一个小程序给出了这个摆的欧拉-拉格朗日方程．

```
> ELeqs:=proc(m,M,l)
local L,T,V,g;
g:=9.8;
T:=1/2*m*l^2*dx^2 + M*l^2*cos(x-y)*dx*dy +
1/2*M*l^2*(dx^2+dy^2);
V:=m*g*l+m*g*l*(1-cos(x))+M*g*l*(2-cos(x)-cos(y));
L:=T-V;
ELsystem(L)[1],ELsystem(L)[2];
end:
```

417~418

对于一般的 m，M，l 的方程是：

```
> ELeqs(m,M,l);
```

$$-0.2000000000l(49.\,m\sin(x(t))+49.\,M\sin(x(t))+5.\,ml\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)+5.\,Ml\sin(x(t)-1.\,y(t))\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2+5.\,Ml\cos(x(t)-1.\,y(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right)+5.\,Ml\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)\Big)=0,$$

$$-0.2000000000Ml(49.\,\sin(y(t))-5.\,l\sin(x(t)-1.\,y(t))\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2+5.\,l\cos(x(t)-1.\,y(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)+5.\,l\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right)\Big)=0.$$

这是一个得到欧拉-拉格朗日方程数值解的程序，然后动态实现运动．m，M，l 如上，初始条件是 $x0$(第一个摆和竖直方向的夹角)，$y0$(第二个摆和竖直方向的夹角)，$Dx0$，$Dy0$(初始角速度)，T(解的运行时间)，N(动态实现的光滑因子)．

```
> doubpend:=proc(m,M,l,x0,y0,Dx0,Dy0,T,N)
local sys,desys,xx,yy;
sys:=[ELeqs(m,M,l)[1],ELeqs(m,M,l)[2]];
desys:=dsolve({sys[1],sys[2],x(0)=x0,y(0)=y0,D(x)(0)=Dx0,
D(y)(0)=Dy0},{x(t),y(t)},type=numeric, output=listprocedure);
xx:=subs(desys,x(t)); yy:=subs(desys,y(t));
display(seq({plot([[0,0],[l*sin(xx(T*t/N)),-l*cos(xx(T*t/N))],
[l*sin(xx(T*t/N))+l*sin(yy(T*t/N)),-l*cos(xx(T*t/N))-
l*cos(yy(T*t/N))]],color=blue,symbol=box)},t=0..N),view=
[-2*l..2*l,-2*l..l],scaling=constrained,insequence=true);
end:
```

为得到静态的图像，我们写一个稍微不同的程序. 比较这两个程序.

```
> doubpend2:=proc(m,M,l,x0,y0,Dx0,Dy0,T,N,s)
local sys,desys,xx,yy;
sys:=[ELeqs(m,M,l)[1],ELeqs(m,M,l)[2]];
desys:=dsolve({sys[1],sys[2],x(0)=x0,y(0)=y0,D(x)(0)=Dx0,
D(y)(0)=Dy0},{x(t),y(t)},type=numeric, output=listprocedure);
xx:=subs(desys,x(t)); yy:=subs(desys,y(t));
pointplot([[0,0],[l*sin(xx(T*s/N)),-l*cos(xx(T*s/N))],
[l*sin(xx(T*s/N))+l*sin(yy(T*s/N)),-l*cos(xx(T*s/N))-
l*cos(yy(T*s/N))]],color=blue,symbol=box,connect=true,view=
[-2*l..2*l,-2*l..l],scaling=constrained,xtickmarks=0,
ytickmarks=0);
end:
> doubpend2(1,2,2,Pi/4,3*Pi/4,0,0,10,45,0);
> doubpend2(1,2,2,Pi/4,3*Pi/4,0,0,10,45,3);
> doubpend2(1,2,2,Pi/4,3*Pi/4,0,0,10,45,6);
> doubpend2(1,2,2,Pi/4,3*Pi/4,0,0,10,45,10);
> doubpend2(2,2,2,Pi/4,3*Pi/4,0,0,10,45,12);
> doubpend2(2,2,2,Pi/4,3*Pi/4,0,0,10,45,18);
```

419

图 7-11 显示了双摆摆动的过程. 注意图像的顺序是从左向右，从上向下. 下面做动画.

```
> display(seq(doubpend2(1,2,2,Pi/4,3*Pi/4,0,0,30,100,i),
i=0..100),insequence=true);
```

练习 7.10.6 输入不同的 m，M，$x0$，$y0$，并比较真实的双摆.

练习 7.10.7 用类似的 Maple 方法，分析练习 7.7.12 中的弹性摆.

7.10.4 被约束的粒子的运动

在 7.6.2 节我们讨论了曲面上势能作用下粒子的运动. 这里我们用 Maple 绘制如图 7-4 所示的运动轨迹. 首先给出球面的参数方程.

```
> sph:=<cos(u)*cos(v)|sin(u)*cos(v)|sin(v)>;
```

$$sph := [\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), \sin(v)]$$

“EFG”和“ELsystem”表示球形碗中粒子运动的欧拉-拉格朗日方程的程序. 注意动能由度量($F=0$)和参数对时间的导数给出. 取势能为参数方程的第三个坐标，对应于重力势能 mgh.

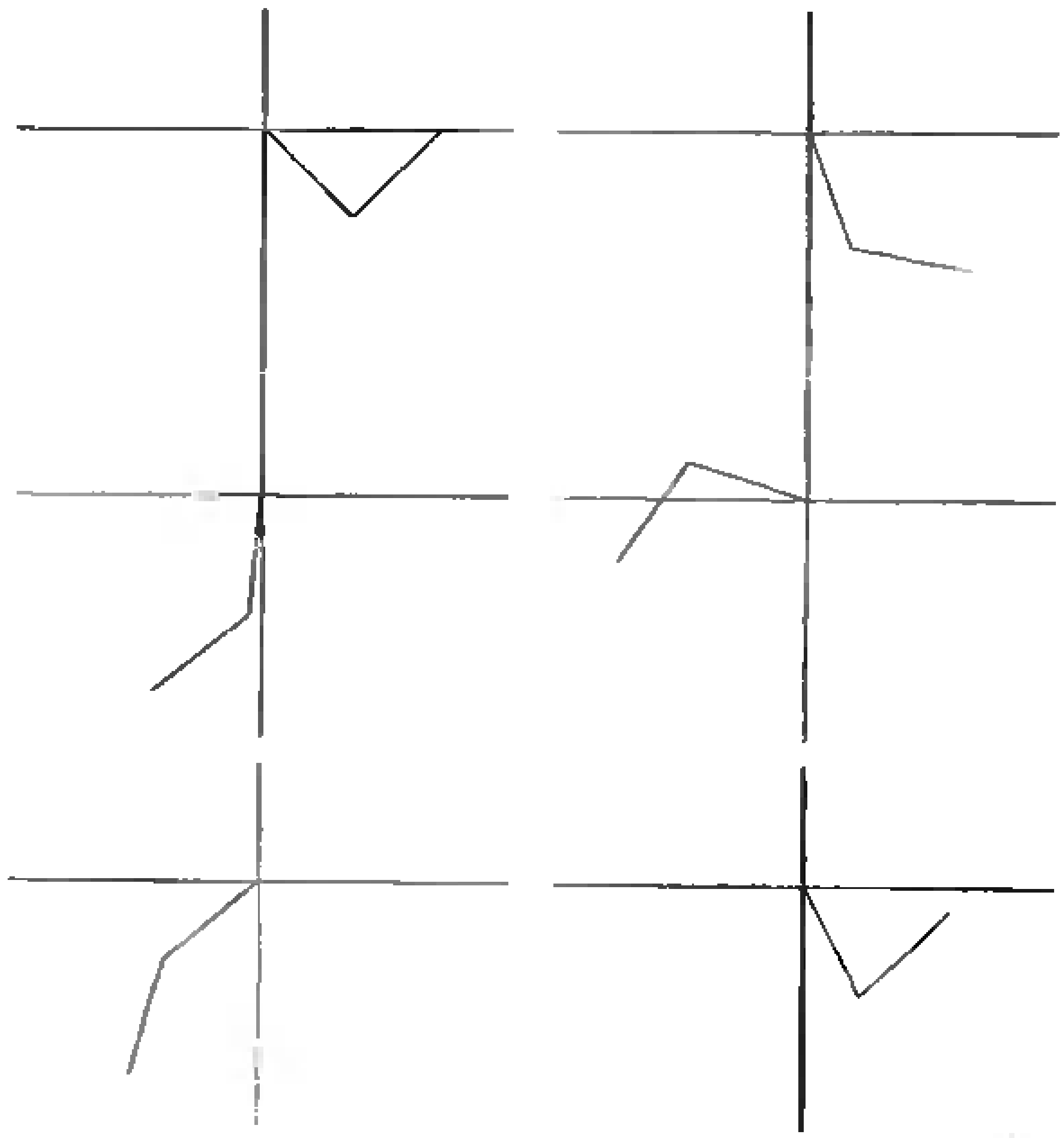


图 7-11 双摆的运动

```
> Equat:=proc(X)
local Metric,TT,VV,LL,Eul,eq1,eq2;
Metric:=subs({u=x,v=y},EFG(X));
TT:=1/2*(Metric[i]*dx^2+ Metric[3]*dy^2);
VV:=subs({u=x,v=y},X[3]);
LL:=TT-VV;
Eul:=ELsystem(LL);
eq1:=subs({x(t)=u(t),y(t)=v(t)},Eul[1]);
eq2:=subs({x(t)=u(t),y(t)=v(t)},Eul[2]);
eq1,eq2;
end:
> Equat(sph);
```

$$-\cos(v(t))\left(-2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\right)\sin(v(t))\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t)\right)+\cos(v(t))\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u(t)\right)=0,\right.$$

$$-\cos(v(t))\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\right)^2\sin(v(t))-\cos(v(t))-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}v(t)\right)=0.$$

由以下程序给出这些方程的数值解. 绘制数值解可以看到粒子运行的轨迹，这个程序类似于绘制测地线的程序"plotgeo". 当然雅可比定理说明粒子的运动轨迹就是测地线. 420 ~ 421

```
> plotmotion2:=proc(X,ustart,uend,vstart,vend,u0,v0,
Du0,Dv0,T,N,gr,ori1,ori2)
local sys,desys,u1,v1,U,V,motion,plotX,yyy;
sys:=[Equat(X)[1],Equat(X)[2]];
desys:=dsolve({sys[1],sys[2],u(0)=u0,v(0)=v0,D(u)(0)=Du0,
D(v)(0)=Dv0},{u(t),v(t)},type=numeric, output=listprocedure);
u1:=subs(desys,u(t)); v1:=subs(desys,v(t));
motion:=tubeplot(convert(subs(u='u1'(t),v='v1'(t),X),list),
radius=0.0i,t=0..T,color=black,numpoints=N):
plotX:=plot3d(X,u=ustart..uend,v=vstart..vend,grid=
[gr[1],gr[2]],shading=XY):
display({motion,plotX},style=patch,scaling=constrained,
orientation=[orii,ori2]);
end:
```

下面两个命令绘制了粒子的运动轨迹，如图 7-4 所示.

```
> plotmotion2(sph,0,2*Pi,-Pi/2,0,0,-Pi/4,2,0,12,100,
[30,10],41,0);
> plotmotion2(sph,0,2*Pi,-Pi/2,0,0,-Pi/4,2,0,12,100,
[30,10],39,85);
```

练习 7.10.8 作练习 7.6.13，即求抛物形碗中的弹球的运动方程，并对不同的 c，绘制运动图像.

```
> par:=[v*cos(u),v*sin(u),v^2];
> plotmotion2(par,0,2*Pi,0,2.5,0,2,i,0,25,150,
[30,i2],0,60);
```

注意选择参数，使得“plotmotion2”可以直接使用而不需要修改.

7.10.5 Maple 和聚酯薄膜气球

下面是半径为 R 的聚酯薄膜气球的参数方程.

```
> MylarR:=[R*JacobiCN(u,kk)*cos(v),R*JacobiCN(u,kk)*sin(v),
R/sqrt(2)*(EllipticE(JacobiSN(u,kk),kk)/kk^2-(i-kk^2)/kk^2*
EllipticF(JacobiSN(u,kk),kk))];
```

$$MylarR := \left[R\mathrm{JacobiCN}(u,kk)\cos(v), R\mathrm{JacobiCN}(u,kk)\sin(v), \frac{1}{2}R\sqrt{2}\left(\frac{\mathrm{EllipticE}(\mathrm{JacobiSN}(u,kk),kk)}{kk^2} - \frac{(1-kk^2)\mathrm{EllipticF}(\mathrm{JacobiSN}(u,kk),kk)}{kk^2}\right)\right].$$

聚酯薄膜气球的轮廓曲线如图 7-5 所示，绘制过程如下.

```
> profil:=plot([JacobiCN(u,1/sqrt(2)),1/sqrt(2)*
(EllipticE(JacobiSN(u,1/sqrt(2)),1/sqrt(2))/1/2-(1-1/2)/1/2*
422 EllipticF(JacobiSN(u,1/sqrt(2)),1/sqrt(2))),
u=-1.854 074 677..1.854 074 677]):
> poles:=textplot([[-.4,0.15,'North Pole'],
[-.4,-0.15,'South Pole']],color=black):
> display({profil,poles});
```

下面命令绘制图 7-6 中的聚酯薄膜气球.

```
> plot3d(subs({R=1,kk=1/sqrt(2),u=u(t),v=v(t)},MylarR),
u=-1.854 074 677..1.854 074 677,v=0..2*Pi,scaling=constrained,
shading=xy,lightmodel=light3,orientation=[45,69]);
> plot3d(subs({R=1,kk=1/sqrt(2),u=u(t),v=v(t)},MylarR),
u=-1.854 074 677..1.854 074 677,v=0..13/8*Pi,scaling=constrained,
shading=xy,lightmodel=light3,orientation=[-66,69]);
```

也可以用 Maple 计算聚酯薄膜气球的第一类基本形式和第二类基本形式的系数、高斯曲率以及平均曲率. 这些很自然地验证了 7.9 节的结果，计算如下.

```
> EFG(subs({kk=1/sqrt(2)},MylarR));
```

$$\left[\frac{R^2}{2},0,-R^2\left(-1+\text{JacobiSN}\left(u,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\right]$$

```
> lmn(subs({kk=1/sqrt(2)},MylarR));
```

$$\left[\frac{R\,\text{JacobiCN}\left(u,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{JacobiDN}\left(u,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{2-\text{JacobiSN}\left(u,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}},0,\right.$$

$$\left.\frac{R\,\text{JacobiCN}\left(u,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{JacobiDN}\left(u,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-1+\text{JacobiSN}\left(u,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\sqrt{2}}{\sqrt{2-\text{JacobiSN}\left(u,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}\right]$$

```
> GK(subs({kk=1/sqrt(2)},MylarR));
```

$$-\frac{2\left(-1+\text{JacobiSN}\left(u,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}{R^2}$$

显然可简化为 $2\mathrm{cn}^2(u,\ 1/\sqrt{2})/R^2$. 由程序

```
> MK(subs({kk=1/sqrt(2)},MylarR));
```

$$\frac{3}{2}\frac{\text{JacobiCN}\left(u,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{JacobiDN}\left(u,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}}{R\sqrt{2-\text{JacobiSN}\left(u,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}$$

求出的平均曲率可简化为 $3\mathrm{cn}(u,\ 1/\sqrt{2})/(2R)$. 423

第8章 高维略谈

8.1 引言

直到现在我们考虑的都是双参数的曲面 $x(u, v)$. 在数学和其他学科上，我们经常会遇到多参数的几何结构. 的确物理系统中自由度的个数会确切地告诉我们描述该系统结构空间所必要的参数个数. 正如我们可以用微分几何的方法研究粒子在限定曲面上的运动一样，也可以用相同的方法研究多个参数的情形. 这就是说我们必须建立高维曲面的记号，使之符合我们熟悉的 2 维曲面的几何性质. 本章介绍和 2 维类似的概念，进而研究高维曲面. 在这种意义下，本章可以看作是从 2 维几何到高维转换的指导. 特别地，我们将不再介绍一般意义下的流形及其共变微商，代之处理欧几里得空间中诱导度量意义下的子流形及其共变微商. 之所以这样处理，是因为我们希望读者在认识高维的时候，依然保持和现实的联系. 基本参考文献是[Car92, Spi79, SGL90, Hic65]以及(与物理的联系)[CM85].

8.2 流形

正如 2 维的情形，我们可以定义连通的开集 $D\subseteq\mathbb{R}^k$ 上的 k 坐标补片或坐标图 $\boldsymbol{x}: D\to\mathbb{R}^{n+1}$. 假设

425 $$\boldsymbol{x}(u^1,\cdots,u^k)=(x^1(u^1,\cdots,u^k),\cdots,x^{n+1}(u^1,\cdots,u^k))$$

光滑(即任意阶偏导数存在且连续)，单射(像集上存在连续的逆映射)且参数曲线的切向量

$$\partial_i\boldsymbol{x}\stackrel{\text{def}}{=}\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i},\cdots,\frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^i}\right)$$

线性无关($i=1, \cdots, k$). 若坐标补片已知，用记号∂_i表示切向量. 子集合 $M^k\subset\mathbb{R}^{n+1}$是 k 流形，如果它由这样的 k 坐标补片覆盖：对于任意两个交不空的坐标补片 $\boldsymbol{x}: D_x\to\mathbb{R}^{n+1}$, $\boldsymbol{y}: D_y\to\mathbb{R}^{n+1}$，复合转移映射

$$\boldsymbol{x}^{-1}\circ\boldsymbol{y}:\boldsymbol{y}^{-1}(\boldsymbol{x}(D_x)\cap\boldsymbol{y}(D_y))\to D_x$$

光滑. 显然，由 k 坐标补片覆盖意味着 M 的每个点都位于某个坐标补片的像上. 同样，M 在 $p\in M$点的 k 维切空间就是$\mathbb{R}^{n+1}$的由线性无关的向量$\partial_1(p), \cdots, \partial_k(p)$生成的子空间. 和曲面一样，这个切空间表示为 T_pM.

例 8.2.1(球 S^n) $\mathbb{R}^{n+1}$中的 n 球定义为

$$S^n\stackrel{\text{def}}{=}\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\mid(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1\}.$$

这个定义完全类似于$\mathbb{R}^3$ 中的 2 球面 S^2. 注意我们称这个球面是$\mathbb{R}^{n+1}$中的 n 球面，而不是 $n+1$ 球面. 这是因为$\mathbb{R}^{n+1}$中的球面是 n 流形，而不是 $n+1$ 流形. 所以 n 球面的名称表示流形本身的维数. 下面我们证明 S^n 是 n 维流形. 我们必须利用满足上述转移性质的坐标补片覆盖 S^n.

$\mathbb{R}^{n+1}$中的球极平面投影 St: $S^n\to\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^3$ 一样. 即$N=(0, \cdots, 0, 1)$和$S=(0, \cdots, 0, -1)$分别表示北极和南极，就有北极和南极投影：

$$\mathrm{St}_N(x^1,\cdots,x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1-x^{n+1}}\right),$$

$$\mathrm{St}_S(x^1,\cdots,x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right).$$

设 $x(u^1,\cdots,u^n)=\mathrm{St}^{-1}(u^1,\cdots,u^n)$：$\mathbb{R}^n\to S^n-\{N\}$ 和 $y(w^1,\cdots,w^n)=\mathrm{St}^{-1}(w^1,\cdots,w^n)$：$\mathbb{R}^n\to S^n-\{S\}$ 表示相应的逆映射．x 和 y 是光滑的单映射，且逆映射(即 St^{-1})光滑．易见参数切向量是线性无关的，所以 x 和 y 是坐标补片．显然，x 和 y 覆盖了 S^n．以下只要说明坐标补片符合转移映射就可以证明 S^n 是 n 流形．为此，注意 x 和 y 的表达式： 426

$$x(u^1,\cdots,u^n)=\left(\frac{2u^1}{\sum u^{i^2}+1},\cdots,\frac{2u^n}{\sum u^{i^2}+1},\frac{\sum u^{i^2}-1}{\sum u^{i^2}+1}\right),$$

$$y(w^1,\cdots,w^n)=\left(\frac{2w^1}{1+\sum w^{i^2}},\cdots,\frac{2w^n}{1+\sum w^{i^2}},\frac{1-\sum w^{i^2}}{1+\sum w^{i^2}}\right).$$

转移映射为

$$\mathbb{R}^n-\{(0,\cdots,0)\}\xrightarrow{\mathrm{St}_N^{-1}}S^n-\{N,S\}\xrightarrow{\mathrm{St}_S}\mathbb{R}^n,$$

计算得出

$$y^{-1}\circ x(u^1,\cdots,u^n)=\left(\frac{u^1}{\sum u^{i^2}},\cdots,\frac{u^n}{\sum u^{i^2}}\right)=(w^1,\cdots,w^n).$$

所以每个分量的公式是

$$u^i\mapsto\frac{u^i}{\sum u^{i^2}}=w^i.$$

因为 $\mathbb{R}^n$ 的原点不在转移映射的定义域内，所以每个分量函数光滑，因此 S^n 是 n 流形．

练习 8.2.2 对球极平面投影证明 x，y 和 $y^{-1}\circ x$ 的上述公式，并解释为什么 $\mathbb{R}^n$ 的原点不在转移映射的定义域内．

假设坐标补片 x：$D_x\to\mathbb{R}^{n+1}$，y：$D_y\to\mathbb{R}^{n+1}$ 的交 $x(D_x)\cap y(D_y)\neq\varnothing$．那么在交集上，

$$x(u^1,\cdots,u^k) = y(w^1,\cdots,w^k)$$

且 $y^{-1}\circ x(u^1,\cdots,u^k)=(w^1,\cdots,w^k)$．因为每个分支函数 y^i 均可看作是 u^i 的函数，所以由链式法则得

$$\frac{\partial y^i}{\partial u^i}=\frac{\partial x^i}{\partial u^i}=\sum_{j=1}^k\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\frac{\partial y^i}{\partial w^j}.$$

这些变换规则对那些感兴趣于不同参考系下物理量之同的联系的物理学家来说并不陌生．实际上，基于这个原因和上述坐标变换公式，以前的物理学家经常根据这些变换规则定义他们感兴趣的数学对象．如果把上述公式写成坐标形式，得到 427

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i},\cdots,\frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^i}\right)=\frac{\partial w^1}{\partial u^i}\left(\frac{\partial y^1}{\partial w^1},\cdots,\frac{\partial y^{n+1}}{\partial w^1}\right)+\cdots+\frac{\partial w^k}{\partial u^i}\left(\frac{\partial y^1}{\partial w^k},\cdots,\frac{\partial y^{n+1}}{\partial w^k}\right).$$

整理，得

$$\partial_i x = \sum_{j=1}^k\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\partial_j y.$$

这个公式表明坐标变换法则容许我们通过下面的矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial w^1}{\partial u^i} & \cdots & \frac{\partial w^1}{\partial u^k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \frac{\partial w^j}{\partial u^i} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial w^k}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial w^k}{\partial u^i} & \cdots & \frac{\partial w^k}{\partial u^k} \end{bmatrix}$$

改变 T_pM 的基．这个矩阵是坐标变换的雅可比矩阵，记为 $J(u, w)$. 这个公式使我们可以给出定向的概念(见第 2 章)的确切定义．称流形 M 是可定向的，如果存在覆盖 M 的坐标补片 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$，使所有可能的转移变换 $x_\alpha^{-1}\circ x_\beta$ 的雅可比矩阵的行列式为正(在所有重合点的值)．直觉上我们可以这样理解，旋转保持定向，而反射产生相反的定向．注意下面命题．

命题 8.2.3 *假设两个坐标补片的交集道路连通，特别地，假设 $x(D_x)\cap y(D_y)\neq\varnothing$，则在任意交点处雅可比矩阵的行列式符号不改变．*

证明 这里我们将给出一个比较深奥的证明(相对计算而言)，因为在高维几何问题中经常会用这种方法．在交集 $x(D_x)\cap y(D_y)$ 中选择任意两点 p 和 q，并取路径 α: $I\to x(D_x)\cap y(D_y)\subset M$，其中 $\alpha(1)=p$，$\alpha(1)=q$. 正如引理 2.1.3 那样，记

$$x(u^1(t),\cdots,u^k(t)) = \alpha(t) = y(w^1(t),\cdots,w^k(t))$$

且 $y^{-1}\circ x(u^1(t), \cdots, u^k(t))=(w^1(t), \cdots, w^k(t))$. 雅可比矩阵

428

$$J(u,w) = \left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}(t)\right)_{\alpha(t)}$$

与 t 相关，且行列式是连续函数 $\det J(u, w)$: $I\to\mathbb{R}$ (因偏导数连续). 因为 $J(u, w)\in GL(k, \mathbb{R})$ (R 上可逆的 $k\times k$ 矩阵群)，所以对任意的 t，$\det J(u, w)(t)\neq 0$. 由连续性(和中值定理)，连续函数 $\det J(u, w)$不能既取到正值又取到负值． ■

推论 8.2.4 *如果流形 M 可由两个交集道路连通的坐标补片覆盖，则 M 是可定向的．*

证明 我们只需证明 $J(u, w)$的行列式是正的情形．假若不然，我们改变其中一个坐标函数的符号或交换一个坐标补片上的两个坐标函数，就会改变 $J(u, w)$的行列式的符号．这是因为行列式的性质表明，两行(列)交换或某一行(列)乘以 -1，行列式改变符号．注意由相交部分的连通性和上述命题，只需验证 $\det J(u, w)$在一点上的值是正的． ■

例 8.2.5(球 S^n) 对于例 8.2.1 中的坐标补片 x 和 y，转移函数为

$$y^{-1}\circ x(u^1, \cdots, u^n)=\left(\frac{u^1}{\sum u^{i^2}}, \cdots, \frac{u^n}{\sum u^{i^2}}\right)=(w^1, \cdots, w^n).$$

可以计算雅可比矩阵．首先观察

$$\frac{\partial w^j}{\partial u^i} = \frac{\left(\sum_s u^{s^2}\right)\cdot\delta_i^j - 2u^ju^i}{\left(\sum_s u^{s^2}\right)^2},$$

其中，如果 $i\neq j$，$\delta_j^i=0$；如果 $i=j$，$\delta_j^i=1$. 根据命题 8.2.3 我们需要检验雅可比矩阵在一点的取值，为此选取(1，0，…，0). 于是有

$$J(u,v)_{(1,0,\cdots,0)}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

这个矩阵的行列式是-1，所以上述坐标补片不能给出 S^n 的定向. 因为坐标补片的交是道路连通集 $S^n-\{N,S\}$，所以由推论 8.2.4 知 S^n 是可定向的. 实际上，由推论 8.2.4 的证明，可以定义新的坐标补片

$$y(w^1,\cdots,w^k)=\left(\frac{2w^2}{1+\sum w^2},\ \frac{2w^1}{1+\sum w^2},\ \frac{2w^k}{1+\sum w^2},\ \cdots,\ \frac{2w^n}{1+\sum w^2},\ \frac{1-\sum w^2}{1+\sum w^2}\right).$$ 429

这是通过改变前两个坐标函数得到的. 将点(1，0，…，0)处的雅可比矩阵的前两行互换，则

$$J(u,v)_{(1,0,\cdots,0)}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

$\det J(u,v)_{(1,0,\cdots,0)}=1$. 因此，坐标补片 x 和$\bar{y}$给出了 S^n 的定向.

8.3 共变微商

从现在开始只考虑 k 维流形 M^k 上的单个坐标补片 x：$D\subset\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^{n+1}$. 因此从现在开始研究微分几何的局部性质. 由命题 8.2.3，因为 D 和它的像 $x(D)$ 是连通的，所以 x 自动可定向. 对于 M 的坐标补片 x，参数切向量 ∂_1，…，∂_k 构成每点的切空间 T_pM 的基. 选择向量 U_1，…，U_{n+1-k}将 T_pM 的基扩张成$\mathbb{R}^{n+1}$的基，且使得对任意的 s 和 i，有

$$U_s\cdot\partial_i=0$$

和

$$U_s\cdot U_t=\delta_t^s.$$

U_i 是 M 的法向量. 若 $k=n$，只存在一个法向量 U，这时称 M 为超曲面. 所有$\mathbb{R}^3$ 的曲面都是超曲面. 回忆 M 的光滑向量场 V 是对 M 的每一点指定$\mathbb{R}^{n+1}$的一个向量，使得 V：$M\to\mathbb{R}^{n+1}$是光滑的. 如果这个指定的向量总是与 M 相切，则称 V 是切向量场. ∂_1，…，∂_k 是 M^k 的切向量场，而 U_1，…，U_{n+1-k}是法向量场.

对于$\mathbb{R}^{n+1}$中的向量场 $Z=(Z^1,\cdots,Z^{n+1})$，$\mathbb{R}^{n+1}$的共变微商的定义和 2 维的情形一样. 即

$$\nabla_v^{\mathbb{R}^{n+1}}Z=\sum_{i=1}^{n+1}v[Z^i]e_i,$$

其中 e_i 是$\mathbb{R}^{n+1}$的第 i 个标准基向量. $v[\cdot]$表示$\mathbb{R}^{n+1}$通常的方向导数$v[f]=\nabla f\cdot v$. M 的共变微商定义为$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}$到 T_pM 的正交投影，即

$$\nabla_v Z=\mathrm{proj}_{T_pM}\,\nabla_v^{\mathbb{R}^{n+1}}Z,$$

其中$v\in T_pM$. Z定义在M上. 且把Z扩展到$\mathbb{R}^{n+1}$的包涵M的开集$\bar{Z}$中. 类似地，对于切向
430 量场V，由

$$\nabla_V Z(p)=\mathrm{proj}_{T_pM}\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\bar{V}(p)}\bar{Z}$$

定义$\nabla_V Z=\mathrm{proj}_{T_pM}\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\bar{V}}\bar{Z}$，其中$\bar{V}$是$V$的局部扩展. 下面练习说明$\nabla_V Z$的定义是合理的.

练习 8.3.1 证明$\nabla_V Z$的定义不依赖于V和Z的扩展的选取. 提示：(1)在M上对于V的扩展V_1和V_2，证明$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{V_1}\bar{Z}=\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{V_2}\bar{Z}$. 利用在$M$上$V_1=V_2$的事实. (2)证明在$M$上同样有$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{V}Z_1=\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{V}Z_2$.

从现在起为了记号上的方便，不再区分M的向量场和它在$\mathbb{R}^{n+1}$的开集上的局部扩展. 重要的是认识到M的共变微商其实就是$\mathbb{R}^{n+1}$的共变微商减去它的U_i分量，$i=1,\cdots,n+1-k$.

命题 8.3.2 *设V，Z和W是M的切向量场，f：$M\to\mathbb{R}$是M上的函数，M的共变微商具有下面一些性质：*

(i) $\nabla_V(Z+W)=\nabla_V Z+\nabla_V W$.

(ii) $\nabla_{fV}Z=f\nabla_V Z$.

(iii) $\nabla_V fZ=V[f]Z+f\nabla_V Z$.

(iv) $V[\langle Z,W\rangle]=\langle\nabla_V Z,W\rangle+\langle Z,\nabla_V W\rangle$，*其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$\mathbb{R}^{n+1}$上的点积在与$M$相切的向量上的限制.*

(v) $\nabla_V Z-\nabla_Z V=[V,Z]$，*其中$[\cdot,\cdot]$的定义在下面给出.*

证明 为证明(i)，只需注意方向导数和投影都保持和式不变. 对于(ii)，注意由定义，得

$$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{fV}Z=\sum_i fV[Z^i]e_i=f\sum_i V[Z^i]e_i=f\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{V}Z.$$

因为$f(p)$是向量的倍数，故对投影没有影响，所以取投影，得到

$$\begin{aligned}\nabla_{fV}Z&=\mathrm{proj}_{T_pM}\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{fV}Z\\&=\mathrm{proj}_{T_pM}(f\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{V}Z)\\&=f\mathrm{proj}_{T_pM}\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{V}Z\end{aligned}$$

由定义得

431 $$\nabla_{fV}Z=f\nabla_V Z.$$

利用$\langle\cdot,\cdot\rangle$(即点积)和$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}$的定义计算(iv).

$$\begin{aligned}V[\langle Z,W\rangle]&=V\Big[\sum_i Z^iW^i\Big] &&\text{由}\langle\cdot,\cdot\rangle\text{的定义}\\&=\sum_i V[Z^i]W^i+Z^iV[W^i] &&\text{由莱布尼茨法则}\\&=\langle\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V Z,W\rangle+\langle Z,\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V W\rangle &&\text{由}\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}\text{的定义}\\&=\langle\nabla_V Z,W\rangle+\langle Z,\nabla_V W\rangle\end{aligned}$$

因为Z和W是M的切向量场，所以所有与法向量的点积$\langle U_j,W\rangle$和$\langle Z,U_i\rangle$都是零. 而$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}$和$\nabla$不同的仅仅是它们的法分量，故上述最后两行的等式成立. (iii)留作练习，我们在讨论方括

号后再给出(v)的证明. ■

练习 8.3.3 证明(iii)中的等式$\nabla_V fZ=V[f]Z+f\nabla_V Z$. 提示：以(ii)为指导.

下面讨论向量场的李括号. 若 V 和 W 是 M 的切向量场，则定义

$$[V,W][f]=V[W[f]]-W[V[f]].$$

这里我们认为$[V,W]$在函数 f 上的作用类似于一个向量场的作用. 将$[V,W]$写成∂_i 的线性组合可以证明$[V,W]$是 M 的向量场. 为了避免使用过多的方括号，简记为$[V,W][f]=VW[f]-WV[f]$. 令 $V=\sum_i v^i\partial_i, W=\sum_j w^j\partial_j$，然后计算

$$\begin{aligned}WV[f]&=W\sum_i v^i\partial_i[f]\\&=\sum_i W[v^i]\partial_i[f]+v^iW[\partial_i[f]]\\&=\sum_i\sum_j(w^j\partial_j[v^i]\partial_i[f]+v^iw^j\partial_j\partial_i[f])\\&=\sum_i\sum_j\left(w^j\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^i}+v^iw^j\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^j}\right),\end{aligned}$$

类似地，

$$VW[f]=\sum_i\sum_j\left(v^j\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^i}+v^jw^i\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^j}\right), \quad 432$$

所以

$$(VW-WV)[f]=\sum_i\left(\sum_j\left(v^j\frac{\partial w^i}{\partial u^j}-w^j\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial u^i}.$$

换言之，我们有

$$[V,W]=\sum_i a^i\partial_i,\quad 其中\quad a^i=\sum_j\left(v^j\frac{\partial w^i}{\partial u^j}-w^j\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\right),$$

且$[V,W]$是M 的切向量场.

练习 8.3.4 利用方括号的定义，证明下述性质.

(1)$[V,W]=-[W,V]$.

(2)$[aV+bW,Z]=a[V,Z]+b[W,Z]$，其中 a，$b\in\mathbb{R}$.

(3)$[[V,W],Z]+[[W,Z],V]+[[Z,V],W]=0$(雅可比等式).

(4)对于光滑函数 f 和 g，$[fV,gW]=fg[V,W]+fV[g]W-gW[f]V$.

下面我们集中证明命题 8.3.2 的(v). 首先我们要得出共变微商和方括号间的一般关系式，从而得到(v). 因为$\partial_i[f]=\partial f/\partial u^i$，所以对任意的 i 和 j，$[\partial_i,\partial_j]=0$. 由于混合偏导数相等，则

$$[\partial_i,\partial_j][f]=\partial_i\partial_j[f]-\partial_j\partial_i[f]=\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^j}-\frac{\partial^2 f}{\partial u^j\partial u^i}=0.$$

令 $V=\sum_i v^i\partial_i$ 和 $W=\sum_j w^j\partial_j$，则

$$\nabla_V W=\sum_i v^i\nabla_{\partial_i}\left(\sum_j w^j\partial_j\right)$$

433
$$= \sum_i \sum_j (v^j \partial_j w^i \partial_i + v^j w^i \nabla_{\partial_j} \partial_i).$$

类似地

$$\nabla_W V = \sum_i \sum_j (w^j \partial_j v^i \partial_i + w^j v^i \nabla_{\partial_j} \partial_i).$$

因此

$$\nabla_V W - \nabla_W V = \sum_i \Big(\sum_j \Big(v^j \frac{\partial w^i}{\partial u^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \Big)\Big) \partial_i + \sum_i \sum_j (v^j w^i - w^j v^i) \nabla_{\partial_j} \partial_i$$

$$= [V, W] + \sum_i \sum_j (v^j w^i - w^j v^i) \nabla_{\partial_j} \partial_i.$$

为证明(v)，只需证明公式中的第二项为零.

引理 8.3.5 $\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = 0.$

证明 将上述公式应用到$\mathbb{R}^{n+1}$的共变微商$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}$上，其中$\partial_i = \sum_k a^k e_k$ 和$\partial_j = \sum_l b^l e_l$，得到

$$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\partial_i} \partial_j - \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\partial_j} \partial_i = [\partial_i, \partial_j] + \sum_{k,l} (a^l b^k - b^l a^k) \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{e_l} e_k = 0 + 0 = 0.$$

这是因为由上述讨论知$[\partial_i, \partial_j] = 0$ 以及由$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}$的定义知$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{e_j} e_i = 0$. 又因为$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\partial_i} \partial_j = \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\partial_j} \partial_i$，所以$\nabla_{\partial_i} \partial_j$ 和$\nabla_{\partial_j} \partial_i$ 的投影相等.

命题 8.3.2 中(v)的证明 对于一般公式

$$\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W] + \sum_i \sum_j (v^j w^i - w^j v^i) \nabla_{\partial_j} \partial_i,$$

考虑最后一项 $\sum_i \sum_j (v^j w^i - w^j v^i) \nabla_{\partial_j} \partial_i$，其中括号里的因子关于$i$和$j$反对称. 根据引理8.3.5，因子$\nabla_{\partial_j} \partial_i$ 对于 i 和 j 对称. 由于任意一项和它的负值总是同时出现，因此对 i 和 j 求和为零. 所以

$$\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W].$$ ■

假设 $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是超曲面，则 M 只有一个单位法向量场 U. 对于切向量场 V 和 Z，因为$\nabla_V Z$是$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V Z$ 在切方向的投影，所以记

$$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V Z = \nabla_V Z + (\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V Z, U) U.$$

再次注意 V 和 Z 必须扩展成$\mathbb{R}^{n+1}$中的开集才能使得$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V Z$ 有意义.

434 **练习 8.3.6** 证明上述法分量的系数是$(\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V Z, U)$.

因为由(iv)得 $V(Z, U) = (\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V Z, U) + (Z, \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V U)$ 以及$(Z, U) = 0$，所以我们可以将上述方程写成

$$\nabla_V Z = \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V Z - (\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V Z, U) U$$

$$= \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V Z + (Z, \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V U) U.$$

再由$(\cdot,\cdot)$的对称性得

$$\nabla_V Z = \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V Z - (S(V), Z) U,$$

其中 $S(V) = -\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_V U$ 是$\mathbb{R}^{n+1}$中 M 的形状算子. 8.3.2 的性质(特别是(iv)和(v))可以用来证明定理 2.3.5 的推广命题.

定理 8.3.7 *形状算子是切空间的对称的线性变换.*

证明 由$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}$的性质知 S 是线性的. 因为$\langle U, U\rangle=1$是常数, 所以

$$0=V\langle U,U\rangle=\langle\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}}U,U\rangle+\langle U,\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}}U\rangle=2\langle\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}}U,U\rangle.$$

因此$\langle\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}}U, U\rangle=0$. 故$\langle S(V), U\rangle=\langle-\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}}U, U\rangle=0$, 即对任意 $p\in M$, $S(V)(p)\in T_pM$. 下面证明线性变换 S 是对称的. 以下的证明中用到对任意切向量场 Z 有$\langle U, Z\rangle=0$以及命题 8.3.2 的性质(iv)和(v).

$$\begin{aligned}\langle S(V),W\rangle&=\langle-\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}}U,W\rangle\\&=\langle U,\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}}W\rangle\qquad \text{由(iv)和}\langle U,W\rangle=0\\&=\langle U,[V,W]+\nabla_W^{\mathbb{R}^{n+1}}V\rangle\qquad\text{由(v)}\\&=\langle U,[V,W]\rangle+\langle U,\nabla_W^{\mathbb{R}^{n+1}}V\rangle\\&=0-\langle\nabla_W^{\mathbb{R}^{n+1}}U,V\rangle\qquad\text{因为}[V,W]\text{是切向量场以及由(iv)}\\&=\langle V,-\nabla_W^{\mathbb{R}^{n+1}}U\rangle\\&=\langle V,S(W)\rangle.\end{aligned}$$

■

例 8.3.8(半径为 R 的球面 S^n) 对于坐标 x^1, …, x^{n+1}, $\mathbb{R}^{n+1}$中半径为 R 的 n 球面的单位法向量场为

$$U=\frac{1}{R}(x^1,\cdots,x^{n+1}).$$ 435

因为欧几里得共变微商正是坐标形式下的方向导数, 所以对于切向量场 $V=(V^1, \cdots, V^{n+1})$, 有

$$\begin{aligned}S(V)(p)&=-\nabla_{V(p)}^{\mathbb{R}^{n+1}}U\\&=-\frac{1}{R}(V(p)[x^1],\cdots,V(p)[x^{n+1}])\\&=-\frac{1}{R}(V^1(p),\cdots,V^{n+1}(p))\\&=-\frac{V(p)}{R},\end{aligned}$$

其中第三行成立是因为 x^i 是坐标函数, 以及

$$V[x^i]=\sum_j\frac{\partial x^i}{\partial x^j}V^j=V^j\delta^i_j=V^i.$$

因此, n 球面的形状算子同 2 球面一样——它就是球面半径的负倒数与标量的乘积.

超曲面形状算子的作用同$\mathbb{R}^3$ 中的曲面形状算子相似, 但必须认识到在高维流形中它的作用不如在$\mathbb{R}^3$ 中重要. 因为高维流形的超曲面相对少见, 而由定义知$\mathbb{R}^3$ 中的曲面就是它的超曲面. 对于$\mathbb{R}^{n+1}$中的非超曲面的流形, 以广义的第二基本形式替代形状算子, 即$\langle S(V), Z\rangle U$. 对于 V 和 Z 的切向量场, 如果写成

$$\nabla_V Z=\mathrm{proj}_{T_pM}\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}}\bar{Z},$$

意味着忽略了$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}$的法分量．用上标 T 和 N 分别表示切投影和法投影，即

$$\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}} Z = (\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}} Z)^T + (\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}} Z)^N$$
$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} \nabla_V Z + B(V, Z).$$

$B(V, Z) = (\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}} Z)^N$ 称为$M^k \subset \mathbb{R}^{n+1}$的第二基本形式．

命题 8.3.9 $B(\cdot, \cdot)$满足下述性质：

(1)$B(fV, Z) = fB(V, Z)$.

(2)$B(V, fZ) = fB(V, Z)$.

(3)$B(V, Z) = B(Z, V)$.

436 前两个性质说明 B 是双线性的，即对每一个变量都是线性的；最后一个性质表明 B 是对称的．

证明 我们只证明(2)，(1)和(3)留作下面练习．由定义，得

$$B(V, fZ) = \nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}} fZ - \nabla_V fZ$$
$$= V[f]Z + f\,\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}} Z - V[f]Z - f\,\nabla_V Z.$$

根据命题 3.1 的性质(iii)，有

$$= f\,\nabla_V^{\mathbb{R}^{n-1}} Z - f\,\nabla_V Z$$
$$= f(\nabla_V^{\mathbb{R}^{n+1}} Z - \nabla_V Z)$$
$$= fB(V, Z).$$ ■

练习 8.3.10 证明上面的(1)和(3)成立．提示：利用命题 8.3.2 的性质(ii)证明(1)．对于(3)，需要利用命题 8.3.2 的性质(v)以及$[V, Z]$是切向量场，$[V, Z]^N = 0$.

对任意点 $p \in M$，根据命题 8.3.9，$B(p)$都是对称的双线性映射 $T_pM \times T_pM \to N_pM$，其中 $N_pM = (U_1, \cdots, U_{n+1-k})$是 M 在$\mathbb{R}^{n+1}$中的法向量空间．由 B 可以定义平均曲率向量场为

$$H(p) = \sum_{s=1}^{k} (\nabla_{\partial_s}^{\mathbb{R}^{n+1}} \partial_s)^N$$
$$= \sum_{s=1}^{k} B(p)(\partial_s, \partial_s),$$

其中假设$\partial_1, \cdots, \partial_k$ 在 p 点正交，$B(p)(\partial_s, \partial_s)$表示双线性形 $B(p)$在(∂_s, ∂_s)的值.

练习 8.3.11 对于$\mathbb{R}^3$ 中的 2 维坐标补片 $x(u, v)$，证明这里的 H 恰好是过去定义的平均曲率的两倍．

在下一节介绍克利斯朵夫符号后，我们会更多地讨论第二基本形式．[Car92]是一本优秀的参考读物．本节所给出的不是最一般的共变微商的定义，这一点很重要．我们以前说过定义

437 流形不要参照欧几里得空间，自然，定义共变微商也不要参照欧几里得空间的共变微商$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}$．抽象的共变微商的基本性质就是命题 8.3.2 中的性质(i)、(ii)和(iii)，而进一步满足性质(iv)和(v)的共变微商，称为莱维-齐维塔联络或黎曼联络．每一个流形都有唯一的黎曼联络，对于诱导度量的流形 $M^k \subset \mathbb{R}^{n+1}$，我们定义的联络自然是黎曼联络．

8.4 克利斯朵夫符号

3.4 节介绍的克利斯朵夫符号实际上是二阶偏导数 x_{uu} 和 x_{vv} 对于基 x_u，x_v 和 U 的系数. 因为 $F=x_u\cdot x_v=0$，所以

$$x_{uu}=\Gamma_{uu}^{u}x_u+\Gamma_{uu}^{v}x_v+lU$$
$$x_{uv}=\Gamma_{uv}^{u}x_u+\Gamma_{uv}^{v}x_v+mU$$
$$x_{vv}=\Gamma_{vv}^{u}x_u+\Gamma_{vv}^{v}x_v+nU.$$

可以由度量 E 和 $G(F=0)$ 表示克利斯朵夫符号(见公式 3.4.3)，

$$x_{uu}=\frac{E_u}{2E}x_u-\frac{E_v}{2G}x_v+lU$$
$$x_{uv}=\frac{E_v}{2E}x_u+\frac{G_u}{2G}x_v+mU$$
$$x_{vv}=-\frac{G_u}{2E}x_u+\frac{G_v}{2G}x_v+nU.$$

x_{uu} 其实就是 $\nabla_{x_u}^{\mathbf{R}^{n+1}}x_u$，$x_{uv}$ 和 x_{vv} 也类似. 从上面的表达式中消去 U 分量 lU，mU 和 nU，就得到相应的 $\nabla_{x_u}x_u$，$\nabla_{x_u}x_v$ 和 $\nabla_{x_v}x_v$. 把这些推广到 k 维的情形，简记为

$$\nabla_{\partial_i}^{\mathbf{R}^{n+1}}\partial_j=\sum_{s=1}^{k}\Gamma_{ij}^{s}\,\partial_s+\sum_{l}b_{ij}^{l}U_l,$$

取其切分量，则

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j=\sum_{s=1}^{k}\Gamma_{ij}^{s}\,\partial_s.$$

练习 8.4.1 利用引理 8.3.5 证明对任意 i，j，s，$\Gamma_{ij}^{s}=\Gamma_{ji}^{s}$.

2 维的克利斯朵夫符号可以由度量表述，同样，高维的克利斯朵夫符号也可以用度量(传统的高维符号)表述，即

$$g_{ij}=\langle\partial_i,\partial_j\rangle,\quad g=\det(g_{ij}).$$

其中 (g_{ij}) 是度量系数矩阵. 显然 $g_{ij}=g_{ji}$，即矩阵是对称的，而且可逆. 以 (g^{ij}) 来表示矩阵 (g_{ij}) 的逆矩阵. 以下面的证明为例，可以由此逆矩阵分离一些特定的量. 特别地 438

$$\sum_{j}g^{mj}g_{jr}=\delta_r^m.$$

命题 8.4.2 *克利斯朵夫符号由度量*

$$\Gamma_{ij}^{m}=\frac{1}{2}\sum_{s}g^{ms}(\partial_i g_{sj}+\partial_j g_{is}-\partial_s g_{ij})$$

决定.

证明 由命题 8.3.2 的性质(iv)，得

$$\begin{aligned}\partial_s g_{ij}&=\partial_s\langle\partial_i,\partial_j\rangle\\&=\langle\nabla_{\partial_s}\partial_i,\partial_j\rangle+\langle\partial_i,\nabla_{\partial_s}\partial_j\rangle\\&=\left\langle\sum_{l}\Gamma_{si}^{l}\,\partial_l,\partial_j\right\rangle+\left\langle\partial_i,\sum_{l}\Gamma_{sj}^{l}\,\partial_l\right\rangle\end{aligned}$$

$$= \sum_l (\Gamma^l_{si} g_{lj} + \Gamma^l_{sj} g_{il}).$$

类似地

$$\partial_i g_{js} = \sum_l (\Gamma^l_{ij} g_{ls} + \Gamma^l_{is} g_{jl}) \quad 和 \quad \partial_j g_{si} = \sum_l (\Gamma^l_{js} g_{li} + \Gamma^l_{ji} g_{sl}),$$

且

$$\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij} = \sum_l \Gamma^l_{ij} g_{sl}.$$

乘以度量矩阵逆矩阵的第 m 行，因为 $\sum_j g^{mj} g_{jl} = \delta^m_l$，所以

$$\frac{1}{2}\sum_j g^{mj} (\partial_i g_{sj} + \partial_s g_{ij} - \partial_j g_{si}) = \sum_l \Gamma^l_{is} \sum_j g^{mj} g_{jl} = \Gamma^m_{is}.$$ ■

推论 8.4.3 对于 $M=\mathbb{R}^{n+1}$，克利斯朵夫符号是零.

证明 因为度量系数 g_{ij} 是常数，所以偏导数为零. 根据命题 8.4.2，克利斯朵夫符号为零. ■

例 8.4.4 考虑 2 维坐标补片 $x(u, v)=x(u^1, u^2)$，其中 $F=x_u \cdot x_v=0$. 则度量矩阵及其逆是

439 $$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \qquad (g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1/E & 0 \\ 0 & 1/G \end{bmatrix},$$

其中行列式为 $g=\det(g_{ij})=EG$. 例如

$$\Gamma^u_{uu} = \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{1}{E}(E_u + E_u - E_u) + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{E_u}{2E},$$

$$\Gamma^u_{uv} = \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}\frac{1}{E}(0 + E_v - 0) + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{E_v}{2E}.$$

练习 8.4.5 证明

$$\Gamma^u_{vv} = \Gamma^1_{22} = -G_u/2E, \quad \Gamma^v_{uu} = \Gamma^2_{11} = -E_v/2G,$$

$$\Gamma^v_{uv} = \Gamma^2_{12} = G_u/2G \quad 和 \quad \Gamma^v_{vv} = \Gamma^2_{22} = G_v/2G.$$

因为上述 Γ 的公式也出现在 2 维的测地线方程中，所以在高维的时候出现就很正常. 更一般地，M 的切向量场 V 沿曲线 $\alpha: I \to M^k = x(u^1, \cdots, u^k)$ 是平行的，如果在曲线上的任一点都有 $\nabla_{\alpha'} V=0$. 以下是此条件的局部坐标形式. 令 $V=\sum_j v^j \partial_j$.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha'} V &= \sum_i \frac{du^i}{dt} \nabla_{\partial_i} V \\
&= \sum_i \frac{du^i}{dt}\left(\sum_j \frac{\partial v^j}{\partial u^i}\partial_j + \sum_j v^j \sum_s \Gamma^s_{ij}\partial_s\right) \\
&= \sum_i \sum_s \frac{du^i}{dt}\frac{\partial v^s}{\partial u^i}\partial_s + \sum_i \frac{du^i}{dt}\sum_j \sum_s v^j \sum_s \Gamma^s_{ij}\partial_s \\
&= \sum_s \left(\sum_i \left(\frac{du^i}{dt}\frac{\partial v^s}{\partial u^i} + \frac{du^i}{dt}\sum_j v^j \Gamma^s_{ij}\right)\right)\partial_s.
\end{aligned}$$

这一表达式为零当且仅当每一个分量为零. 因此，对任意的 s，有

$$\sum_i \left(\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial v^s}{\partial u^i} + \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\sum_j v^j \Gamma^s_{ij}\right) = 0.$$

根据链式法则，第一项 $\sum_i (\mathrm{d}u^i/\mathrm{d}t \cdot \partial v^s \partial u^i)$ 恰好是 $\mathrm{d}v^s/\mathrm{d}t$. 因此，有以下命题.

命题 8.4.6 *V 是平行的当且仅当对于任意的 s，*

$$\frac{\mathrm{d}v^s}{\mathrm{d}t} + \sum_i \sum_j \Gamma^s_{ij} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} v^j = 0.$$

推论 8.4.7 *曲线 α 是 M^k 的测地线，当且仅当*

$$\frac{\mathrm{d}^2 u^s}{\mathrm{d}t^2} + \sum_i \sum_j \Gamma^s_{ij} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} = 0.$$ 440

证明 因为有 $\alpha(t) = x(u^1(t), \cdots, u^k(t))$，所以 $\alpha' = \sum_j (\mathrm{d}u^j/\mathrm{d}t)\partial_j$. 因此，由上面命题 8.4.6 的公式，作代换 $\mathrm{d}u^j/\mathrm{d}t = v^j$，测地线方程 $\nabla_{\alpha'}\alpha' = 0$ 就是上述方程. ■

因为命题 8.4.6 的条件是一阶线性微分方程，所以平行向量场存在且唯一. 但是平行向量场旋转的角函数却无法确定. 原因很简单，角只能决定平面上的旋转. 高维时，描述了旋转变换的是特殊正交群 SO(n)，即满足 $\det(A)=1$ 和 $AA^t = I$ 的矩阵 A 构成的群.

练习 8.4.8 用以下方式定义平行变换. 给定点 $p \in M$ 的 V_0 和 M 上满足 $\alpha(0)=p$ 的曲线 α. 设 V 是沿 α 唯一的平行向量场，其中 $V(0)=V_0$，则 $V(t)$ 是 V_0 的平行移动. 证明这样定义的变换是 T_pM 到 $T_{\alpha(t)}M$ 的线性变换，而且等距. 也就是说对于沿 α 的两个平行向量场 V 和 W，内积 $\langle V, W\rangle$ 是常数. 也可证明平行移动保持定向，而保持定向的等距属于 SO(n). 提示：利用命题 8.3.2 的性质(iv)证明等距.

在第 7 章中已经证明测地线是能量积分 $\int T\mathrm{d}t$ 的极值曲线，其中动能为 $T = 1/2|\alpha'|^2$. 在高维时 $\alpha' = \sum_i (\mathrm{d}u^i/\mathrm{d}t)\partial_i$ 且因为没有假设 $\partial_i \cdot \partial_j = 0$，故 $|\alpha'|^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j$. 对应的能量积分是

$$\int L(t, u^1(t), \cdots, u^k(t), \dot{u}^1(t), \cdots, \dot{u}^k(t)) \cdot \mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} \int \sum_{i,j} g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j \mathrm{d}t.$$

这里不考虑系数 1/2. 将练习 7.1.7 推广到 k 个函数，对于任意 s，得到欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^s}\right) - \frac{\partial L}{\partial u^s} = 0.$$

如下直接计算每一部分：

$$\frac{\partial L}{\partial u^s} = \sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s}\dot{u}^i\dot{u}^j \quad \text{和} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^s} = \sum_j g_{sj}\dot{u}^j + \sum_i g_{is}\dot{u}^i,$$

且有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^s}\right) &= \sum_j\left(g_{sj}\ddot{u}^j + \sum_i \frac{\partial g_{sj}}{\partial u^i}\dot{u}^i\dot{u}^j\right) + \sum_i\left(g_{is}\ddot{u}^i + \sum_j \frac{\partial g_{is}}{\partial u^j}\dot{u}^i\dot{u}^j\right) \\ &= 2\sum_i g_{is}\ddot{u}^i + \sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{is}}{\partial u^j}\right)\dot{u}^i\dot{u}^j.\end{aligned}$$ 441

因此，欧拉-拉格朗日方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial u^i}=\sum_l g_{il}\ddot{u}^l+\frac{1}{2}\sum_{l,j}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i}\right)\dot{u}^l\dot{u}^j=0.$$

利用恒等式 $\sum_i g^{mi}g_{il}=\delta_l^m$ 可得$\ddot{u}^m=\sum_i\sum_l g^{mi}g_{il}\ddot{u}^l$. 上式乘以 $\sum_i g^{mi}$，求和得

$$\sum_i g^{mi}\left(\sum_l g_{il}\ddot{u}^l+\frac{1}{2}\sum_{l,j}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i}\right)\dot{u}^l\dot{u}^j\right)=0$$

$$\sum_i g^{mi}\sum_l g_{il}\ddot{u}^l+\sum_{l,j}\frac{1}{2}\sum_i g^{mi}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i}\right)\dot{u}^l\dot{u}^j=0,$$

化简得

$$\ddot{u}^m+\sum_{ij}\Gamma_{ij}^m\dot{u}^i\dot{u}^j=0.$$

这就是测地线方程. 因此高维情形也类似，测地线方程可由变分原理得到.

练习 8.4.9 证明对于 2 维正交坐标补片 $x(u,v)$，上述的测地线方程和第 5 章的一样.

我们想要选择某个正规坐标使共变微商的性质更好一些. 在下一节中，这一坐标将大大简化曲率的讨论.

定理 8.4.10 *对于流形 M^k 和点 $p\in M$，存在坐标补片 $x(u^1,\cdots,u^k)$，其中 $x(0,\cdots,0)=p$，使得*

$$g_{ij}(p)=\langle\partial_i(p),\partial_j(p)\rangle=\delta_i^j\quad 和\quad \nabla_{\partial_i}\partial_j(p)=0.$$

这些坐标 $u^1,\cdots,u^k$ 是正规坐标.

证明梗概 具体的证明需要指数映射的知识，因为我们还没有介绍过，所以这里只介绍一个证明的提纲. 取 p 点的切空间，对于任意向量$\boldsymbol{v}\in T_pM$，构造映射将 T_pM 上$\boldsymbol{v}$ 方向经过原点的直线映到经过 p 点$\boldsymbol{v}$ 方向的单位速度测地线$\alpha_{\boldsymbol{v}}$，即

$$t\boldsymbol{v}\mapsto\alpha_{\boldsymbol{v}}(t).$$

为简单起见，假设 M 是完备的，则测地线可以无限延伸. 这个映射就定义一个从 T_pM 到 M 的 k 坐标补片. 正如坐标补片 x 的坐标一样，取 T_pM 的正交坐标系 $u^1,\cdots,u^k$. 根据定义，因为坐标正交，所以在 p 点，$g_{ij}=\delta_i^j$. 而切向量$\boldsymbol{v}=(v^1,\cdots,v^k)$满足

442 $$x(u^1(t),\cdots,u^k(t))=\alpha_v(t)=x(tv^1,\cdots,tv^k).$$

而且，对任意的 i，$\ddot{u}^i=\mathrm{d}^2(tv^i)/\mathrm{d}t^2=0$. 测地线方程显然在 α 上总是成立的. 即

$$\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^m(\alpha_v(t))\dot{u}^i\dot{u}^j=\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^m(\alpha_v(t))v^iv^j=0,$$

而且对任意的$\boldsymbol{v}\in T_pM$ 上式都成立仅当Γ_{ij}^m等于零. 因此

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j(p)=\sum_m\Gamma_{ij}^m(p)\partial_m=0.$$ ■

上面这些为初步知识，下面以高维平均曲率向量场和高维曲面面积极小化之间的关系作为本节的结尾. 注意使用正规坐标简化讨论. 对于具体的细节，推荐阅读[Law80 定理 1.4]和[SGL90，定理 5.19].

对流形 M(假设是单坐标补片)作类似于定理 4.3.4 的变换. 即取 $M_t=M+tU$，其中 U 是 M 的法向量场. 对于坐标$(u^1,\cdots,u^k)$，面积元为

$$dA=\sqrt{g}\,du^1\cdots du^k,$$

其中 $g=\det(g_{ij})$是由度量系数矩阵的行列式.（2 维时 $dA=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$.）类似地，在 M_t 上 $g_t=\det(g_{t_{ij}})$，面积元为

$$dA_t=\sqrt{g_t}\,du^1\cdots du^k=\frac{\sqrt{g_t}\,dA}{\sqrt{g}}=\frac{\sqrt{g_t}}{\sqrt{g}}dA.$$

高维面积就是

$$A(t)=\int_{M_t}\frac{\sqrt{g_t}}{\sqrt{g}}dA.$$

和第 4 章一样求这个面积函数的临界点. 注意上述积分与选取的坐标系有关，所以固定点 $p\in M$，并取 p 点的正规坐标系. 对于 p 点的正规坐标系，切向量场∂_1，…，∂_k 正交，且所有的共变微商$\nabla_{\partial_i}\partial_j$ 都等于零. 把法向量场 U 作为另一个局部坐标，所以，对任意的 i 和 j，有

$$[\partial_i,\partial_j]=0\quad 和\quad [U,\partial_i]=0.$$

以下计算

$$\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0}=\int\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{g_t}}{\sqrt{g}}\right)\right|_{t=0}dA.$$ 443

因为坐标向量场在 p 点是标准正交的，所以 $g=1$. 因此

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{g_t}}{\sqrt{g}}\right)\right|_{t=0}=\left.\frac{1}{2}\frac{dg_t/dt}{\sqrt{g}}\right|_{t=0}$$
$$=\left.\frac{1}{2}\frac{dg_t}{dt}\right|_{t=0}.$$

练习 8.4.11 矩阵 $Q(t)=(q_{ij}(t))$的矩阵元与 t 有关且 $Q(0)=I$ 是单位矩阵，证明

$$\left.\frac{d}{dt}\det Q(t)\right|_{t=0}=\mathrm{tr}\left(\frac{dq_{ij}(0)}{dt}\right).$$

提示：由 $Q(t)$的行列式的定义，得

$$\det Q=\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{\mathrm{sign}\,\sigma}q_{1\sigma(1)}\cdots q_{k\sigma(k)},$$

其中 σ 属于 k 个文字的置换群 S_k. 用乘积法则求 dQ/dt. 取在 $t=0$ 的值，使得除了含因子 $q_{rr}(0)=1$ 和单个 $dq_{ii}(0)/dt$ 以外的所有项都是零. 因此，行列式和式就是$dq_{ii}(0)/dt$的和，即迹 $\mathrm{tr}Q'(0)$.

因为 $g=\det(g_{ij})$，把这个练习代入上面的结果，得

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{g_t}}{\sqrt{g}}\right)\right|_{t=0}=\left.\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial g_{t_{ii}}}{\partial t}\right|_{t=0}$$
$$=\left.\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\partial}_i,\tilde{\partial}_i)\right|_{t=0},$$

其中，$\tilde{\partial}_i$是局部微分同胚 $m\mapsto m+tU$ 所确定的 t 级向量场. 因为 U 是 t 方向的，所以

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{g_t}}{\sqrt{g}}\right)\right|_{t=0}=\left.\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}U(\tilde{\partial}_i,\tilde{\partial}_i)\right|_{t=0}.$$ 444

根据命题 8.3.2 的性质(iv)、(v)以及上面提及的括号积是零，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\sqrt{g_t}}{\sqrt{g}}\right]\Bigg|_{t=0}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\langle\nabla_U^{\mathbf{R}^{n+1}}\widetilde{\partial}_i,\widetilde{\partial}_i\rangle\,|_{t=0}+\langle\widetilde{\partial}_i,\nabla_U^{\mathbf{R}^{n+1}}\widetilde{\partial}_i\rangle\,|_{t=0}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\langle\nabla_U^{\mathbf{R}^{n+1}}\widetilde{\partial}_i,\widetilde{\partial}_i\rangle\,|_{t=0}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\langle\nabla_{\widetilde{\partial}_i}^{\mathbf{R}^{n+1}}U,\widetilde{\partial}_i\rangle\,|_{t=0}.$$

再由性质(iv)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\sqrt{g_t}}{\sqrt{g}}\right]\Bigg|_{t=0}=\sum_{i=1}^{k}\widetilde{\partial}_i\langle U,\widetilde{\partial}_i\rangle\,|_{t=0}-\langle U,\nabla_{\widetilde{\partial}_i}^{\mathbf{R}^{n+1}}\widetilde{\partial}_i\rangle\,|_{t=0}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\partial_i\langle U,\partial_i\rangle-\langle U,\nabla_{\partial_i}\partial_i\rangle-\langle U,(\nabla_{\partial_i}^{\mathbf{R}^{n+1}}\partial_i)^N\rangle,$$

这是因为$\nabla^{\mathbf{R}^{n+1}}=\nabla+(\nabla^{\mathbf{R}^{n+1}})^N$且$t=0$时在$M$上．同时，$t=0$时，$U$和$\partial_i$正交，而且坐标是正规坐标，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\sqrt{g_t}}{\sqrt{g}}\right]\Bigg|_{t=0}=\sum_{i=1}^{k}-\langle U,(\nabla_{\partial_i}^{\mathbf{R}^{n+1}}\partial_i)^N\rangle$$

$$=-\left\langle U,\sum_{i=1}^{k}(\nabla_{\partial_i}^{\mathbf{R}^{n+1}}\partial_i)^N\right\rangle$$

$$=-\langle U,H\rangle,$$

其中H是$\mathbf{R}^{n+1}$中曲面M的平均曲率向量场．积分得下面定理.

定理 8.4.12 *面积函数的导数在零点的取值是*

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=\int_M-\langle U,H\rangle\mathrm{d}A.$$

其中H是平均曲率向量场．U是法变分方向.

如果M(即$t=0$)是所有变分的临界点，那么必有$H=0$．假设H不为零，那么一定存在U
445 使得$\langle U,H\rangle$不为零，这样在某个局部上积分不为零．这同假设M是$A(t)$的临界点矛盾．因此得到定理 4.3.4 在高维时的推广.

推论 8.4.13 *若M是面积极小的，则它的平均曲率向量场为零.*

8.5 曲率

在 3.4 节得到了仅与度量相关的高斯曲率公式，这自然引出了高斯绝好定理．仔细研究公式的推导过程，发现我们用到$x_{uuv}-x_{uvu}=0$．以共变的记号表述(注意相对于某条参数曲线的共变微商就是偏导数)，有

$$\nabla_{x_v}^{\mathbf{R}^{n+1}}\nabla_{x_u}^{\mathbf{R}^{n+1}}x_u-\nabla_{x_u}^{\mathbf{R}^{n+1}}\nabla_{x_u}^{\mathbf{R}^{n+1}}x_v=0.$$

而且导数也揭示了U_u和U_v的下标的本质，其中U是曲面的单位法向量．实际上就是公式中项$(ln-m^2)/EG=K$．现在不用单位法向量给出M^k的共变微商∇．因此不要期望

$$\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_s-\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_s$$

等于零. 类似于 2 维共变微商公式(只是没有 U_u 和 U_v)，由

$$R(\partial_i,\partial_j)\partial_s=\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_s-\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_s$$

定义向量场 $R(\partial_i,\ \partial_j)\partial_s=\sum_l R^l_{ijs}\partial_l$.

$R(\cdot,\cdot)$称为黎曼曲率，但是公式的右边还不是一般情形. 我们希望 R 对于光滑函数是双线性的. 即对于光滑函数 f: $M\to\mathbb{R}$，有 $R(fX,\ Y)=fR(X,\ Y)$，$R(X+Z,\ Y)=R(X,\ Y)+R(X,\ Y)$，$R(X,\ fY)=fR(X,\ Y)$以及 $R(X,\ Y+Z)=R(X,\ Y)+R(X,\ Z)$. 而读者在下面的练习中看到事实并非如此. 而且我们希望 $R(\cdot,\cdot)$是向量场上的线性映射.

练习 8.5.1 利用共变微商的性质证明

$$R(\partial_i,\partial_j)f\partial_s=fR(\partial_i,\partial_j)\partial_s. \tag{1}$$

$$\begin{aligned}R(f\partial_i\partial_j)\partial_s&=\partial_j f\ \nabla_{\partial_i}\partial_s+fR(\partial_i,\partial_j)\partial_s\\&=-\nabla_{[f\partial_i,\partial_j]}\partial_s+fR(\partial_i,\partial_j)\partial_s.\end{aligned}\tag{2}$$

其中最后一行成立是因为命题 8.3.2 的(ii)和练习 8.3.4 的(4). 因此对于第一个变量 R 不是线性的. 446

这个练习的最后一个公式给了我们一个提示，如何使得 R 是双线性的. 即对于切向量场 X，Y 和 Z，有以下定义.

定义 8.5.2 黎曼曲率定义为

$$R(X,Y)Z=\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z.$$

练习 8.5.3 证明

$$R(\partial_i,\partial_j)\partial_s=\sum_l R^l_{ijs}\partial_l=\sum_l\left(\frac{\partial\Gamma^l_{is}}{\partial u^j}-\frac{\partial\Gamma^l_{js}}{\partial u^i}+\sum_m\Gamma^m_{is}\Gamma^l_{jm}-\Gamma^m_{js}\Gamma^l_{im}\right)\partial_l.$$

因为前面已经证明$\mathbb{R}^{n+1}$中所有的克利斯朵夫符号都是零，所以上述表达式说明$\mathbb{R}^{n+1}$的黎曼曲率处处为零. 因此称$\mathbb{R}^{n+1}$是平坦的. 进一步，证明

$$R_{ijsr}\overset{\text{def}}{=}\sum_l R^l_{ijs}g_{lr}=\sum_l\left(\frac{\partial\Gamma^l_{is}}{\partial u^j}-\frac{\partial\Gamma^l_{js}}{\partial u^i}+\sum_m\Gamma^m_{is}\Gamma^l_{jm}-\Gamma^m_{js}\Gamma^l_{im}\right)g_{lr}.$$

对于 2 维坐标补片 $x(u^1,\ u^2)=x(u,\ v)$，其中 $g_{11}=E$，$g_{12}=g_{21}=0$ 和 $g_{22}=G$，计算 R_{1212}. 证明

$$R_{1212}=EG\left[\frac{E_uG_u}{4E^2G}-\frac{1}{E}\left(\frac{E_v}{2G}\right)_v-\frac{E_vG_v}{4EG^2}+\frac{E_vE_v}{4E^2G}-\frac{1}{E}\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u-\frac{G_uG_u}{4EG^2}\right],$$

和练习 3.4.5 的公式比较，知

$$K=\frac{R_{1212}}{g},$$

其中 K 是高斯曲率，$g=\det(g_{ij})=EG$. 因此黎曼曲率是高斯曲率的推广.

练习 8.5.4 假设 $M^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$是超曲面，单位法向量是 U，形状算子是 S. 证明对于切向量场 X，Y 和 Z，有

$$R(X,Y)Z=\langle S(X),Z\rangle S(Y)-\langle S(Y),Z\rangle S(X).$$

提示：(1)记

$$R(X,Y)=(\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{[X,Y]}-S_{[X,Y]})+(\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_Y-S_Y)(\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_X-S_X)-(\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_X-S_X)(\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_Y-S_Y),$$

其中$S_Y(Z)=\langle S(Y),\ Z\rangle$. (2)利用$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{[X,Y]}+\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_Y\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_X-\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_X\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_Y=0$(因为$\mathbb{R}^{n+1}$是平坦的)
447 以及$\langle\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_Y U,\ U\rangle=1/2Y\langle U,\ U\rangle=0$(因为$\langle U,\ U\rangle=1$).

显然，黎曼曲率很复杂. 通过考虑向量场可以得到关于黎曼曲率的一些理解. 首先引入记号

$$R(X,Y,Z,W)\xlongequal{\text{def}}\langle R(X,Y)Z,W\rangle,$$

然后定义 T_pM 的由 $X(p)$和 $Y(p)$张成的 2 维子空间的截面曲率为

$$K(X,Y)=\frac{R(X,Y,X,Y)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2}.$$

截面曲率实际上是经过 M 上的 p 点，切平面是$\langle X,\ Y\rangle$的 2 维子流形的高斯曲率. 这是练习 8.5.3的推广，其中 $K=R_{1212}/g=R(\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_1,\ \partial_2)/g$. 虽然没有给出证明，但是截面曲率决定了黎曼曲率. 显然，由定义可知逆命题成立. 同时，若 X 和 Y 标准正交，则 $K(X,\ Y)=R(X,\ Y,\ X,\ Y)$.

例 8.5.5(半径为 R 的球面S^n)　由例 8.3.8 知 S^n 的形状算子 $S(X)=-X/R$，其中 R 是球面的半径. 由练习 8.5.4 的公式得到

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z&=\langle S(X),Z\rangle S(Y)-\langle S(Y),Z\rangle S(X)\\&=\frac{1}{R^2}(\langle X,Z\rangle Y-\langle Y,Z\rangle X).\end{aligned}$$

截面曲率有一个更简单的形式，特别当我们取 X 和 Y 标准正交时. 此时因为$\langle Y,\ X\rangle=0=\langle X,\ Y\rangle$，$\langle X,\ X\rangle=1=\langle Y,\ Y\rangle$，所以有

$$\begin{aligned}K(X,Y)&=R(X,Y,X,Y)\\&=\frac{1}{R^2}\langle\langle X,X\rangle Y-\langle Y,X\rangle X,Y\rangle\\&=\frac{1}{R^2}.\end{aligned}$$

因此 S^n 的截面曲率 $K=1/R^2$ 是定值，也就是说完全类似于 S^2 的高斯曲率.

练习 8.5.6　证明黎曼曲率满足下述对称关系：

(1)$R(X,\ Y,\ Z,\ W)=-R(Y,\ X,\ Z,\ W)$.

(2)$R(X,\ Y,\ Z,\ W)=-R(X,\ Y,\ W,\ Z)$.

448 (3)$R(X,\ Y,\ Z,\ W)=R(Z,\ W,\ X,\ Y)$.

提示：由命题 8.3.2 的性质(iv)知：(1)$\langle\nabla_Y\nabla_X V,\ V\rangle=Y\langle\nabla_X V,\ V\rangle-\langle\nabla_X V,\ \nabla_Y V\rangle$；(2)$\langle\nabla_{[X,Y]}V,\ V\rangle=1/2[X,\ Y]\langle V,\ V\rangle$. 由下面的第一比安基恒等式可以证明(3).

练习 8.5.7　证明第一比安基恒等式

$$R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W)=0.$$

提示：显然可以不考虑 W. 写出每一部分的定义，利用等式$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,\ Y]$等. 把所有的项都写成只含括号积的形式. 利用雅可比恒等式(练习 8.3.4(3)).

下面是以后用起来很方便的第二比安基恒等式，它和黎曼曲率的共变微商有关，故我们要理解它是如何定义的. R 的共变微商为

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V)=\nabla_V R(X,Y,Z,W)$$
$$=V[R(X,Y,Z,W)]-R(\nabla_V X,Y,Z,W)$$
$$-R(X,\nabla_V Y,Z,W)-R(X,Y,\nabla_V Z,W)-R(X,Y,Z,\nabla_V W).$$

命题 8.5.8(第二比安基恒等式)

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V)+\nabla R(X,Y,W,V,Z)+\nabla R(X,Y,V,Z,W)=0.$$

证明 取任意点 $p\in M$ 的正规坐标系(见练习 8.4.10),并验证这个恒等式. 设 X, Y, Z, W 和 V 属于标准正交坐标基,且 $\nabla_X Y(p)=0$. 由 $[X, Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X=0-0=0$, 知向量场括号积都是零. 根据命题 8.3.2 (iv)和 $\nabla_V Y=0$ 知

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V)=\nabla_V R(X,Y,Z,W)$$
$$=\nabla_V R(Z,W,X,Y)$$
$$=V[R(Z,W,X,Y)] \qquad 因为\nabla_V(\cdot)=0$$
$$=\langle \nabla_V R(Z,W)X,Y\rangle.$$

类似地, $\nabla R(X, Y, W, V, Z)=\langle\nabla_Z R(W, V)X, Y\rangle$, $\nabla R(X, Y, V, Z, W)=\langle\nabla_W R(V, Z)X, Y\rangle$. 因此 X 和 Y 在计算中不起作用,我们从符号中除去它们. 则

$$\nabla_V R(Z,W)+\nabla_Z R(W,V)+\nabla_W R(V,Z)$$
$$=(\nabla_V\nabla_W-\nabla_W\nabla_V)\nabla_Z+(\nabla_Z\nabla_V-\nabla_V\nabla_Z)\nabla_W+(\nabla_W\nabla_Z-\nabla_Z\nabla_W)\nabla_V.$$ 449

令上式在 X 上取值,因为方括号为零,得到 $(\nabla_V R(Z, W)+\nabla_Z R(W, V)+\nabla_W R(V, Z))(X)=R(W, V, \nabla_Z X)+R(V, Z, \nabla_W X)+R(Z, W, \nabla_V X)$. 因为 $\nabla_Z X=0$, 所以

$$(\nabla_V R(Z,W)+\nabla_Z R(W,V)+\nabla_W R(V,Z))(X)=0.$$

因此命题成立. ■

比安基恒等式看起来很深奥,但是下面我们将看到它们可以大大简化计算.

高维微分几何既提出了了解非直观几何现象的挑战,同时也创造了研究这些几何现象的新的几何工具的机会. 其中一些就是新的曲率类型,在 2 维时就是高斯曲率. 截面曲率揭示了一些黎曼曲率的信息. 之所以它不是最终的答案,是因为前面我们已经提到它确定黎曼曲率. 取而代之,收缩法在处理高维问题时很有效,由此方法,我们可以分离出黎曼曲率中易处理的部分. 为此推广第 6 章用过的标架场的概念. 如果 $\mathcal{E}_1$, …, $\mathcal{E}_k$ 是定义在点 $p\in M^k$ 的邻域的向量场,在邻域内的每一点,有

$$\langle\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j\rangle=\delta_i^j,$$

则集合 $\{\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_k\}$ 称为在 p 的标架. 一个获得标架的方法就是取 p 点的正规坐标系(定理 8.4.10),然后沿经过 p 的测地线作平行移动,从而得到标架向量场. 根据练习 8.4.8,平行移动是等距变换,在正规坐标补片的任意点都保持标架的标准正交性. 不过早期得到的坐标公式的一些结果不一定成立. 无论如何,标架的优点远大于缺点,因此,在下文中假设任意点 p 都存在标架.

定义 8.5.9 里奇曲率定义为

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=\sum_{i=1}^{k}\langle R(X,\mathcal{E}_i)Y,\mathcal{E}_i\rangle,$$ 450

其中 X 和 Y 是 M^k 的切向量场. 标量曲率定义为

$$\kappa = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Ric}(\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_j) = \sum_{i,j=1}^{k} \langle R(\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_i)\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_i \rangle.$$

需要说明的是这些定义和标架场的选取无关. 原因是同一点的标架之间相差一个正交矩阵 A 即 $A^T = A^{-1}$. 也就是说 A 的行向量组是一组标准正交的向量. 结合练习 8.5.6 中的对称关系足以证明定义的不变性. 此处只给出 $k=2$ 时的证明. 假设 $\{\mathcal{F}_j\}$ 是另一个标架, 相对于基 $\{\mathcal{E}_i\}$ 的 2×2 正交矩阵为 $A=(a_{ij})$, 即

$$\mathcal{E}_i = a_{1i}\mathcal{F}_1 + a_{2i}\mathcal{F}_2.$$

A 的行向量组是标准正交的, 即 $a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0$, $a_{11}^2+a_{12}^2=1$, $a_{21}^2+a_{22}^2=1$. 利用练习 8.5.6 的对称关系, 得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= \langle R(X,\mathcal{E}_1)Y,\mathcal{E}_1\rangle + \langle R(X,\mathcal{E}_2)Y,\mathcal{E}_2\rangle \\
&= \langle R(X,a_{11}\mathcal{F}_1+a_{21}\mathcal{F}_2)Y, a_{11}\mathcal{F}_1+a_{21}\mathcal{F}_2\rangle \\
&\quad + \langle R(X,a_{12}\mathcal{F}_1+a_{22}\mathcal{F}_2)Y, a_{12}\mathcal{F}_1+a_{22}\mathcal{F}_2\rangle \\
&= a_{11}^2\langle R(X,\mathcal{F}_1)Y,\mathcal{F}_1\rangle + a_{11}a_{21}\langle R(X,\mathcal{F}_1)Y,\mathcal{F}_2\rangle \\
&\quad + a_{21}a_{11}\langle R(X,\mathcal{F}_2)Y,\mathcal{F}_1\rangle + a_{21}^2\langle R(X,\mathcal{F}_2)Y,\mathcal{F}_2\rangle \\
&\quad + a_{12}^2\langle R(X,\mathcal{F}_1)Y,\mathcal{F}_1\rangle + a_{12}a_{22}\langle R(X,\mathcal{F}_1)Y,\mathcal{F}_2\rangle \\
&\quad + a_{22}a_{12}\langle R(X,\mathcal{F}_2)Y,\mathcal{F}_1\rangle + a_{22}^2\langle R(X,\mathcal{F}_2)Y,\mathcal{F}_2\rangle \\
&= a_{11}^2\langle R(X,\mathcal{F}_1)Y,\mathcal{F}_1\rangle + 2a_{11}a_{21}\langle R(X,\mathcal{F}_1)Y,\mathcal{F}_2\rangle \\
&\quad + a_{21}^2\langle R(X,\mathcal{F}_2)Y,\mathcal{F}_2\rangle \\
&\quad + a_{12}^2\langle R(X,\mathcal{F}_1)Y,\mathcal{F}_1\rangle + 2a_{12}a_{22}\langle R(X,\mathcal{F}_1)Y,\mathcal{F}_2\rangle \\
&\quad + a_{22}^2\langle R(X,\mathcal{F}_2)Y,\mathcal{F}_2\rangle.
\end{aligned}$$

根据等式 $a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0$, $a_{11}^2+a_{12}^2=1$ 和 $a_{21}^2+a_{22}^2=1$, 得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= (a_{11}^2+a_{12}^2)\langle R(X,\mathcal{F}_1)Y,\mathcal{F}_1\rangle \\
&\quad + 2(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22})\langle R(X,\mathcal{F}_1)Y,\mathcal{F}_2\rangle \\
&\quad + (a_{21}^2+a_{22}^2)\langle R(X,\mathcal{F}_2)Y,\mathcal{F}_2\rangle \\
&= \langle R(X,\mathcal{F}_1)Y,\mathcal{F}_1\rangle + \langle R(X,\mathcal{F}_2)Y,\mathcal{F}_2\rangle.
\end{aligned}$$

451

因此, 里奇曲率与标架选取无关.

其次要注意的是里奇曲率和标量曲率的定义都类似于求迹的过程. 当然, 为了取矩阵 $A=(a_{ij})$ 的迹, 对于标准正交基 $\{\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_k\}$, 定义

$$\mathrm{tr}A = \sum_i a_{ii} = \sum_i \langle A(\mathcal{E}_i), \mathcal{E}_i\rangle,$$

这里, 对于里奇曲率, 取黎曼曲率的两个向量位置, 然后对标架的相同元素求和. 相似地, 或者更类似于迹, Ric 对相同的元素求和得到 κ. 这个过程称为收缩法, 记为 C. 因此, $C_{24}R=\mathrm{Ric}$, $C_{12}\mathrm{Ric}=\kappa$, 这是因为在第一种情形, 对第二个和第四个位置求和; 而在第二种情形, 对

第一个和第二个位置求和．有些作者习惯于用脚标 R_{ijtr} 表示，那么收缩的下标就必须调整才能和我们的记号保持一致．读者可能希望有更加正式精确的收缩记号，但这里并不需要．

例 8.5.10

(i)对于 k-流形 M^k，计算度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的收缩．对于上述标架，因为 $\langle\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_i\rangle=\delta_i^i$，所以

$$\begin{aligned} C(\langle\cdot,\cdot\rangle) &= \sum_{i=1}^{k}\langle\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_i\rangle \\ &= k \\ &= \dim M^k. \end{aligned}$$

(ii)收缩也可以用坐标表示．不考虑细节，对于坐标 $u^1,\cdots,u^k$ 以及切向量场的基 $\partial_1,\cdots,\partial_k$，其中 $\langle R(\partial_i,\partial_j)\partial_s,\partial_r\rangle=R_{ijsr}$，设

$$R_{is} = \sum_{j,r}R_{ijsr}g^{jr}.$$

这就是里奇曲率的组成部分．因为 $\sum_r g_{lr}g^{jr}=\delta_j^l$，所以由练习 8.5.3，得

$$\begin{aligned} R_{is} &= \sum_{j,r}\sum_{l}\left(\frac{\partial\Gamma_{is}^l}{\partial u^j}-\frac{\partial\Gamma_{js}^l}{\partial u^i}+\sum_m\Gamma_{is}^m\Gamma_{jm}^l-\Gamma_{js}^m\Gamma_{im}^l\right)g_{lr}g^{jr} \\ &= \sum_{j,l}\left(\frac{\partial\Gamma_{is}^l}{\partial u^j}-\frac{\partial\Gamma_{js}^l}{\partial u^i}+\sum_m\Gamma_{is}^m\Gamma_{jm}^l-\Gamma_{js}^m\Gamma_{im}^l\right)\sum_r g_{lr}g^{jr} \\ &= \sum_{l}\left(\frac{\partial\Gamma_{is}^l}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma_{ls}^l}{\partial u^i}+\sum_m\Gamma_{is}^m\Gamma_{lm}^l-\Gamma_{ls}^m\Gamma_{im}^l\right). \end{aligned}$$ 452

为了理解这些曲率的作用，以下列举了几个定理，但是没有给出证明．对于第一个定理的证明见[SGL90]．

定理 8.5.11(Myers 定理) *假设 M^k 是完备 k-流形，且 M^k 的里奇曲率严格有界大于零，即*

$$\mathrm{Ric}(X,X)\geqslant\frac{k-1}{r^2}>0,$$

则 M^k 是紧的，且 M^k 的直径小于等于 πr.

比较博内的结果，即定理 6.8.16．标量曲率可以约束流形的类型．将下述结果和亚历山大定理 4.4.6 比较．

定理 8.5.12 *有常标量曲率的紧超曲面 $M^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 诱导度量下的 S^n 球面.*

练习 8.5.13 对于 $\mathbb{R}^3$ 中由正交坐标补片定义的曲面，证明里奇曲率和标量曲率分别是

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=K\langle X,Y\rangle \quad 和 \quad \kappa=2K,$$

其中 K 是高斯曲率．提示：利用练习 8.5.3．实际上不需要正交坐标补片的条件，而在练习 8.5.3 中作此假设是为了简单．

练习 8.5.14 证明共变微商、度量和括号积满足等式：

$$\begin{aligned} 2\langle X,\nabla_Z Y\rangle = {} & Z\langle X,Y\rangle+Y\langle X,Z\rangle-X\langle Y,Z\rangle \\ & +\langle Y,[X,Z]\rangle+\langle Z,[X,Y]\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle. \end{aligned}$$

练习 8.5.15 以下脱离 $\mathbb{R}^{n+1}$ 诱导的度量走出一小步．度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的倍数，

如果对于任意的 X 和 Y，有

$$\widetilde{\langle X,Y\rangle} = \lambda\langle X,Y\rangle,$$

其中 λ 是常数. 如果 λ 是 M 上的光滑函数，那么这个度量是共形的. 以符号 $\widetilde{\nabla}$，$\widetilde{R}$，$\widetilde{\mathrm{Ric}}$ 和 $\widetilde{\kappa}$ 表示相应于 $\widetilde{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ 的共变微商和曲率. 证明对于“倍数”度量下述性质成立.

(1) $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$（利用练习 8.5.14 的公式）.

(2) $\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = \lambda R(X, Y, Z, W)$（利用(1)）.

(3) $\widetilde{K}(X, Y) = \frac{1}{\lambda}K(X, Y)$（利用(2)）.

453 (4) $\widetilde{\mathrm{Ric}}(X, Y) = \mathrm{Ric}(X, Y)$（利用(2)）.

(5) $\widetilde{\kappa} = \frac{1}{\lambda}\kappa$（利用(4)）.

练习 8.5.16 设 $P^k = \{(u^1, \cdots, u^k)\in\mathbb{R}^k \mid u^k > 0\}$ 是类似于 2 维庞加莱平面的上半空间. 定义 P^k 上的度量为

$$\langle v, w\rangle = \frac{v\cdot w}{(u^k)^2}.$$

用我们现在的话说就是

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle = \frac{e_i\cdot e_j}{(u^k)^2} = \frac{\delta^i_j}{(u^k)^2},$$

其中 e_i 是 $\mathbb{R}^k$ 的标准正交基向量. 因此，这个度量矩阵是对角的. P^k 的截面曲率是常数 -1. 以下是部分内容. 对于全部内容，包括一般共形度量的公式，见[Car92, 8.3].

(1) 证明克利斯朵夫符号是

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_l g^{lr}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_i g_{jr} + \partial_j g_{ri} - \partial_r g_{ij}),\end{aligned}$$

且仅在下列情况下非零：

$$\Gamma^j_{kj} = -\frac{1}{u^k}\quad 对\ j\neq k,\quad \Gamma^k_{ii} = \frac{1}{u^k}\quad 对\ i\neq k,\quad \Gamma^k_{kk} = -\frac{1}{u^k}.$$

(2) 证明与截面曲率相关的黎曼曲率部分是

$$\begin{aligned}R_{ijij} &= \sum_l\left(\frac{\partial\Gamma^l_{ii}}{\partial u^j} - \frac{\partial\Gamma^l_{ji}}{\partial u^i} + \sum_m \Gamma^m_{ii}\Gamma^l_{jm} - \Gamma^m_{ji}\Gamma^l_{im}\right)g_{lj} \\ &= \left(\frac{\partial\Gamma^j_{ii}}{\partial u^j} - \frac{\partial\Gamma^j_{ji}}{\partial u^i} + \sum_m \Gamma^m_{ii}\Gamma^j_{jm} - \Gamma^m_{ji}\Gamma^j_{im}\right)\left(\frac{1}{(u^k)^2}\right),\end{aligned}$$

且唯一的非零部分是 $R_{kjkj} = R_{ikik} = R_{ijij} = -1/(u^k)^4$. 这里假设 R_{kjkj} 中 $k\neq j$，R_{ikik} 中 $i\neq k$，R_{ijij} 中 $i\neq j$.

(3) 对于上述情形，利用(2)的结果证明截面曲率部分 $K_{ij} = R_{ijij}/(g_{ii}\cdot g_{jj})$ 是常数 -1. 这
454 个练习给出把第 5 章的共形度量推广到高维的方法.

练习 8.5.17 如果对任意 X，Y，都有 $K(X, X)\geqslant 0$，则称流形 M^k 的截面曲率非负．如果对任意的 X，均有 $\mathrm{Ric}(X, X)\geqslant 0$，则称里奇曲率非负．证明 M 截面曲率非负意味着里奇曲率非负，进而 M 的标量曲率非负．提示：首先证明公式

$$\mathrm{Ric}(X,X) = \langle X,X\rangle \sum_{j=1}^{k-1} K(X,\mathcal{E}_j),$$

其中标架 $\{\mathcal{E}_j\}$ 张成与 X 正交的向量场 $X^{\perp}$．

练习 8.5.18 验证下面这个超出我们定义的练习．李群 G 是一个光滑流形，乘法 $G\times G\to G$ 是光滑的，且有单位元 e 和逆元．取 G 是紧连通的，例如特殊正交群 $SO(n)$ 就是紧连通的李群．由 $X(e)\in T_eG$，$X(g)=g_*(X(e))\in T_gG$ 定义了 G 上的向量场．g_* 是由乘法 $(g, h)\mapsto g\cdot h$ 诱导的切向量场的映射．这一类向量场称为左不变向量场．李群有很好的对称性，单位元处共变微商和曲率决定了其他点的共变微商及曲率．而且对任意左不变向量场，$\nabla_X X=0$．因此切向量是左不变向量场的曲线都是测地线．同样对于上述 G 的左不变向量场的向量 X，Y 和 Z，$\langle[X, Y], Z\rangle=-\langle Y, [X, Z]\rangle$．这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 首先是定义在 T_eG 上的度量，由李群的乘法可以得到 G 上任一点的切空间的度量．

对紧连通李群 G 的左不变向量场 X，Y 和 Z，证明

(1) $\nabla_X Y=\dfrac{1}{2}[X, Y]$（考虑 $\nabla_{X-Y}(X-Y)$ 且利用命题 8.3.2(v)）．

(2) $R(X, Y)Z=\dfrac{1}{4}[[X, Y], Z]$．

（由 R 的定义开始，利用(1)把 R 完全表示为括积的形式．最后，利用括积的雅可比恒等式（练习 8.3.4(3))．）

(3) 如果 X，Y 是标准正交的，那么 $K(X, Y)=\dfrac{1}{4}|[X, Y]|^2$． 455

因此，紧连通李群的截面曲率，进而里奇曲率以及标量曲率都是非负的．（利用 K 的定义、(1)、命题 8.3.2(iv) 以及恒等式 $\langle[X, Y], Z\rangle=-\langle Y, [X, Z]\rangle$，其中 $Z=Y$．）

李群 G 的基灵型定义为 $b(X, Y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y)$，其中 $\mathrm{ad}_Z(W)=[Z, W]$ 是左不变向量场空间的线性变换．可以证明 b 是对称的、双线性的，且在 G 的自同构下不变．如果 b 是非退化的，即对任意 W，$b(V, W)=0$ 意味着 $V=0$，那么 b 是 G 上双不变的度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$．即 $\langle X, Y\rangle=b(X, Y)$．有非退化基灵型的李群是半单李群．例如 $SO(n)$ 是半单的．利用上面的(2)和 ad_Z 的定义，证明度量为 b 的半单李群的里奇曲率为

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = -\frac{1}{4}b(X,Y).$$

在结束本节之前，利用上述概念计算一些现代物理上的问题．爱因斯坦的广义相对论就基于能量和动量扭曲了时空的几何性质这一原理．这一原理使得很多物理现象是合理的，诸如光线在太阳和水星的近日点发生扭曲（沿时空的测地线）．虽然这一原理运用于我们这些初步的讨论很简单，但精确的关系式还不清楚．如果相信这一关系式，则最简单的公式可能就是

$$G = cT,$$

其中 G 是某种类型的曲率（称为爱因斯坦曲率），T 是依赖于某一特别时空区域的动能和动量（称为压力张量）．特别地，在真空中 $T=0$——但我们感兴趣的物理现象就不会出现（例如光的

弯曲）．如果 G 是黎曼曲率 R，则公式 $G=cT$ 连同假设 $T=0$ 意味着黎曼曲率为零．而前面我们说过，$R=0$ 意味着流形是平坦的．因此，时空必须是平坦的，而这与由几何诱导的物理现象相矛盾．所以 G 不能是黎曼曲率．下一个逻辑上的选择就是里奇曲率了，假设 $G=\mathrm{Ric}$，那么自然要问．还需要什么其他的物理量？因为能量和动量的守恒定律必须成立，所以 T 的某
456 种散度为零，这意味着 G 是自由散度的．

若 $V=(V^1, V^2, V^3)$ 是$\mathbb{R}^3$ 中的向量场，坐标为 x^1，x^2 和 x^3，可知

$$\mathrm{div}V=\frac{\partial V^1}{\partial x^1}+\frac{\partial V^2}{\partial x^2}+\frac{\partial V^3}{\partial x^3}=\sum_i\langle\nabla^{\mathbb{R}^3}_{e_i}V,e_i\rangle,$$

其中 e_i 是通常的爱因斯坦标准正交基向量．

练习 8.5.19 证明最后一个等式

$$\frac{\partial V^1}{\partial x^1}+\frac{\partial V^2}{\partial x^2}+\frac{\partial V^3}{\partial x^3}=\sum_i\langle\nabla^{\mathbb{R}^3}_{e_i}V,e_i\rangle.$$

用相同的方法，在流形 M^k 上也可以定义向量场的散度和 2-张量的双线性量，例如度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 Ric 等．设 $A(\cdot,\cdot)$ 就是这样的量，定义 A 的散度 $\mathrm{div}A(\cdot)$ 是 1-形式的线性量为

$$\begin{aligned}\mathrm{div}A(X)&\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_i\nabla_{\mathcal{E}_i}A(\mathcal{E}_i,X)\\&=\sum_i\mathcal{E}_iA(\mathcal{E}_i,X)-A(\nabla_{\mathcal{E}_i}\mathcal{E}_i,X)-A(\mathcal{E}_i,\nabla_{\mathcal{E}_i}X),\end{aligned}$$

其中 $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^k$ 是标架，且 ∇A 的定义类似于命题 8.5.8 的第二比安基恒等式中的 ∇R 的定义．这里要注意几件事情．首先散度产生了一个张量——由它在那一点的取值完全决定．虽然可以用标架定义散度，但是只有散度与标架无关时，计算才比较方便．考虑下面例子．

例 8.5.20（度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的散度为零） 取任意点 $p\in M$ 的正规坐标，沿以 p 点为起始点的测地线平行移动将其展开为标架 $\{\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_k\}$．特别地，在 p 点有 $\nabla_{\mathcal{E}_i}\mathcal{E}_j=0$．因为散度由标架的取值决定，所以在 M 的任意点的计算同 p 点相同．因为取的是正规坐标，所以在 p 点就有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\langle\cdot,\cdot\rangle(\mathcal{E}_i)&=\sum_j\nabla_{\mathcal{E}_j}\langle\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_i\rangle\\&=\sum_j\mathcal{E}_j\langle\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_i\rangle-\langle\nabla_{\mathcal{E}_j}\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_i\rangle-\langle\mathcal{E}_j,\nabla_{\mathcal{E}_j}\mathcal{E}_i\rangle\\&=\sum_j\mathcal{E}_j\langle\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_i\rangle-0-0.\end{aligned}$$

457

因为在坐标邻域上，$\langle\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j\rangle=\delta_i^j$ 且常数的 $\mathcal{E}_j$ 导数是零，所以第一项是零．因此

$$\mathrm{div}\langle\cdot,\cdot\rangle(\mathcal{E}_i)=0.$$

因为对任意的 $\mathcal{E}_i$ 上式成立且是线性的，所以对任何向量场都成立．

练习 8.5.21 对光滑函数 f：$M\to\mathbb{R}$，证明

$$\mathrm{div}(f\langle\cdot,\cdot\rangle)=\mathrm{d}f,$$

其中 $\mathrm{d}f$ 是由 $\mathrm{d}f(X)=X[f]$ 定义的 f 的微分，其中 X 是向量场．因此共形度量的散度仅与共形因子有关．注意，因为散度依赖于标架的选取，所以由练习 8.5.10 知这样的定义有意义．证明对于度量 $f\langle\cdot,\cdot\rangle$，由标架 $\{(1/\sqrt{f})\mathcal{E}_i\}$ 可得出 $\mathrm{div}(f\langle\cdot,\cdot\rangle)=0$.

把散度应用到里奇曲率可得一个很漂亮的关系式.

定理 8.5.22 *里奇曲率和标量曲率 κ 满足关系式:*

$$\mathrm{d}\kappa = 2\mathrm{div}(\mathrm{Ric})$$

证明 选取由 $p\in M$ 的正规坐标沿测地线的平行移动诱导的标架，故在 p 点，对任意 i 和 j，都有 $\nabla_{\mathcal{E}_i}\mathcal{E}_j=0$. 则

$$\begin{aligned}2\mathrm{div}(\mathrm{Ric})(\mathcal{E}_k) &= 2\sum_j \nabla_{\mathcal{E}_j}\mathrm{Ric}(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_k)\\ &= 2\sum_j \mathcal{E}_j\mathrm{Ric}(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_k)\\ &= 2\sum_{i,j} \mathcal{E}_j\langle R(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_i)\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_i\rangle\\ &= \sum_{i,j} \mathcal{E}_j\langle R(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_i)\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_k\rangle + \sum_{i,j}\mathcal{E}_k\langle R(\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j)\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_j\rangle,\end{aligned}$$

其中第二项由调换 i 和 j 的位置得到. 由 R 的对称关系以及第二比安基恒等式得

$$\begin{aligned}2\mathrm{div}(\mathrm{Ric})(\mathcal{E}_k) &= \sum_{i,j} \mathcal{E}_j\langle R(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_k)\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_i\rangle + \sum_{i,j}\mathcal{E}_k\langle R(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_k)\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_k\rangle\\ &= \sum_{i,j} \nabla R(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j) + \nabla R(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_k)\\ &= -\sum_{i,j}\nabla R(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_k).\end{aligned}$$ 458

交换前两个坐标，得

$$\begin{aligned}2\mathrm{div}(\mathrm{Ric})(\mathcal{E}_k) &= \sum_{i,j}\nabla R(\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_k)\\ &= \sum_{i,j}\mathcal{E}_k R(\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j)\\ &= \mathcal{E}_k\sum_{i,j}R(\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_j)\\ &= \mathcal{E}_k[\kappa]\\ &= \mathrm{d}\kappa(\mathcal{E}_k).\end{aligned}$$

因为它在基上是成立的，所以定理成立. ■

练习 8.5.23 如果对固定的常数 λ 以及向量场 X 和 Y，$\mathrm{Ric}(X, Y)=\lambda\langle X, Y\rangle$，那么度量是 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的流形 $(M^k, \langle\cdot,\cdot\rangle)$，称为爱因斯坦流形.

(1)证明对于 $k\geqslant 3$ 的光滑函数 $\lambda: M^k\to R$，如果 $\mathrm{Ric}(X, Y)(p)=\lambda(p)\langle X, Y\rangle(p)$，则 M^k 是爱因斯坦流形. 提示：(1)先计算 κ；(2)然后利用定理 8.5.22.

(2)证明基灵型度量为 b 的半单李群是爱因斯坦流形. 提示：利用练习 8.5.18 的最后一部分.

那么，这几点都是什么呢？在开始讨论时，假设爱因斯坦曲率和里奇曲率是相同的，而且爱因斯坦曲率是自由散度. 但由定理 8.5.22 知，一般的里奇曲率有非零的散度. 怎样统一这一概念呢？根据练习 8.5.21，可知

$$\mathrm{div}(\kappa\langle\cdot,\cdot\rangle) = \mathrm{d}\kappa,$$

故 $\mathrm{div}(\kappa(\cdot,\cdot))=2\mathrm{div}(\mathrm{Ric})$，因此

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{Ric}-\frac{1}{2}\kappa(\cdot,\cdot)\right)=0.$$

这个结果是说，如果定义爱因斯坦曲率 $G=\mathrm{Ric}-\frac{1}{2}\kappa(\cdot,\cdot)$，那么我们得到一类散度为零的曲率. 同时，有下面定理.

定理 8.5.24 *爱因斯坦曲率和里奇曲率互相决定. 特别地，$G=0$ 当且仅当 $\mathrm{Ric}=0$.*

证明 以C表示收缩. 由前面例 8.5.10 的讨论可知里奇曲率的收缩是标量曲率，故可记为

$$G=\mathrm{Ric}-\frac{1}{2}\kappa(\cdot,\cdot)$$

459 $$=\mathrm{Ric}-\frac{1}{2}C(\mathrm{Ric})\langle\cdot,\cdot\rangle.$$

显然，例 8.5.10 本身说明$C(\langle\cdot,\cdot\rangle)=\dim M$，所以

$$C(G)=C(\mathrm{Ric})-\frac{1}{2}\kappa C(\langle\cdot,\cdot\rangle)$$

$$=\kappa-\frac{1}{2}\kappa\dim M$$

$$=\left(1-\frac{\dim M}{2}\right)\kappa.$$

而时空是 4 维空间——时间和$\mathbb{R}^3$——所以 $M=4$. 因此，$C(G)=-\kappa$ 且

$$\mathrm{Ric}=G+\frac{1}{2}\kappa(\cdot,\cdot)$$

$$=G-\frac{1}{2}C(G)\langle\cdot,\cdot\rangle.$$

所以 Ric 和 G 互相决定. ■

因此，爱因斯坦曲率是爱因斯坦场方程 $G=8\pi T$ 的一个很好的选择. 实际上，因为在真空中$T=0$，解方程 $\mathrm{Ric}=0$ 要比解方程 $G=0$ 方便，所以爱因斯坦曲率同里奇曲率的关系很重要. 也许我们要解释一下"解"这个词的含义. 什么是已知什么是未知呢？一般地，我们都是从里奇曲率的假设和一些几何知识决定时空的几何结构. 由例 8.5.10 知，里奇曲率可由克利斯朵夫符号及其导数给出. 而克利斯朵夫符号及其导数可由度量的导数表出. 因此表达式

$$R_{ii}=0$$

是关于度量的 2 阶偏微分方程. 因此，当我们解这个系统时，就决定了时空区域的度量. 因为度量决定一切，我们可以肯定地说理解了这个特殊的区域的时空的几何意义.

例 8.5.25(施瓦茨解) 在质量为 M 的对称球体外，真空场方程 $R_{ii}=0$ 的解是

$$g_{00}=1-\frac{2M}{r},\quad g_{11}=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1},\quad g_{22}=-r^2,\quad g_{33}=-r^2\sin^2\phi.$$

这就是施瓦茨在 1916 年得到的施瓦茨解. 注意这个度量不同于我们通常的度量，因为它不是正
460 定的. 实际上，空间是基于特殊关系的平坦度量，其中 $g_{00}=1$，$g_{11}=-1$，$g_{22}=-1$，$g_{33}=-1$. 这些度量称为半黎曼度量，一般的黎曼几何理论中的很多都可以照搬到这些度量上.

有一些很好的书，更详细地讲述了这方面的内容. 特别地，对于高维几何理论的讨论，见[Spi79, SGL90, Car92]. 对于光弯曲和水星近日点运动的相关讨论见[Fab83]. 相对论见经典的[CMW73]，对于微分几何与相对论的完美结合可见[0'N83].

8.6 有趣的双重性质

上面所做的一切都有一个有用且很优美的对偶公式. 首先回忆(实)向量空间 V 总存在 V 上线性函数组成的对偶空间 $V^* = \{f: V \to \mathbf{R} \mid f \text{ 线性}\}$. 对于 V 的基$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$，对偶空间存在满足

$$\bar{\boldsymbol{v}}^i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_i^j$$

的基$\{\bar{\boldsymbol{v}}^1, \cdots, \bar{\boldsymbol{v}}^k\}$. 同样地，如果$\boldsymbol{v}_i$ 是切向量场，且构成任一点 $p \in M$ 的基. 那么它们的对偶称为 1-形式，用 θ 表示. 显然与∂_i 对偶的 1-形式θ^i 满足 $\theta^i(\partial_j) = \delta_j^i$. 如果取$\{\partial_i\}$作为向量场的基，那么以 du^i 表示对偶 1-形式 θ^i，而坐标向量场$\partial_i = \partial/\partial u^i$.

以$\tilde{f}$: $V \to V^* \otimes V$ 表示满足 $f(\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_s) = \sum_r \tilde{\Gamma}_{is}^r \boldsymbol{v}_r$ 的线性变换 f: $V \otimes V \to V$，其中$\tilde{f}(\boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{v}_s) = f(\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_s)$. $\otimes$表示张量积. 基分别为$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$，$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$的向量空间 V，W 的张量积 $V \otimes W$ 的基为

$$\{\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_j\},$$

其中 $i = 1, \cdots, m$，$j = 1, \cdots, n$. 显然，也可记成

$$\tilde{f}(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{j,r} a_{ji}^r \boldsymbol{v}^j \otimes \boldsymbol{v}_r,$$ 461

其中 $a_{ji}^r \in \mathbf{R}$. 又因为在公式中有对偶基的元素，所以取在$\boldsymbol{v}_s$ 处的值，得

$$\tilde{f}(\boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{v}_s) = \sum_{j,r} a_{ji}^r \bar{\boldsymbol{v}}^j(\boldsymbol{v}_s) \boldsymbol{v}_r \boldsymbol{v}^j$$

$$= \sum_r a_{si}^r \boldsymbol{v}_r.$$

而$\tilde{f}(\boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{v}_s) = f(\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_s) = \sum_r \tilde{\Gamma}_{is}^r \boldsymbol{v}_r$，比较两个公式我们看出

$$a_{si}^r = \tilde{\Gamma}_{is}^r.$$

这个关系式对任意的 i, s 都成立. 因此，$\tilde{f}(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{j,r} \tilde{\Gamma}_{ij}^r \bar{\boldsymbol{v}}^j \otimes \boldsymbol{v}_r$.

对于共变微商可以做相同的工作. 更准确地说，如果 V 表示 M 的切向量场，那么共变微商是$\mathbf{R}$ 线性映射∇: $V \otimes V \to V$. 和上面一样，它可以写成对偶的形式$\tilde{\nabla}$: $V \to \dot{V} \otimes V^*$，即

$$\tilde{\nabla}(\mathcal{E}_i) = \sum_r \omega_i^r \mathcal{E}_r,$$

其中$\{\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_k\}$是 M^k 的标架，ω_i^r 是 1-形式. 为方便起见，省略张量积的符号$\otimes$. 同时可以看出它是相同的共变微商的不同的描述，因此$\tilde{\nabla}$可简记为∇. 下面求 1-形式的系数. 以$\{\theta_1, \cdots, \theta_k\}$表示相对于标架$\{\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_k\}$的对偶 1-形式. 把下面的计算应用于上面的向量场. (用$\tilde{\Gamma}$表示基的系数，即使选择的标架不是坐标标架. 因此，$\tilde{\Gamma}$不再是通常意义下的克利斯朵夫符号，但是如果$\mathcal{E}_i = \partial_i$，则$\tilde{\Gamma} = \Gamma$.)

根据上述向量空间的公式，得

$$\sum_r \widetilde{\Gamma}^r_{si}\, \mathcal{E}_r = \nabla_{\mathcal{E}_s} \mathcal{E}_i$$

$$= \nabla(\mathcal{E}_i)(\mathcal{E}_s)$$

$$= \sum_{j,r} \widetilde{\Gamma}^r_{ji} \theta^j(\mathcal{E}_s)\, \mathcal{E}_r.$$

再由 1-形式的公式，有

$$\nabla(\mathcal{E}_i)(\mathcal{E}_s) = \sum_r \omega_i^r(\mathcal{E}_s)\, \mathcal{E}_r.$$

故

462

$$\sum_r \left(\sum_j \widetilde{\Gamma}^r_{ji} \theta^j(\mathcal{E}_s) \right) \mathcal{E}_r = \sum_r \omega_i^r(\mathcal{E}_s)\, \mathcal{E}_r.$$

因为这对任意的 s 都成立，所以

$$\sum_j \widetilde{\Gamma}^r_{ji} \theta^j = \omega_i^r.$$

因此，联络 1-形式 ω_i^r 可由对偶标架和共变微商的基的展开系数表出.

练习 8.6.1 证明

$$\sum_l (\widetilde{\Gamma}^l_{ji} - \widetilde{\Gamma}^l_{ij})\, \mathcal{E}_l = [\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j].$$

因此 $\widetilde{\Gamma}^l_{ji} = \widetilde{\Gamma}^l_{ij}$. 提示：利用命题 8.3.2(v). 同样可以证明 $\widetilde{\Gamma}^l_{ji} = -\widetilde{\Gamma}^i_{jl}$. 提示：命题 8.3.2(iv).

练习 8.6.2 证明

$$\omega_i^j = -\omega_j^i.$$

提示：利用命题 8.3.2(iv).

因为黎曼曲率是由第二共变微商定义的，所以如果我们也想将它写成对偶的形式，必须知道如何求 1-形式的微分. 考虑 k 个变量 $u^1, \cdots, u^k$ 的函数 f，其微分是

$$\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathrm{d}u^i.$$

因为 $\mathrm{d}u^i$ 是对偶于向量场 ∂_i 的 1-形式，所以 $\mathrm{d}f$ 本身就是 1-形式. 因此，1-形式的导数是 2-形式. 类似于 1-形式在向量场上的作用，2-形式可以作用在向量场对上.

例 8.6.3 设 θ，ϕ 是 1-形式. 由它们在向量场 V，W 上的作用定义 2-形式 $\theta \wedge \phi$ 为

$$\theta \wedge \phi(V, W) = \theta(V) \cdot \phi(W) - \theta(W) \cdot \phi(V).$$

$\theta \wedge \phi$ 称为 1-形式的楔积. 注意，$\theta \wedge \phi = -\phi \wedge \theta$. 特别地，对任意的 1-形式 θ，$\theta \wedge \theta = 0$.

为了与 $\mathrm{d}f$ 的定义保持一致，定义 1-形式 $f\mathrm{d}u^i$ 的外导数为

$$\mathrm{d}(f\mathrm{d}u^i) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial u^j} \mathrm{d}u^j \wedge \mathrm{d}u^i,$$

其中 u^i 是坐标. 这等价于对任意的两个向量场 V，W，由公式

$$\mathrm{d}\theta(V, W) = V[\theta(W)] - W[\theta(V)] - \theta([V, W])$$

463 给出了 d 的定义.

练习 8.6.4 对于坐标向量场 $V = \partial_j$，$W = \partial_i$，证明由公式 $\mathrm{d}\theta(V, W) = V[\theta(W)] -$

$W[\theta(V)]-\theta([V,W])$ 可得

$$d(f\,du^i)=\partial_j f\delta_i^r-\partial_r f\delta_i^j,$$

其中 $j<r$，解释为什么这与 d 的坐标公式相同．

定理 8.6.5（第一结构方程） 设 $\{\mathcal{E}_i\}$ 是 M^k 的标架，对偶标架为 θ^i，联络系数是 ω_i^j，则

$$d\theta^i=-\sum_l \omega_l^i\wedge\theta^l.$$

证明 分别计算方程的两边．因为 $\theta^i(\mathcal{E}_j)=\delta_j^i$ 的导数是零，所以

$$d\theta^i(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_r)=-\theta^i([\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_r]).$$

因为 $\theta^i(\mathcal{E}_j)=\delta_j^i$，所以根据命题 8.3.2(v)，有

$$\begin{aligned}d\theta^i(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_r)&=-\theta^i(\nabla_{\mathcal{E}_j}\mathcal{E}_r-\nabla_{\mathcal{E}_r}\mathcal{E}_j)\\&=-\theta^i(\nabla\mathcal{E}_r(\mathcal{E}_j)-\nabla\mathcal{E}_j(\mathcal{E}_r))\\&=-\theta^i\left(\sum_l\omega_r^l(\mathcal{E}_j)\,\mathcal{E}_l-\sum_l\omega_j^l(\mathcal{E}_r)\,\mathcal{E}_l\right)\\&=\omega_j^i(\mathcal{E}_r)-\omega_r^i(\mathcal{E}_j).\end{aligned}$$

楔积的和为

$$\begin{aligned}\sum_l\omega_l^i\wedge\theta^l(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_r)&=\sum_l(\omega_l^i(\mathcal{E}_j)\theta^l(\mathcal{E}_r)-\omega_l^i(\mathcal{E}_r)\theta^l(\mathcal{E}_j))\\&=\omega_r^i(\mathcal{E}_j)-\omega_j^i(\mathcal{E}_r).\end{aligned}$$

因为它们在同一组基上的取值相同，所以结论成立． 464

把上面的工作同黎曼曲率联系起来．和通常一样，记 $R(\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j)\mathcal{E}_m=\sum_r R^r_{ijm}\,\mathcal{E}_r$，则

$$\begin{aligned}R(\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j)\,\mathcal{E}_m&=\nabla_{[\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j]}\mathcal{E}_m+\nabla_{\mathcal{E}_j}\nabla_{\mathcal{E}_i}\mathcal{E}_m-\nabla_{\mathcal{E}_i}\nabla_{\mathcal{E}_j}\mathcal{E}_m\\&=\nabla\mathcal{E}_m([\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j])+\nabla(\nabla\mathcal{E}_m(\mathcal{E}_i))(\mathcal{E}_j)-\nabla(\nabla\mathcal{E}_m(\mathcal{E}_j))(\mathcal{E}_i)\\&=\sum_l\omega_m^l([\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j])\,\mathcal{E}_l+\nabla\left(\sum_s\omega_m^s(\mathcal{E}_i)\,\mathcal{E}_s\right)(\mathcal{E}_j)-\nabla\left(\sum_s\omega_m^s(\mathcal{E}_j)\,\mathcal{E}_s\right)(\mathcal{E}_i)\\&=\sum_l\omega_m^l([\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j])\,\mathcal{E}_l+\sum_s\mathcal{E}_j\omega_m^s(\mathcal{E}_i)\,\mathcal{E}_s+\sum_s\omega_m^s(\mathcal{E}_i)\sum_r\omega_s^r(\mathcal{E}_j)\,\mathcal{E}_r\\&\quad-\sum_s\mathcal{E}_i\omega_m^s(\mathcal{E}_j)\,\mathcal{E}_s-\sum_s\omega_m^s(\mathcal{E}_j)\sum_r\omega_s^r(\mathcal{E}_i)\,\mathcal{E}_r\\&=-\sum_s[\mathcal{E}_i\omega_m^s(\mathcal{E}_j)-\mathcal{E}_j\omega_m^s(\mathcal{E}_i)-\omega_m^s([\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j])]\,\mathcal{E}_s\\&\quad+\sum_r\left[\sum_s\omega_m^s(\mathcal{E}_i)\omega_s^r(\mathcal{E}_j)-\omega_m^s(\mathcal{E}_j)\omega_s^r(\mathcal{E}_i)\right]\mathcal{E}_r\\&=-\sum_r\left(d\omega_m^r(\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j)-\sum_s\omega_m^s\wedge\omega_s^r(\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j)\right)\mathcal{E}_r\\&=-\sum_r\left(\left(d\omega_m^r-\sum_s\omega_m^s\wedge\omega_s^r\right)(\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j)\right)\mathcal{E}_r.\end{aligned}$$

令 $\Omega^r_m = \mathrm{d}\omega^r_m - \sum_i \omega^i_m \wedge \omega^r_i$，得

$$R^r_{ijm} = -\Omega^r_m(\mathcal{E}_i,\mathcal{E}_j).$$

这个 2-形式的矩阵 $\Omega=(\Omega^r_m)$ 称为曲率 2-形式．由公式 $R^r_{ijm}=-\Omega^r_m(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j)$ 定义 Ω，则有下面的定理．

定理 8.6.6（第二结构方程） *如果 Ω 表示曲率 2-形式，ω^r_m 表示由 ∇ 决定的联络 1-形式，那么*

$$\Omega^r_m = \mathrm{d}\omega^r_m - \sum_i \omega^i_m \wedge \omega^r_i.$$

无论是由 R 还是由这个诱导关系式定义 Ω，曲率都是由外导数和联络 1-形式的楔积决定的．

例 8.6.7 假设坐标补片 M：$x(u, v)\subset\mathbb{R}^3$ 满足 $x_u \cdot x_u=E$，$x_u \cdot x_v=0$，$x_v \cdot x_v=G$．由

465

$$\mathcal{E}_1=\frac{x_u}{\sqrt{E}} \quad 和 \quad \mathcal{E}_2=\frac{x_v}{\sqrt{G}}$$

定义标架，而 θ^1，θ^2 是满足 $\theta^i(\mathcal{E}_j)=\delta^i_j$ 的对偶标架．因此，根据坐标 1-形式，$\theta^1=\sqrt{E}\mathrm{d}x_u$，$\theta^2=\sqrt{G}\mathrm{d}x_v$．因为 $\mathrm{d}x_u\wedge\mathrm{d}x_u=0$，且 $\mathrm{d}x_v=\theta^2/\sqrt{G}$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta^1 &= \frac{E_u}{2\sqrt{E}}\mathrm{d}x_u \wedge \mathrm{d}x_u + \frac{E_v}{2\sqrt{E}}\mathrm{d}x_v \wedge \mathrm{d}x_u \\ &= -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\mathrm{d}x_u \wedge \theta^2.\end{aligned}$$

类似地，有

$$\mathrm{d}\theta^1 = -\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\mathrm{d}x_v \wedge \theta^1.$$

记 $\omega^1_2=a\mathrm{d}x_u+b\mathrm{d}x_v$，则 $\omega^2_1=-a\mathrm{d}x_u-b\mathrm{d}x_v$，$\mathrm{d}\theta^1=-a\mathrm{d}x_u\wedge\theta^2$，$\mathrm{d}\theta^2=b\mathrm{d}x_v\wedge\theta^1$（回忆第一结构方程中的负号）．由此可得

$$a=\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}, \quad b=-\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}.$$

因此，$\omega^1_2=\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\mathrm{d}x_u-\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\mathrm{d}x_v$，且

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^1_2 &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v \mathrm{d}x_v \wedge \mathrm{d}x_u + \left(\frac{-G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u \mathrm{d}x_u \wedge \mathrm{d}x_v\right) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)\theta^1 \wedge \theta^1.\end{aligned}$$

这是因为 $\theta^1/\sqrt{E}=\mathrm{d}x_u$，$\theta^2/\sqrt{G}=\mathrm{d}x_v$．因此

$$\mathrm{d}\omega^1_2 = K\theta^1 \wedge \theta^2,$$

其中，根据定理 3.4.1 知 K 是高斯曲率，且 $\mathrm{d}\omega^2_1=-K\theta^1\wedge\theta^2$．当然，前面在第 6 章我们已经遇到 1-形式 ω^1_2，当时只是将它限制在曲线上，从而把它看作一个函数．这里揭示了它作为 1-

形式的本质。上述公式是所有数学中最优美的结果之一。它也可以解释练习 6.3.10 的结果(为什么?)。

例 8.6.8 (球面 S^2) 对于 S^2 上通常的坐标补片,有 $E=R^2\cos^2 v$,$F=0$,$G=R^2$。对偶标架是

$$\theta^1 = R\cos v \mathrm{d}x_u \quad 和 \quad \theta^2 = R\mathrm{d}x_v.$$

外导数为

$$\mathrm{d}\theta^1 = \sin v \mathrm{d}x_u \wedge \theta^2 \quad 和 \quad \mathrm{d}\theta^1 = 0.$$

因此,$\omega_2^1 = -\sin v \mathrm{d}x_u$ 且 466

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_2^1 &= -\cos v \mathrm{d}x_v \wedge \mathrm{d}x_u \\ &= \frac{\cos v}{R^2\cos v}\theta^1 \wedge \theta^2 \\ &= \frac{1}{R^2}\theta^1 \wedge \theta^2. \end{aligned}$$

因此,与公式 $\mathrm{d}\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$ 比较,得到 $K=1/R^2$。

练习 8.6.9 利用公式 $\mathrm{d}\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$ 计算其他曲面的 K。

在现代几何和物理中,微分形式在理论和计算中都扮演着重要的角色。微分形式的经典方法见[Fla89],同时读者也可以发现很多在物理上的应用。一个较新的方法见[Dar94],这本书把形式应用于现代测量理论。利用微分形式研究曲面的几何性质见[O'N66]。 467

附录　部分练习的提示及解答

第1章

练习 1.1.2　把 $p=(-1,0,5)$，$q=(3,-1,-2)$代入 $\alpha(t)=p+t(q-p)$.

练习 1.1.3　$\alpha(t)=(-1+t, 6-5t, 5-8t, 9t)$.

练习 1.1.4　向量$(v_1, v_2, 0)$是直角三角形的斜边，这个三角形的直角边分别是向量$(v_1, 0, 0)$以及平行于$(0, v_2, 0)$的向量．向量(v_1, v_2, v_3)是直角三角形的斜边，这个三角形的直角边分别是向量$(v_1, v_2, 0)$以及平行于$(0, 0, v_3)$的向量.

练习 1.1.6　135°(或 45°).

练习 1.1.25　考虑 $\alpha(0)$，$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)$，$\alpha(\pi)$，$\alpha\left(\frac{3\pi}{2}\right)$．这些点到原点的距离是多少？同样注意 $\alpha(t)\cdot\alpha'(t)=0$，$\alpha''(t)=-\alpha(t)$.

练习 1.1.26　由最基本的参数化 $\alpha(t)=(r\cos t, r\sin t)$开始．$t=0$ 对应于 xy 平面上的点 $(r+a, b)$．而 $t=\frac{\pi}{2}$对应于点$(a, r+b)$.

练习 1.1.27　$\alpha(t)=(a\cos t, b\sin t)$.

练习 1.2.2　对 $\beta(s)=\alpha(h(s))$运用链式法则.

练习 1.2.5　证明$|\alpha'(t)|=r$，$s(t)=rt$，$t(s)=\frac{s}{r}$．由定义 $\beta(s)=\alpha(t(s))$得到 $\beta(s)=\left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$.

练习 1.2.6　证明$|\alpha'(t)|=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$，积分 $s(t)=\int_0^t|\alpha'(u)|\,du$ 是否可积？

练习 1.3.2　对等式 $T\cdot e_1=|T||e_1|\cos\theta$ 两边求导，首先证明 $\kappa N\cdot e_1=-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}$．因为曲线上的任意点处都有两个法向量，所以考虑两种情形：(1) $N=N_1$，其中 N_1，e_1 之间的夹角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$．(2) $N=N_2$，其中 N_1，e_1 之间的夹角为$\frac{\pi}{2}-\theta$．利用 $\kappa N\cdot e_1=-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}$以及点积的定义证明：$N=N_1$时，$\kappa=\frac{d\theta}{ds}$；而 $N=N_2$ 时，$\kappa=-\frac{d\theta}{ds}$.

练习 1.3.3　对第一行展开，得

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}i-\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}j+\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}k.$$

练习 1.3.4　把行列式的任两行互换，那么行列式改变符号．$w\times v$，$v\times w$之间的关系如何？

练习 1.3.5　利用 Maple.

练习 1.3.6　利用拉格朗日恒等式

$$|v\times w|^2 = |v|^2|w|^2 - |v|^2|w|^2\cos^2\theta,$$

化简等式右边就可以得到所要结果.

练习 1.3.8 平行四边形的面积是 bh，其中 b 是底边的长度，h 表示底边上的高. 由 v，w 张成的平行四边形的高 h 是 $|v|\sin\theta$。其中 θ 是 v，w 之间的夹角.

练习 1.3.11 (1)证明 $\beta'(s)=\left(\frac{\sqrt{1+s}}{2}, \frac{-\sqrt{1-s}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(2) 注意 $T'=\beta''=\left(\frac{1}{4\sqrt{1+s}}, \frac{1}{4\sqrt{1-s}}, 0\right)$. 同时，因为 $T'=\kappa N$，所以 $|T'|=|\kappa||N|=\kappa$.

(3)因为 $T'=\kappa N$，所以 $N=\frac{T'}{\kappa}$.

(4)$B'=-\tau N$，所以 $|B'|=|-\tau||N|$，或者 $|B'|=|-\tau|=\tau$.

练习 1.3.22 因为存在函数 $r(s)$，使得 $p=\beta(s)+r(s)\beta'(s)$. 两边同时微分得

$$(1+r'(s))T+r(s)\beta''(s)=0.$$

两边同时与 T 做点积可得 $r(s)\neq 0$；两边同时与 β'' 做点积可得矛盾的结论 $r(s)=0$. 除非 $\beta''=0$，即 β 是直线.

练习 1.3.23 令 $\alpha(s)-p=aT+bN+cB$，故 $T\cdot(\alpha-p)=a$，$N\cdot(\alpha-p)=b$，$B\cdot(\alpha-p)=c$. 而 α 位于中心为 p 半径 R 的球面上，故 $(\alpha-p)\cdot(\alpha-p)=R^2$. 方程两边同时求导得到 $T\cdot(\alpha-p)$ 的表达式. 然后对 $T\cdot(\alpha-p)=a$ 两边同时求导得到 $N\cdot(\alpha-p)$ 的表达式. 最后对 $N\cdot(\alpha-p)=b$ 两边同时求导得到 $B\cdot(\alpha-p)$ 的表达式.

练习 1.3.24 利用练习 1.3.23. 令常数为 R^2，并证明 $\alpha+\frac{1}{\kappa}N+\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'B$ 是常数.

练习 1.4.4 如果路面是平的，那么 $\alpha''(t)$ 就分解为两部分：(1)因为汽车是匀速运行，所以切方向上的加速度 $=\frac{dv}{dt}T(t)=0$. (2)向心加速度 $=\kappa v^2N(t)$. 由牛顿定律，$m\kappa v^2\doteq\mu mg$. 如果路面是倾斜的，那么有三个力作用在车上：(1)向下的重力，(2)路面的支持力，(3)使得汽车不会驶离路面的摩擦力. 使得汽车不会下滑的静态摩擦力可以忽略不计. 470

由力学知，$|f|=\mu|N|$，可得 $f_x=\mu N_y$，$f_y=\mu N_x$. 加上竖直方向的力得

$$N_y = mg + f_y = mg + \mu N_x.$$

向心加速度由水平方向的合力 f_x+N_x 产生，故

$$m\kappa v^2 = f_x + N_x = \mu N_y + N_x.$$

同时解 N_x，N_y 得到

$$N_x = \frac{m}{1+\mu^2}[\kappa v^2 - \mu g]$$

$$N_y = \frac{m}{1+\mu^2}[g + \mu\kappa v^2].$$

由此可得 $\tan\theta$ 的表达式. 在此表示中解 v 得到

$$\nu \leqslant \sqrt{\frac{g(\tan\theta + \mu)}{\kappa(1 - \mu\tan\theta)}}.$$

练习 1.4.6 利用定理 1.4.5 中的关于 κ 的公式. 对于通常的平面曲线 $\alpha(t)=(x(t), y(t))$，有 $\alpha'(t)=(x'(t), y'(t))$，$\alpha''(t)=(x''(t), y''(t))$，因此

$$\kappa = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

练习 1.4.9 作为练习 1.4.8 的一部分，我们可得 $|\alpha'(t)| = \sqrt{2}\cosh t$.

练习 1.5.2 因为 $\gamma(s)$ 不一定是单位速度的，所以必须利用定理 1.4.5 的公式计算.

(1)证明 $\gamma' \times \gamma'' = \kappa B - \kappa\cos\theta(u \times N)$.

(2)证明 $u \times N = \cos\theta B - \sin\theta T$.

(3)证明 $|\gamma' \times \gamma''| = \kappa\sin\theta$.

(4)证明 $|\gamma'| = \sin\theta$.

练习 1.5.3 ($\Rightarrow$)β 是圆螺线$\Rightarrow\gamma$ 是圆$\Rightarrow\kappa_\gamma$ 是常数. 而圆螺线是圆柱螺线的一个特殊的例子. 因此，$T \cdot u = \cos\theta$ 是常数. 这些结果对于 $\kappa = \kappa_\gamma \sin^2\theta$ 意味着什么？最后，利用事实：对于圆柱螺线，$\frac{\tau}{\kappa}$ 是常数.

($\Leftarrow$)τ，κ 是常数$\Rightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \cot\theta$ 是常数. 由此可以证明 κ_γ 是常数. 同时证明 $\tau_\gamma = 0$，进而 γ 是圆.

练习 1.5.4 利用练习 1.3.11 的结论 $\kappa = \tau = \frac{1}{\sqrt{8(1-s^2)}}$ 证明 $\cot\theta = \frac{\tau}{\kappa}$ 是常数.

练习 1.5.5 利用定理 1.4.5 的公式计算可得 $\kappa = 1/4$ 以及定理 1.5.1 的公式计算可得 $\tau = -1/4$. 如果 τ，κ 都是常数，又有什么结论呢？

471 **练习 1.5.6** 利用 Maple 证明 $\frac{\tau}{\kappa}$ 是常数当且仅当 $4b^4 = 9a^2$.

练习 1.5.7 WLOG 假设 β 是单位速度的. 证明 $\frac{T'(s)}{\kappa} \cdot u = 0$ 或者 $\frac{1}{\kappa}(T'(s) \cdot u) = 0$. 因为向量 u 是常向量，所以 $(T(s) \cdot u)' = T'(s) \cdot u + T(s) \cdot u' = T'(s) \cdot u$.

第 2 章

练习 2.1.1 ($\Rightarrow$)如果 x_u，x_v 线性相关，那么 $x_u = cx_v$，其中 c 是一个常数. 因为 $x_u \times x_v$ 能够写成行列式的形式，所以可以利用行列式的性质.

($\Leftarrow$)$x_u \times x_v = 0 \Rightarrow |x_u||x_v|\sin\theta = 0$. 由此可得 x_u，x_v 的夹角 θ 的值.

练习 2.1.6 利用抛物面的蒙日补片 $x(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$；确定 u 参数曲线 $x(u, v_0)$ 以及 v 参数曲线 $x(u_0, v)$. 注意每条曲线都在 $\mathbb{R}^3$ 的一个坐标平面上.

练习 2.1.8 $x(u, v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$.

练习 2.1.19 锥面的直纹补片形如 $x(u, v) = p + v\delta(u)$，其中 p 是一个固定点. 锥面的顶点是原点 $p=(0, 0, 0)$ 时，曲面上的直线由 $(0, 0, 0)$ 以及平行于 xy 平面的圆 $(a\cos u, a\sin u, a)$

上的一点确定．圆上任一点的 z 坐标是 a，是因为 $z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{a^2\cos^2u+a^2\sin^2u}=a$.

圆柱面的直纹补片形如 $\mathbf{x}(u,\ v)=\beta(u)+vq$，其中 q 是一个固定的方向向量．标准圆柱面的准线 $\beta(u)$ 是 xy 平面上的单位圆 $(\cos u,\ \sin u,\ 0)$．这里取 $q=(0,\ 0,\ 1)$.

练习 2.1.20 为了证明曲面为双直纹面，我们需要验证曲面有两个直纹补片．因为 $z=xy=f(x,\ y)$．所以一个蒙日补片是 $\mathbf{x}(u,\ v)=(u,\ v,\ uv)$．取 $\beta(u)=(u,\ 0,\ 0)$，$\delta(u)=(0,\ 1,\ u)$．另外 $\mathbf{y}(u,\ v)=(v,\ u,\ vu)$ 也是曲面的另外一个补片．

练习 2.1.21 $\mathbf{x}(u,\ v)=(0,\ 0,\ bu)+v(a\cos u,\ a\sin u)$ 是螺旋面的一个补片．

练习 2.1.22 单叶双曲面的准线是椭圆 $\beta(u)=(a\cos u,\ b\sin u,\ 0)$．令 $\delta(u)=\beta'(u)+(0,\ 0,\ c)$．可以证明 $\mathbf{x}(u,\ v)=\beta(u)+v\delta(u)$ 的确是曲面的一个补片．另外，取 $\beta(u)=(a\cos u,\ b\sin u,\ 0)$，$\delta(u)=\beta'(u)+(0,\ 0,\ -c)$．验证这也是曲面的一个补片．

练习 2.2.5 由定义，

$$v[fg]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(fg(\alpha(t)))\big|_{t=0}=\nabla fg(p)\cdot v.$$

把 ∇fg 写成 $\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x},\ \frac{\partial(fg)}{\partial y},\ \frac{\partial(fg)}{\partial z}\right)$ 的形式，且利用 $\frac{\partial(fg)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}g+\frac{\partial g}{\partial x}f$．最后合并同类项可得 $v[fg]=v[f]g+fv[g]$.

练习 2.2.6 把 x 看作是函数 $f(p_1,\ p_2,\ p_2)$，记 $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ v_2)$．因此，由定义，$\mathbf{v}[x]=\left(\frac{\partial x}{\partial p_1},\ \frac{\partial x}{\partial p_2},\ \frac{\partial x}{\partial p_3}\right)\cdot(v_1,\ v_2,\ v_2)$．但是因为 $x(p_1,\ p_2,\ p_3)=p_1$，故 $\frac{\partial x}{\partial p_2}=\frac{\partial x}{\partial p_3}=0$，$\frac{\partial x}{\partial p_1}=1$.
同样地处理 $\mathbf{v}[y]$，$\mathbf{v}[z]$. 472

练习 2.2.11 令 $\alpha(t)=x(a_1(t),\ a_2(t))$，$\beta(t)=x(b_1(t),\ b_2(t))$，其中 $\alpha(0)=p=\beta(0)$，$\alpha'(0)=\mathbf{v}$，$\beta'(0)=\mathbf{w}$．如果 $\gamma(t)=x((a_1(2t)+b_1(2t))/2,\ (a_2(2t)+b_2(2t))/2)$，那么 $\gamma'(t)=x_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+x_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=x_u(a_1'(2t)+b_1'(2t))+x_v(a_2'(2t)+b_2'(2t))$．求 $\alpha'(t)$，$\beta'(t)$，得 $\gamma'(0)=\mathbf{v}+\mathbf{w}$．这样，$(\mathbf{v}+\mathbf{w})[f]=\gamma'(0)[f]=\nabla f\cdot\gamma'(0)$．又 $\mathbf{v}[f]+\mathbf{w}[f]=\nabla f\cdot\mathbf{v}+\nabla f\cdot\mathbf{w}$，可证 $(\mathbf{v}+\mathbf{w})[f]=\mathbf{v}[f]+\mathbf{w}[f]$.

练习 2.3.4 利用特征多项式 $\det(\lambda I-S)=0$ 求方阵 S 的特征值．对于 2×2 的对称矩阵

$$\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix},$$

方程就是 $\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0$．求解方程得到两个根 λ_1，λ_2，并证明这两个根是实数．

练习 2.4.4 第一部分利用 $S(\alpha')=-\nabla_{\alpha'}U$；第二部分（充要条件）对任意的 t，$S(\alpha')$ 和 α' 都属于 $P\cap T_{\alpha(t)}M$.

第 3 章

练习 3.1.2 因为 $K=k_1k_2$，所以 k_1，k_2 符号相反．因为 $k_1(u)$ 定义为极大曲率，所以 $k_1(u)>k_2(u)$，因此 $k_1>0$，$k_2<0$.

练习 3.1.6 (1)欧拉公式 $k(u)=\cos^2\theta k_1+\sin^2\theta k_2$，其中 $u=\cos\theta u_1+\sin\theta u_2$（即 u 是 θ 的函数）．则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta k_1+\sin^2\theta k_2)\mathrm{d}\theta.$$

根据 k_1，k_2 是常数，估计这个积分.

(2)用 u_1，u_2 表出 v_1，v_2. 即 $v_1=\cos\phi u_1+\sin\phi u_2$，$v_2=\cos\left(\phi+\frac{\pi}{2}\right)u_1+\sin\left(\phi+\frac{\pi}{2}\right)u_2$. 然后利用欧拉公式可得 $k(v_1)$，$k(v_2)$.

练习 3.1.10　M 极小 $\Rightarrow H(p)=0$，$\forall p\in M$. 这对于 κ_1，κ_2 意味着什么？进而，对于 K 呢？

练习 3.2.18　(a)计算 x_u，x_v，$x_u\times x_v$ 得到 $U=\frac{\beta'\times\delta+v\delta'\times\delta}{W}$. 证明 $(U\cdot x_{uv})^2=\frac{(\beta'\cdot\delta\times\delta')^2}{W^2}$. 在此过程中，要用到 $a\cdot(b\times c)=-b\cdot(a\times c)$. 利用拉格朗日恒等式证明 $|x_u\times x_v|^2=EG-F^2=W^2$. 最后证明 $K=\frac{-(U\cdot x_{uv})^2}{EG-F^2}$，再结合前面的结论.

(b)马鞍面的直纹补片是 $x(u, v)=(u, 0, 0)+v(0, 1, u)$. 则 $\beta(u)=(u, 0, 0)$，$\delta(u)=(0, 1, u)$. 利用(a)的结论可得 $K=\frac{-1}{(x^2+y^2+1)^2}$.

(c)注意到 $\beta(u)=(p_1, p_2, p_3)$，因此 $\beta'(u)=(0, 0, 0)$.

(d)注意到 $\delta(u)=(q_1, q_2, q_3)$，因此 $\delta'(u)=(0, 0, 0)$.

练习 3.2.20　对于一个方向，仅当 $v(\delta'\times\delta)=0$ 时 U 与 v 无关. 这样，$\delta'\times\delta=0$ 且直纹曲面的 K 的公式表明 $K=0$. 对于另外一个方向，注意 $U_v=-S(x_v)$ 是切向量. 证明 $U_v\cdot x_v=0$
473 且由 $K=0$ 的假设得到 $U_v\cdot x_u=0$(直纹曲面的 K 的公式).

练习 3.2.23　如果 β 是曲率线，那么 $\beta'\cdot U\times U'=\beta'\cdot U\times c\beta'=0$. 另一方面，证明可展意味 U' 垂直于 $\beta'\times U$ 和 β'. 注意所有的向量都在切平面上.

练习 3.2.26　(a)、(b)是显然的. 对于(c)，把(b)的结果代入 K，H 的公式并化简. 以下考虑(d). 利用(c)的结论，注意 D 是 K 的分子在临界点 (u_0, v_0) 的取值. 因为 K 的分母总是正数，因此 $D=0\Rightarrow K=0$，$D>0\Rightarrow K>0$，$D<0\Rightarrow K<0$. $K=0$ 时 k_1，k_2 满足什么条件？$K<0$ 呢？反映到曲面上呢？$K>0$ 有两种情形. 如果 $f_{uu}(u_0, v_0)$ 是正数，那么 k_1，k_2 都是正数. 如果 $f_{uu}(u_0, v_0)$ 是负数，那么 k_1，k_2 都是负数. 在这两种情况下，一定有何结论？

练习 3.3.4　旋转曲面 $F=m=0$. 因此 x_u，x_v 正交，且可以用基向量 x_u，x_v 表示 $S(x_u)$. 不妨设 $S(x_u)=ax_u+bx_v$. 计算 $S(x_u)\cdot x_u$，结果恰好是 l. 计算 $S(x_u)\cdot x_v$，结果恰好是 n. 类似地，令 $S(x_v)=cx_u+dx_v$，计算与 x_u，x_v 的点积.

练习 3.3.7　(a)利用旋转曲面的 K 的表达式可得

$$K=\frac{1-u^2}{(1+u^2e^{-u^2})^2}.$$

用代数的方法判断什么时候 $K>0$，$K=0$，$K<0$. (b)做法类似. 由椭圆的参数方程 $\alpha(u)=(R+a\cos u, b\sin u, 0)$ 得到椭圆环面的补片 $x(u, v)=((R+a\cos u)\cos v, b\sin u, (R+a\cos u)\sin v)$. 利用旋转曲面的 K 的表达式可得

$$K=\frac{ab^2\cos u}{(R+a\cos u)(b^2\cos^2u+a^2\sin^2u)^2}.$$

练习 3.3.11 分离变量，得到表达式

$$u=-\int\sqrt{\frac{1}{h^2}-1}\,\mathrm{d}h.$$

作变量替换 $h=1/\cosh w$，得到 $u=\int\tanh^2 w\mathrm{d}w$．积分．利用 $\cosh^{-1}(1/h)=\ln(1/h+\sqrt{(1/h)^2-1})$

以及 $\tanh x=e^{x}-e^{-x}/e^{x}+e^{-x}$ 化简得到 $u=\ln\left|1/h+\frac{\sqrt{1-h^2}}{h}\right|-\sqrt{1-h^2}+C$.

练习 3.4.4 验证 U_u 的公式．回忆 u 参数速度向量作用于 u，v 的函数相当于取这个函数的 u 偏导数．因此

$$\nabla_{x_u}U=(x_u[u_1],x_u[u_2],x_u[x_3])=U_u.$$

因为 x_u，x_v 构成了 T_pM 的基，且 ∇_{x_u} 属于 T_pM，所以可设 $\nabla_{x_u}U=Ax_u+Bx_v$．两边关于 x_u 取点积，可得 $\nabla_{x_u}U\cdot x_u=Ax_u\cdot x_u=AE$．同时，$0=x_u[0]=x_u[U\cdot x_u]=\nabla_{x_u}U\cdot x_u+U\cdot x_{uu}$．由此证明 $A=-l/E$．同样的方法求 B，并得到 U_v 的表达式． 474

练习 3.4.5 求两个偏导数 $\left(\frac{E_v}{2G}\right)_v$，$\left(\frac{G_v}{2G}\right)_u$，得到右边的一个等价的表达式为

$$\frac{E_uG_u}{4E^2G}-\frac{2GE_{vv}}{4G^2E}+\frac{E_vG_v}{4G^2E}+\frac{E_vE_v}{4E^2G}-\frac{2GG_{uu}}{4G^2E}+\frac{G_uG_u}{4G^2E}.$$

表达式除以公分母 $4E^2G^2$．其次，计算

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)=\frac{E_{vv}}{\sqrt{EG}}-\frac{E_vE_vG}{2(EG)^{\frac{3}{2}}}-EE_vG_v2(EG)^{\frac{3}{2}}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)=\frac{G_{uu}}{\sqrt{EG}}-\frac{G_uE_uG}{2(EG)^{\frac{3}{2}}}-\frac{G_uEG_u}{2(EG)^{\frac{3}{2}}}.$$

代入给定的表达式，然后将结果除以公分母 $4E^2G^2$ 得到和上面相同的表达式．

练习 3.4.6 半径为 R 的球面的补片是 $x(u,v)=(R\cos u\cos v,R\sin u\cos v,R\sin v)$．计算 x_u，x_v，E，G，然后代入给定的表达式得到 $K=1/R^2$．

练习 3.5.1 因为 S_p 是 T_pM 上的线性变换，所以可设 $S(x_u)=Ax_u+Bx_v$．但是因为 p 是脐点，所以 $S(x_u)=kx_u\Rightarrow B=0$．利用

$$l=S(x_u)\cdot x_u=AE+BF,\quad m=S(x_u)\cdot x_v=AF+BG$$

解 B，得 $B=\frac{-Fl+Em}{EG-F^2}=0$，故 $l/E=m/F$．同样的方法处理 $S(x_v)$．

练习 3.5.9 旋转曲面的补片为 $x(u,v)=(u,h(u)\cos v,h(u)\sin v)$．故 $K=\frac{-h''}{h(1+h'^2)^2}=0\Rightarrow -h''=0$．因此，$h(u)=C_1u+C_2$．注意，如果 $C_1=0$，那么绕 x 旋转 $h(u)$ 可得圆柱面．如果 $C_1\neq 0$，就生成了圆锥面．

第 4 章

练习 4.2.3 类似于命题 4.2.2，利用蒙日补片 $x(u,v)=(u,v,f(u,v))$得到 $f_u=g'(u)$，$f_{uu}=g''(u)$，$f_v=h'(v)$，$f_{uv}=0$，$f_{vv}=h''(v)$. 则

$$H=0\Leftrightarrow(1+h'^2(y))g''(x)+(1+g'^2(x))h''(y)=0.$$

分离变量得

$$\frac{-g''(x)}{1+g'^2(x)}=\frac{h''(y)}{1+h'^2(y)}.$$

由 x，y 的独立性知道，等式两边都是常数. 因此，令

$$a=\frac{-g''(x)}{1+g'^2(x)}.$$

475 令 $w=g'(x)$，$g''(x)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$，积分得到 $w=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=-\tan ax$. 再次积分得 $g(x)=1/a\ln(\cos ax)$. 同理可得 $h(y)=-1/a\ln(\cos ay)$. 综合得到

$$f(x,y)=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{\cos ax}{\cos ay}\right).$$

练习 4.2.7 $\frac{\mathrm{d}\tau_\beta}{\mathrm{d}u}=(\beta'\times\delta)'\cdot\delta'+(\beta'\times\delta)\cdot\delta''$. 上述表达式的两项都是零.

练习 4.3.3 计算

$$\frac{\partial P}{\partial u}=\frac{(f_{uu}V+f_uV_u)(1+f_u^2+f_v^2)-Vf_u^2f_{uu}-Vf_uf_vf_{uv}}{(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

且

$$\frac{\partial Q}{\partial v}=\frac{(f_{vv}V+f_vV_v)(1+f_u^2+f_v^2)-Vf_v^2f_{vv}-Vf_uf_vf_{uv}}{(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{3}{2}}},$$

然后利用格林定理

$$\int_v\int_u\left(\frac{\partial P}{\partial u}+\frac{\partial Q}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_C P\mathrm{d}v-Q\mathrm{d}u.$$

练习 4.4.1 计算偏导数得

$$\frac{\partial P}{\partial u}+\frac{\partial Q}{\partial v}=-V_u\cdot(U\times x_v)+V_v\cdot(U\times x_u)+V\cdot[U_v\times x_u-U_u\times x_v].$$

因为 U 是 M 上的函数，所以有 $U_v=\nabla_{x_v}U=-S(x_v)$，$U_u=\nabla_{x_u}U=-S(x_u)$. 代入上述方程得

$$\frac{\partial P}{\partial u}+\frac{\partial Q}{\partial v}=V_v\cdot(U\times x_v)+V_u\cdot(U\times x_v)+V\cdot(2Hx_u\times x_v).$$

应用格林定理.

练习 4.6.2 对于柯西-黎曼方程 $z^2=x^2-y^2+\mathrm{i}2xy$，则

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2x=\frac{\partial\psi}{\partial y}\quad\frac{\partial\phi}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

因此，$f(z)=z^2$ 是全纯的，且 $f'(z)=2x+\mathrm{i}2y=2z$.

练习 4.6.8 由柯西-黎曼方程，得

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial \phi}{\partial u}+\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial u}+\mathrm{i}\frac{\partial \phi}{\partial v}+\mathrm{i}^2\frac{\partial \psi}{\partial v}$$
$$=\frac{\partial \phi}{\partial u}-\frac{\partial \psi}{\partial v}+\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial u}+\mathrm{i}\frac{\partial \phi}{\partial v}$$
$$=0.$$

练习 4.8.10 计算同例 4.8.9 几乎一样，差别在于每一项都加上因子 i. 这样实部就产生了变化，进而得到 $x^1=\sinh u\sin v$，$x^2=-\sinh u\cos v$，$x^3=v$，即是螺旋面.

练习 4.8.29 因为对于等温坐标，M 是极小的，所以 $l=-n$，且

$$K=\frac{ln-m^2}{EG-F^2}=\frac{-l^2-m^2}{E^2-0}=-\frac{l^2+m^2}{E^2}.$$ 476

练习 4.8.30 由共形高斯映射的定义知，$U_u\cdot U_v=0$. 代入 U_u，U_v 的一般表达式，得 $0=mH$. 分别考虑 $m=0$，$H=0$ 的情形.

第 5 章

练习 5.1.12 竖直的圆柱面的参数方程是 $x(u,v)=(R\cos u, R\sin u, bv)$，那么曲面上的曲线方程是 $\alpha(t)=(R\cos u(t), R\sin u(t), bv(t))$. 两次微分求得 α''，注意由链式法则得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos u(t)=-\sin u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. 且 $\alpha''=\alpha''_{\tan}+(\alpha''\cdot U)U$，其中 $U=(\cos u, \sin u, 0)$. 取 α''，U 的点积得到 $\alpha''\cdot U=-R\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2$. 由此以及 $\alpha''=\alpha''_{\tan}+(\alpha''\cdot U)U$，我们知道当 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=0$，$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}=0$ 时，$\alpha''_{\tan}=0$. 即 $u(t)=k_1t+c_1$，$v(t)=k_2t+c_2$. 因此，$\alpha(t)=(R\cos(k_1t+c_1), R\sin(k_1t+c_1), b(k_2t+c_2))$. 最后，考虑以下情形：(1) $c_1=c_2=0$，$k_1=k_2=1$；(2) $c_1=0$，$c_2\neq0$，$k_1=1$，$k_2=0$；(3) $c_1=0$，$c_2=\frac{1}{b}$，$k_1=1$，$k_2=0$.

练习 5.2.12 因为 $\alpha'=x_uu'+x_vv'$，所以，

$$\sqrt{G}\sin\phi=\sqrt{G}\cos(\pi/2-\phi)=x_v\cdot\alpha'=Gv',$$

然后利用由第二个测地线方程得到的关系式 $v'=c/G$.

练习 5.2.13 平面的极坐标补片是 $x(u,v)=(u\cos v, u\sin v)$. 计算 $E=1$，$F=0$，$G=u^2$，验证 x 是 u 克莱罗参数化的. 因此，

$$v(u)-v(u_0)=\int_{u_0}^{u}\frac{c\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-c^2}}\mathrm{d}u=\int_{u_0}^{u}\frac{c\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-c^2}}.$$

利用代换 $u=c\sec x\Rightarrow \mathrm{d}u=c\sec x\tan x\mathrm{d}x$，积分得到 $v(u)-v(u_0)=\pm\cos^{-1}\frac{c}{u}$ 或者 $u\cos(v-v_0)=c$，即为直线的极坐标方程.

练习 5.2.14 计算 $E=2$，$F=0$，$G=u^2$. 验证锥面的坐标补片是 u 克莱罗参数化的；因此，

$$v(u)-v(u_0)=\int_{u_0}^{u}c\sqrt{E}\sqrt{G}\sqrt{G-c^2}\mathrm{d}u=\int_{u_0}^{u}\frac{c\sqrt{2}\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-c^2}}.$$

作代换 $u=c\sec x$，积分得到 $v(u)-v(u_0)=\sqrt{2}\sec^{-1}\frac{u}{c}$；

练习 5.4.6 计算 $E=1/(1-u^2/4)^2$，$F=0$，$G=u^2/(1-u^2/4)^2$；因此，

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right)=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right).$$

477 代入所需的导数，计算整理得到 $K=-1$.

第 6 章

练习 6.1.4 环面的补片为 $x(u, v)=((R+r\cos u)\cos v, (R+r\cos u)\sin v, r\sin u)$. 求 x_u，x_v，计算 $|x_u\times x_v|=r(R+r\cos u)$，则

$$SA=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}r(R+r\cos u)\mathrm{d}v\mathrm{d}u=4\pi^2 rR.$$

练习 6.1.5 (1)旋转曲面的补片为 $x(u, v)=(u, h(u)\cos v, h(u)\sin v)$. 求 x_u，x_v，计算 $|x_u\times x_v|=h(u)(1+h'^2(u))^{\frac{1}{2}}$. 对于旋转曲面，通常用 $f(x)$ 来替代 $h(u)$. 利用曲面面积的公式完成练习. (2)定义蒙日补片 $x(u, v)=(u, v, f(u, v))$，则 $|x_u\times x_v|=\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$.

练习 6.1.8 曲面的补片为

$$x(u,v)=(u-\tanh u,\operatorname{sech}u\cos v,\operatorname{sech}u\sin v).$$

计算 $|x_u\times x_v|=(\operatorname{sech}^4u\tanh^2u+\operatorname{sech}^2u-2\operatorname{sech}^4u+\operatorname{sech}^6u)^{\frac{1}{2}}$，利用恒等式 $\tanh^2u=1-\operatorname{sech}^2u$，化简得 $|x_u\times x_v|=\operatorname{sech}u\tanh u$. 则

$$SA=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\operatorname{sech}u\tanh u\mathrm{d}v\mathrm{d}u=2\pi.$$

练习 6.1.9 (1)环面的全高斯曲率为

$$\int_M K=\iint\frac{\cos u}{r(R+r\cos u)}|x_u\times x_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $|x_u\times x_v|=r(R+r\cos u)$. (2)悬链曲面的补片是 $x(u, v)=(u, \cosh u\cos v, \cosh u\sin v)$. 计算 $|x_u\times x_v|=\cosh^2u$. 可得 $K=-1/\cosh^4u$. 由 $\int_M K$ 可知全高斯曲率是 -4π.

练习 6.3.1 因为 V 是平行的，所以 $\alpha'[V\cdot V]=2\nabla_{\alpha'}V\cdot V=0$.

练习 6.3.3 $\alpha'[V\cdot W]=\nabla_{\alpha'}V\cdot W+V\cdot\nabla_{\alpha'}W$. V，W 是平行的$\Rightarrow\alpha'[V\cdot W]=0$. 而 V 是平行的，$\alpha'[V\cdot W]=0$ 以及 $\alpha'[W\cdot W]=0\Rightarrow\nabla_{\alpha'}W$ 垂直于 V，W. 因此，$\nabla_{\alpha'}W=0$ 且 W 是平行的.

练习 6.3.10 对于 R 球面，$K=1/R^2$，$|x_u\times x_v|=R^2\cos v$. 由 $\int_M K$ 计算得到 v_0 上的全高斯曲率是 $2\pi-2\pi\sin v_0$. 我们知道 v_0 上的完整性是 $-2\pi\sin v_0$. 因此，沿曲线的完整性恰好是以此曲线为边界的曲面的全高斯曲率(不考虑 2π 的整数倍).

练习 6.3.11 球面的赤道对应于练习 6.3.10 的 $v_0=0$. 沿赤道的完整性是多少？且其与一个向量沿赤道旋转的角度的是什么关系？这对于赤道有何意义？

练习 6.4.4 在平环上，重力并非如此作用，对吗？

478 **练习 6.5.5** 向量必须回到起始的位置，所以旋转的角度就是 2π 的整数倍.

练习 6.5.10 注意$\mathcal{H}$. $\mathcal{P}$的高斯曲率 $K=-1$. 因此有

$$\int_{\triangle} K = -\int_{\triangle} = -\triangle \text{ 的面积.}$$

又因为三角形的内角和与 π 只相差全高斯曲率的± 1倍，所以

$$\sum i_j - \pi = -\triangle\text{的面积.}$$

这个等式说明了什么问题？注意面积是一个严格的正数.

练习 6.6.6 如果 $K \leqslant 0$，且至少存在一个点的高斯曲率 $K<0$，那么全高斯曲率是负的，但是环面的欧拉示性数是零.

练习 6.7.3 圆盘的欧拉示性数是 1.

练习 6.8.17 利用定理 6.8.16.

第 7 章

练习 7.1.9

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f-\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\ddot{x}-\ddot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}-\dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \\ &= 0+0+\dot{x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

当且仅当$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}=0$.

练习 7.1.13 $x(t)=t-\sin t$.

练习 7.1.15 $x(t)=\sin t$.

练习 7.3.3 时间积分

$$T=\int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{ky}\mathrm{d}x$$

的欧拉-拉格朗日方程是

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{ky}-y'\frac{y'}{ky\sqrt{1+y'^2}}=c.$$

则

$$\frac{1}{ky\sqrt{1+y'^2}}=c,$$

分离变量为

$$\frac{y}{\sqrt{c^2-y^2}}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x.$$

解为$(x-a)^2+y^2=c^2$，即中心在 x 轴上的圆——庞加莱平面的测地线.

练习 7.5.3 $x(t)=t-\sin t+b$.

练习 7.5.5 $x(t)=c\sin t$.

练习 7.5.16

$$E = x\sin t + \frac{1}{2}\dot{x}^2 - x\sin t - \frac{1}{2}p^2 + x^2 - (\dot{x} - p)p$$
$$= \frac{1}{2}(\dot{x} - p)^2$$
$$\geqslant 0.$$

练习 7.5.18

$$E = \dot{x}^2 - x^2 - p^2 + x^2 - (\dot{x} - p)2p$$
$$= \dot{x}^2 - p^2 - 2p\dot{x} + 2p^2$$
$$= (\dot{x} - p)^2$$
$$\geqslant 0.$$

练习 7.6.5 欧拉-拉格朗日方程是

$$\dot{x} - \lambda - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x} + x) = 0,$$

化简为$\ddot{x} = -\lambda$，解为

$$x(t) = -\frac{\lambda}{2}t^2 + at + b.$$

由初始条件得 $a=\lambda/2$，$b=0$. 再由限制条件得

$$\frac{7}{12} = -\frac{\lambda}{2}\int_0^1 (t^2 - t)\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{12},$$

因此 $\lambda=7$；故 $x(t) = -\frac{7}{2}t^2 + \frac{7}{2}t$.

练习 7.6.13 抛物面上粒子的运动方程是

$$(1 + 4u^2)\ddot{u} + 4u\dot{u}^2 + 2u - u\dot{v}^2 = 0, \quad \dot{v} = \frac{1}{u^2}.$$

练习 7.6.17 $T = m/2(E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2)$，(不考虑 m)得

$$E = 1/2(E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2 - Ep_1^2 - Gp_2^2) - (\dot{u} - p_1)Ep_1 - (\dot{v} - p_2)Gp_2$$
$$= \frac{1}{2}(E(\dot{u} - p_1)^2 + G(\dot{v} - p_2)^2)$$
$$\geqslant 0.$$

第 8 章

练习 8.3.4

$$[fV, gW] = fV[gW] - gW[fV]$$
$$= fV[g]W + fgVW - gW[f]V - gfWV$$

480 $$= fg[V, W] + fV[g]W - gW[f]V.$$

练习 8.3.11 假设 $x_u \cdot x_v - 0$，取标准正交基 $\bar{x}_u = x_u/\sqrt{E}$，$\bar{x}_v = x_v/\sqrt{G}$，则

$$(\nabla_{\bar{x}_u}\bar{x}_u)^N = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(\left(\frac{x_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right) = \left(\frac{x_{uu}\sqrt{E} - x_u(\sqrt{E})_u}{E^{3/2}}\right)^N = \frac{l}{E}.$$

类似地，有$(\nabla_{x_v} x_v)^N=n/G$；又 $F=0$，故和等于$\dfrac{Gl+En}{EG}=2H$.

练习 8.5.17 注意$\langle R(X,X)X,X\rangle=0$；因此，如果取$\mathcal{E}_k=X/|X|$，则$\mathcal{E}_1,\cdots,\mathcal{E}_k$是$M^k$的标架；由定义，且因为$\langle R(\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_k)\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_k\rangle=0$，所以

$$\mathrm{Ric}(X,X)=\mathrm{Ric}(\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_k)=\sum_{j=1}^{k-1}\langle R(\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_j)\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_j\rangle.$$

然后利用截面曲率的定义以及$\mathcal{E}_k=X/|X|$.

练习 8.5.21 令 $X=\sum_j X^j\mathcal{E}_j$，$\mathrm{d}f=\sum_j \mathrm{d}f_j\theta^j$，其中 $\theta^i(\mathcal{E}_j)=\delta^i_j$. 则

$$\mathrm{d}f(X)=\mathrm{d}f\Big(\sum_j X^j\mathcal{E}_j\Big)=\sum_j X^j\mathrm{d}f(\mathcal{E}_j)=\sum_j\sum_i X^j\mathrm{d}f_i\theta^i(\mathcal{E}_j)=\sum_j X^j\mathrm{d}f_j.$$

而且，由定义知

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(f(\cdot,\cdot))(X)&=\sum_j \nabla_{\mathcal{E}_j}(f(\cdot,\cdot)(\mathcal{E}_j,X))\\
&=\sum_j \mathcal{E}_j[f(\mathcal{E}_j,X)]-f(\nabla_{\mathcal{E}_j}\mathcal{E}_j,X)-f(\mathcal{E}_j,\nabla_{\mathcal{E}_j}X)\\
&=\sum_j \mathcal{E}_j[f](\mathcal{E}_j,X)+f\,\mathcal{E}_j(\mathcal{E}_j,X)\\
&\quad-f(\nabla_{\mathcal{E}_j}\mathcal{E}_j,X)-f(\mathcal{E}_j,\nabla_{\mathcal{E}_j}X)\\
&=\sum_j \mathcal{E}_j[f](\mathcal{E}_j,X)+f(\nabla_{\mathcal{E}_j}\mathcal{E}_j,X)+f(\mathcal{E}_j,\nabla_{\mathcal{E}_j}X)\\
&\quad-f(\nabla_{\mathcal{E}_j}\mathcal{E}_j,X)-f(\mathcal{E}_j,\nabla_{\mathcal{E}_j}X)\\
&=\sum_j \mathcal{E}_j[f](\mathcal{E}_j,X)\\
&=\sum_j \mathrm{d}f(\mathcal{E}_j)X^j\\
&=\sum_j \mathrm{d}f_jX^j\\
&=\mathrm{d}f(X).
\end{aligned}$$

练习 8.5.23

$$\kappa=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Ric}(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_j)=\sum_{j=1}^{k}\lambda(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_j)=k\lambda.$$ 481

所以，$\mathrm{d}\kappa=k\mathrm{d}\lambda$. 而且，由练习 8.5.21 知，

$$\begin{aligned}
2\mathrm{d}\lambda&=2\mathrm{div}f(\cdot,\cdot)\\
&=2\mathrm{div}(\mathrm{Ric})\\
&=\mathrm{d}\kappa \qquad \text{由定理 8.5.22}\\
&=k\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

所以，$(k-2)\mathrm{d}\lambda=0$；又 $k\geqslant 3$，故 $\mathrm{d}\lambda=0$，即 λ 是常数. 482

（原书第2版）

微分几何及其应用

本书是优秀的微分几何教材，内容广泛，不但包含该领域的经典理论，同时还引入了计算机代数系统Maple的内容以及微分几何在现代生活中的实际应用。本书主要介绍了变分法、最优控制理论以及微分几何，并通过这些重要的概念帮助读者理解生活中的各种现象，例如肥皂膜的形成以及质点在曲面上的运动等，具体内容涉及常平均曲率、完整性与高斯-博内定理、极小曲面、变分法与几何等。此外，本书包含大量的练习，给出了相应的提示和解答，并提供了一系列的例子、定义以及注释。

本书可作为高等院校数学专业以及其他理工科专业的微分几何教材。对于专业人员而言，本书也极具参考价值。

作 者 简 介



John Oprea 美国克利夫兰州立大学数学系教授，从事理论研究多年，并具有丰富的教学经验，主要研究方向为代数拓扑学在几何学上的应用。

Differential Geometry and Its Applications

(Second Edition)

www.PearsonEd.com



影印版

ISBN 7-111-15892-X
定价：55.00 元

ISBN 7-111-19269-9
9 787111 192695

封面设计

华章图书

华章网站 http://www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
投稿热线：(010) 88379604
购书热线：(010) 68995259, 68995264
读者信箱：hzjsj@hzbook.com

ISBN 7-111-19269-9
定价：49.00 元